RIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine

NAZIONALE

B. Prov.

411

NAPOLI

Digitized by Google

B. Stat. II 1 11

Digitized by Google

ELEMENS
DES
PRINCIPALES PARTIES
DES
MATHÉMATIQUES.

Digitized by Google

SBN
C09453

ELEMENS

GENERAUX

DES PRINCIPALES PARTIES

DES

MATHÉMATIQUES,

NECESSAIRES

A L'ARTILLERIE ET AU GÉNIE.

Par M. l'Abbé DEIDIER, *Professeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de* LA FERE.

TOME PREMIER.

NAPOLI

A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la ruë Gille-Cœur, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Digitized by Google

PRÉFACE.

APRE'S tous les Traités que j'ai mis au jour ſur preſque toutes les parties des Mathématiques, on ſeroit ſans doute ſurpris de voir paroître des nouveaux Elémens de ma façon, ſi je ne rapportois les motifs qui m'ont engagé à entreprendre ce travail. Lorſque je compoſai mon Cours en cinq Volumes *in*-4°. mon deſſein étoit d'écrire pour l'inſtruction du Public en général, & par conſéquent pour toutes les profeſſions & les états auſquels les Sciences Mathématiques peuvent être de quelque ſecours; de-là cette eſpece de diffuſion, ou pour mieux dire, ces longs détails dont il ne m'étoit pas poſſible de me diſpenſer dès que je voulois me rendre utile également à tous. Aujourd'hui mes vûës ſont bien différentes, les perſonnes pour qui principalement je me ſuis attaché à cet Ouvrage, ſont des Militaires deſtinés à un Service qui demande des connoiſſances particulieres & beaucoup de ſçavoir. On conçoit d'abord aiſément qu'il faut ici du choix dans les matiéres, qu'il en eſt beaucoup que je dois paſſer ſous ſilence, ou ne traiter que légerement, & d'autres au contraire que je ne ſçaurois trop éclaircir. A quoi ſerviroit, par exemple, de faire de grands diſcours & de longues diſſertations ſur les nouvelles Méthodes, & le calcul différentiel & intégral? les belles & ſubtiles recherches que l'on fait aujourd'hui ſur les différentes courbes, qui ſont le principal objet de ces calculs, ſur les différens ordres de ces courbes, ſur la route que prennent leurs branches, ſur leurs points d'inflexion & de rebrouſſement, ſur les points ſimples & multiples, ſur leur rectification, & ſur la quadrature des eſpaces qu'elles renferment, ſont des connoiſſances auſſi inutiles à des Guerriers, que le ſeroit la découverte d'un nouveau

Satellite autour de Jupiter, ou de quelque calcul qui fixeroit le retour périodique d'une Cométe. Ces ſortes de ſujets n'ont rien de commun avec le bien que les Militaires doivent procurer à l'Etat, & l'on peut fort bien ſans eux, parvenir à la gloire & aux récompenſes que méritent l'application à ſon devoir & les belles actions.

Il n'en eſt pas de même des calculs ordinaires, de la Géometrie, de la Trigonometrie, de l'uſage qu'on fait de cette Science ſur le terrein, du Nivellement, de la Meſure des ſurfaces planes, de leurs rapports entr'elles, de leurs changemens, de leurs diviſions, de la Meſure des ſolides, du Toiſé des ſurfaces & des ſolides, de celui des bois, des ſections coniques, de la ſcience du mouvement, de la Méchanique, de la connoiſſance des Machines, des proprietés des fluides, & entr'autres de celles de l'air & de l'eau. C'eſt ſur les principes de la plûpart de ces choſes qu'eſt fondé le grand Art de la Guerre, & s'il eſt permis à quelques Officiers de n'en avoir que des legeres notions, il en eſt beaucoup au contraire qui ne ſçauroient remplir leurs poſtes avec diſtinction & honneur, s'ils négligeoient d'en acquerir de profondes & ſolides connoiſſances. La plûpart des manœuvres militaires ſe font avec beaucoup de promptitude, il faut ſouvent ſe décider ſans avoir le tems de faire de longues reflexions : comment voudroit-on qu'un homme ſuperficiel, & qui ne ſe ſeroit pas fait un uſage de ſçavoir ſe retourner ſelon les occurrences, put prendre le parti convenable, à moins que le hazard & la fortune n'y euſſent la meilleure part.

L'Etabliſſement des cinq Ecoles d'Artillerie, & les avantages que l'Etat en retire, ſont aujourd'hui connus de tout le monde. On ſçait que ces Ecoles ſont, pour ainſi dire, autant de pepinieres d'où ſortent grand nombre d'Officiers en qui la ſcience & la valeur ſemblent ſe diſputer à l'envi la gloire de les rendre utiles au ſervice de leur Prince, & au bien du Royaume; l'éloge que j'entreprendrois d'en faire ici, ſeroit certainement au-deſſous de l'idée que j'ai de leur mérite, & de celle que toute l'Europe en

a conçue depuis long-tems. Or dans ces Ecoles où Meſſieurs les Commandans prennent un extrême ſoin que les Officiers ſoient inſtruits, & faſſent des progrès dans les parties des Mathématiques qui conviennent à leur état, il a été reglé que l'on enſeigneroit un même Cours, afin que les Officiers & les Cadets des cinq Bataillons de Royal-Artillerie, qui ſe tranſplantent de trois en trois ans d'une Garniſon à l'autre, ne fuſſent pas retardés dans leurs Etudes par les changemens de Méthodes, & les différentes manieres d'enſeigner. Cependant comme ce Cours, de l'aveu même de ſon Auteur, n'a pas toute la perfection qu'il auroit pû lui donner, s'il avoit eu le loiſir d'en faire une ſeconde Edition; que la plûpart des matiéres y ſont traitées d'une maniere trop reſſerrée & trop ſèche, qui ne laiſſe point entrevoir les uſages auſquels elles peuvent ſervir, & qu'il s'en trouve grand nombre d'autres qui demanderoient des démonſtrations plus nettes & plus exactes, il n'eſt pas ſurprenant que les Profeſſeurs, ſans vouloir déroger au ſage Reglement qui a été fait, mais uniquement pour mieux répondre aux intentions de l'Auguſte Prince qui leur a confié l'inſtruction de ſes Officiers, ſe ſoient toujours crûs obligés d'ajouter à cet Ouvrage les réflexions & les commentaires qui peuvent en corriger les défauts, & procurer l'avancement de ceux à qui ils ont l'honneur de montrer.

Il ſeroit aſſez inutile en effet d'entaſſer Theoreme ſur Theoreme, ſi l'on ne faiſoit voir l'ordre & l'enchaînement qu'ils ont entr'eux, l'étendue des conſéquences qu'on en peut tirer, & l'application qu'on en peut faire à grand nombre de ſujets utiles & intéreſſans; c'eſt à quoi ne font pas aſſez d'attention la plûpart des perſonnes qui étudient les Mathématiques, & ſouvent même les Maîtres qui les enſeignent. On ſçait par cœur toutes les Propoſitions d'Euclide, grand nombre de celles d'Archimede, de Pappus & d'Appollonius, on lit dans les Ouvrages des Modernes, on ſe fait gloire de ſçavoir que Pythagore ſacrifia cent Bœufs aux Muſes, pour avoir découvert la 47e. d'Euclide, qu'Archimede tranſporté & hors de lui-même, d'avoir trouvé en entrant dans

le Bain, le moyen de réſoudre la queſtion que le Roy de Syracuſe lui avoit propoſée, en ſortit tout nud, & courut comme un fou par les rues, en répetant: *je l'ai trouvé, je l'ai trouvé*, & cent autres traits hiſtoriques, qui marquent de l'érudition; mais avec toutes ces belles connoiſſances, qu'on vienne à propoſer un Problême qui malheureuſement ne ſe trouve point dans les Auteurs qu'on a lûs, on s'y trouve tout auſſi embarraſſé que s'il s'agiſſoit d'un métier qu'on n'auroit jamais fait.

Pour ſe mettre à couvert de ce reproche, on ne manque pas de dire que l'eſprit d'invention n'eſt pas donné à tous, & qu'il n'appartient qu'à certains génies heureux & tranſcendans de s'élever au-deſſus de ceux qui nous ont précedé. Ceci pourroit être vrai à l'égatd de certaines découvertes extraordinaires qui demandent une ſagacité & une contention d'eſprit dont tous les Géometres ne ſont peut-être pas capables, quoique doués d'ailleurs de beaucoup de talens. Mais qu'en général la moindre Propoſition que l'on n'aura pas vû dans les Ouvrages de ceux qui ont écrit avant nous, nous étonne & nous arrête tout court, c'eſt une erreur qui ne peut provenir que de la mauvaiſe façon dont on s'aviſe d'étudier. Le propre des Mathématiques, eſt d'étendre les lumieres de l'eſprit, de le perfectionner, & de le rendre inventif. Tout homme qui a aſſez de génie pour comprendre les démonſtrations que cette Science employe, en auroit certainement aſſez pour en ſaiſir la Méthode, & s'il n'arrive pas à tous ceux qui s'y appliquent de parvenir juſques là, c'eſt qu'on étudie d'une façon plutôt hiſtorique que judicieuſe, & qu'on s'imagine avoir tout fait, lorſqu'au bout d'un certain tems on a amaſſé dans ſon eſprit un tas mal arrangé de Propoſitions & de Problêmes dont on ne connoît les tenans & les aboutiſſans, qu'à travers un nuage rempli d'obſcurité. Il ne s'agit donc pas ici d'aller avec précipitation, ni de faire de grands pas, qui ne menent à rien; c'eſt à l'ordre & à la liaiſon des matieres qu'il faut être attentif autant & plus qu'aux matieres même, & pourvû qu'on ſe gêne à marcher avec cette ptécaution, on éprouvera

bien-tôt que la Géometrie & les Mathématiques offrent un vaſte champ, où il eſt permis à tout homme qui veut travailler de partager la gloire d'une riche moiſſon.

Ces maximes que je n'ai jamais perdu de vûe dans les exercices Mathématiques de l'Ecole de la Fere où j'ai l'honneur de profeſſer, ont eu tout le ſuccès que je pouvois en attendre, on y a vû grand nombre d'Officiers & de Volontaires dans l'eſpace de ſept ou huit mois, faire des progrès qui après une étude de quelques années, auroient pû paroître étonnans, & s'élever autant au-deſſus des Géometres ordinaires, que ceux-ci ſe croyent ſupérieurs aux ſimples Artiſtes qui ſuivent une pratique aveugle, dont ils ignorent la raiſon : c'eſt le témoignage qu'en ont ſouvent rendu Meſſieurs nos Commandans & nos Officiers plus avancés, qui par une longue & ſérieuſe application, ont acquis un ſçavoir conſommé. Je puis même dire, ſans crainte d'en être démenti, que c'eſt à leur ſollicitation que je me ſuis déterminé à rédiger & mettre dans un ordre naturel les differens Commentaires & les Supplémens que j'ajoutois à notre Cours, à meſure que l'occaſion s'en préſentoit, de façon qu'on trouvera dans ce Volume non-ſeulement tout ce qui eſt dans le Cours, mais encore grand nombre d'autres matieres dont la connoiſſance eſt abſolument néceſſaire, le tout expliqué & démontré de la maniere la plus ſimple & la plus conforme aux ſages vûes que l'on a eu en établiſſant nos Ecoles.

Quoique ce ſoit aujourd'hui un uſage preſque général de mettre de l'Algebre partout, & de ne rien démontrer qu'en employant les regles de ce Calcul, il m'a paru cependant qu'il m'étoit permis de ne me pas conformer à cette eſpece de loi, pour des bonnes raiſons qu'il eſt à propos que je rapporte, afin qu'on ne diſe pas que c'eſt par caprice ou par défaut de lumiere que je refuſe d'acquieſcer à un ſentiment qui paroît avoir pris le deſſus.

En premier lieu, l'Algebre ſuppoſe la formation des figures auſquelles on l'applique, & la connoiſſance de leurs principales

proprietés; c'eſt par le moyen de celles-ci qu'elle parvient à en découvrir d'autres qui demanderoient de plus ſérieuſes réflexions. Il faut donc laiſſer à ceux qui commencent, le loiſir de conſidérer attentivement ces figures, de déduire de leurs formations les proprietés qu'ils ont beſoin de connoître, & de s'en tracer dans le cerveau des images familieres & nettes, ſans leſquelles il eſt impoſſible qu'on puiſſe ſuivre le fil d'un raiſonnement géométrique. Le Calcul qu'on voudroit joindre ici par trop de précipitation, ne ſerviroit qu'à les jetter dans un nouvel embarras, non-ſeulement par les dénominations différentes qu'il donne aux mêmes grandeurs, mais encore par l'attention qu'il faut faire pour ne pas commettre d'erreur dans ſes opérations. L'Eſprit humain veut être ménagé, ce n'eſt pas le connoître à fonds, que de lui propoſer de plein ſaut tant de difficultés à ſurmonter à la fois.

En ſecond lieu, la ſimplicité des principes ſur leſquels le Calcul Algébrique eſt fondé, donne une certitude parfaite à ſes réſultats, mais elle ne ſatisfait, ni n'éclaire l'eſprit; on ſçait après avoir examiné ſi l'on ne s'eſt point trompé, que les choſes doivent être comme on les a trouvées par le calcul, ſans ſçavoir les raiſons qui doivent les rendre telles, & deſlors l'eſprit toujours curieux de connoître les cauſes des effets qui ſe préſentent à lui, s'agite & ne ceſſe d'être dans l'inquiétude, à moins qu'on ne lui donne des démonſtrations tirées de la nature même du ſujet. Il faudroit donc pour le tranquilliſer avoir recours à ces démonſtrations, & c'eſt ce qu'on n'a garde de faire, puiſqu'on n'employe le calcul que pour ne pas ſe jetter dans ces difficultés. S'il eſt vrai, comme Wallis, & quelques Sçavans de notre ſiécle l'ont penſé, que les Anciens ayent eu une Analyſe aſſez ſemblable à la nôtre, pour faire les découvertes qu'ils nous ont laiſſées, je trouve qu'ils ont pris le bon parti en ſubſtituant à cette Analyſe les démonſtrations que nous trouvons dans leur Ouvrage; ils ſe ſont rendus plus intelligibles & plus convaincans, & de plus ils ont fermé la porte aux diſputes qui ne ſont que trop fréquentes

de nos jours au grand ſcandale de bien des gens, & à la honte d'une Science, qui autrefois unique dépoſitaire de la vérité entre les Sciences humaines ne peut maintenant ſe garantir des préjugés & des opinions qui tiranniſent les autres. Un Auteur aujourd'hui entreprend de traiter un certain ſujet, & y employe une certaine Méthode; ſon calcul fait, il tire de ſon réſultat les conſéquences qu'il croit pouvoir en déduire, & nous donne ces conſéquences & ce réſultat comme autant de vérités dont on ne peut douter. Un autre dans le même tems s'applique à la même queſtion, mais par une autre voye, ſon réſultat & ſes conſéquences ſont différentes; grande diſpute là-deſſus, on répond, on réplique, les Ecrits ſe multiplient, & la difficulté loin d'être éclaircie, s'embrouille de plus en plus. D'où peuvent venir ces ſortes de diſputes dont il ſeroit aiſé de donner des exemples récens; c'eſt, s'il m'eſt permis de dire mon avis, qu'en pareil cas les uns ni les autres ne cherchent point à réſoudre la queſtion par la voye qui ſeule pourroit la terminer. Si les calculs ſont juſtes & exacts, ſi les conſéquences qu'on en tire ne ſont pas forcées, tout ce qu'on avance doit pouvoir ſe déduire des proprietés de la figure ſur laquelle on travaille. Pourquoi donc après le calcul ne pas chercher dans cette même figure, ce que l'on a crû trouver dans ſes opérations? ce ſeroit ſans doute le moyen le plus naturel, ou même l'unique, de donner une entiere évidence à la découverte qu'on a faite, & de faire naître dans l'eſprit de tout le monde une parfaite conviction.

Ceux qui ſont du ſentiment qu'avant les nouvelles Méthodes, il n'y avoit d'autre voye d'invention que la ſynthèſe, par la raiſon qu'on ne trouve aucun veſtige de calcul dans les Ecrits des ſiécles paſſés, diſent ordinairement que les Anciens ne travailloient qu'à force de tête, & c'eſt, à mon avis, le plus bel éloge qu'on puiſſe leur donner. En effet, s'ils ne ſont parvenus aux connoiſſances que nous admirons dans leurs Ouvrages, que par les principes les plus ſimples de la Géométrie, & par une ſuite de longs raiſonnemens qui cependant ne les ont jamais jettés dans

l'erreur, je ne vois rien qui marque mieux l'élévation de leur génie; & rien auſſi qui ſoit plus humiliant pour nous, que l'étonnement où nous ſommes à la vûe de leurs productions. Ne vaudroit-il pas encore mieux ne travailler qu'à force de tête, que de ne travailler qu'à force de calcul, & de ſe repoſer ſur nos opérations juſqu'au point de ſentir un eſpece d'engourdiſſement, lorſqu'on exige que nous faſſions uſage de notre raiſon? C'eſt anéantir le but des Mathématiques que d'en agir ainſi, & pour peu que le goût du calcul ſe perpetue, on verra que cette belle Géométrie que l'on diſoit ſi utile à la perfection de l'eſprit, ne ſera plus qu'un art dans lequel il ne s'agira pour réuſſir mieux, que d'avoir acquis une plus grande habitude de calculer.

Ce que je viens de dire touchant l'uſage immodéré de l'Algebre que l'on fait dans les Mathématiques, eſt appuyé ſur le ſentiment des plus grands Géometres de notre ſiécle. On ne refuſera certainement pas ce titre à Meſſieurs de Fermat & Newton, ni la gloire d'avoir été de grands Calculateurs chacun dans ſon eſpece. Cependant M. de Fermat dans une Lettre écrite à un ſçavant Anglois, demande qu'on donne la ſolution des Problêmes géometriques qu'il propoſe, à la façon d'Euclide & indépendamment de l'Algebre, & ſi l'on veut ſçavoir quelle en eſt la raiſon; c'eſt, dit-il, de peur qu'on ne laiſſe périr inſenſiblement l'élégance des conſtructions & des démonſtrations dont les Anciens étoient ſi jaloux. Cette Lettre ſe trouve dans le ſecond Volume des Oeuvres Mathématiques de Wallis, *page* 859. M. Newton, au rapport de Pemberton ſon Commentateur, s'eſt ſouvent repenti d'avoir trop tôt paſſé à la Géometrie de M. Deſcartes, & à la lecture des Traités analytiques des Modernes, lorſqu'il commençoit à étudier les Mathématiques, & c'eſt ſans doute pour cette raiſon que, quoiqu'il eut compoſé beaucoup d'Ouvrages algébriques, qui ont extrêmement enrichi nos Méthodes avant de travailler à ſes *Principes Mathématiques de la Philoſophie Naturelle:* il n'a cependant employé dans celui-ci que la Méthode des Anciens. M. Wolf, l'un des plus grands Géometres que l'Allemagne

magne ait produit, ſoutient que lorſqu'on étudie les Mathématiques pour cultiver l'eſprit, & acquérir la juſteſſe du raiſonnement, il faut s'attacher beaucoup à démontrer à la maniere d'Euclide; que les démonſtrations analytiques peuvent à la vérité conduire en quelque façon à cette fin, mais qu'il s'en faut de beaucoup qu'elles ayent la même utilité; qu'il paroît par quelques Ecrits de Meſſieurs Deſcartes, Newton & Herman, que leurs raiſonnemens auroient été bien plus ſolides, s'ils avoient eu un peu plus d'uſage de la ſynthèſe; enfin, qu'on ne doit pas regarder comme puérile ce qu'il dit en faveur de la Méthode des Anciens, puiſque les plus grands génies auroient fait beaucoup mieux, s'ils s'étoient un peu plus accoutumés à cette façon de raiſonner. Je n'ai point traduit littéralement les termes de cet Auteur, de peur d'être trop long, mais on les trouvera en ſubſtance dans le cinquiéme Volume de ſes Elémens de Mathématique, imprimé à Genéve, *Chap.* 2. de la Diſſertation où il eſt traité de la façon d'étudier cette Science. Je pourrois rapporter le ſentiment de grand nombre d'autres Auteurs Modernes qui penſent à peu près de même; mais ceci ſuffit pour faire voir de quelle maniere il faut uſer des différentes Méthodes pour ne pas tomber dans des abus qui méritent d'être blâmés. On peut, & on fait même bien de calculer, lorſqu'on a acquis toutes les connoiſſances néceſſaires pour s'en tirer avec ſuccès, cette voye ſoulage l'eſprit dans ſes recherches, & abrege beaucoup le travail; mais après avoir trouvé ce qu'on cherche, il faut, autant qu'on peut, l'appuyer ſur de bonnes démonſtrations, & ne pas compter que les opérations que l'on a faites, puiſſent tenir lieu d'un raiſonnement qui entraîne l'évidence & la conviction.

Au reſte, je n'ai garde de penſer qu'on doive bannir entierement de nos Ecoles l'Algebre & la connoiſſance des nouvelles Méthodes. Je ſçais qu'il y a beaucoup d'Officiers très-capables d'y faire de grands progrès, & de s'en ſervir même avec utilité; mais comme ces calculs, ſouvent plus curieux que néceſſaires, ſont extrêmement attrayans, au point même qu'on a vû bien des

perſonnes quitter tout pour s'y attacher, je crois qu'il eſt bon d'en parler ſobrement, & qu'il vaut encore mieux faire des Géometres conſommés dans la pratique de leur Métier, que de faire des Sçavans abſtraits qui prendroient du dégoût pour grand nombre de détails dont ils ne peuvent ſe diſpenſer. Mais il eſt tems de donner ici le plan de mon Ouvrage.

Je le diviſe en trois Livres: le premier contient les Elémens de l'Arithmétique, de l'Algébre, de l'Analyſe, des Raiſons, Proportions & Progreſſions arithmétiques & géometriques avec un petit Traité des Logarithmes; le ſecond renferme les Elémens de la Géometrie, de la Trigonométrie, du Nivellement, de la Planimétrie, de la Stéréométrie, des Sections coniques, le Toiſé de la Maçonnerie & celui des Bois. Enfin j'ai compris dans le troiſiéme, les Elémens de l'Arithmétique des Infinis, & la Méchanique générale, c'eſt-à-dire la ſcience du mouvement, la Statique, l'Hydroſtatique, l'Airométrie, & l'Hydraulique, & un petit Traité de Perſpective. Entrons dans le détail.

La plûpart des Volontaires d'Artillerie & des Cadets de Royal-Artillerie, entrent dans ces Corps ſans avoir la moindre teinture de l'Arithmétique. Il eſt vrai que Meſſieurs les Officiers ſe font ſouvent un plaiſir de les enſeigner, & que de plus il ſe trouve quelquefois des Répétiteurs à qui ils peuvent avoir recours; car les Profeſſeurs occupés du ſoin de leurs Salles, ne peuvent ſuffire pour le détail des leçons particulieres, quelque bonne volonté qu'ils puiſſent avoir. Cependant comme ces Répétiteurs ne ſont pas ſtables dans nos Garniſons, qu'ils ne ſont pas toujours des plus éclairés, & que nos Officiers qui veulent bien ſe donner la peine d'enſeigner les Commençans, ſeroient bien aiſes d'avoir un Ouvrage tout fait, qui les exemptât du ſoin de chercher la Méthode la plus convenable, j'ai crû qu'il étoit à propos de commencer par un Traité de cette Science, où je démontre de la maniere la plus ſimple, les principales Regles; ſçavoir l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, & la Diviſion ſimple & compoſée, le Calcul des Fractions, l'Extraction de la Racine

quarrée, & celle de la Racine cubique. Ceux qui auront appris ces Regles de la façon que je les ai traitées, comprendront plus aiſément le reſte de cet Ouvrage, à cauſe de l'uniformité de la Méthode.

L'Algébre n'eſt autre choſe que la ſcience qui apprend à faire les opérations de l'Arithmétique, en employant les lettres de l'Alphabeth au lieu des chiffres ordinaires, ce que l'on fait par le moyen de certains ſignes qu'on a choiſi pour marquer l'Addition, la Souſtraction, &c. J'en explique les opérations, je fais voir la raiſon qui a obligé d'inventer ce Calcul, l'uſage qu'on en doit faire pour réſoudre les Problêmes qu'on propoſe; ce que c'eſt que Problême déterminé, & Problême indéterminé; la maniere d'en trouver la ſolution; comment on connoît ſi une Equation eſt du premier dégré, du ſecond, du troiſiéme, &c. & la Méthode génerale d'en trouver les Racines. Toutes ces choſes ſont fondées ſur les Regles de l'Arithmétique & ſur les principes les plus ſimples des Mathématiques, tels qu'eſt celui de dire, que ſi à deux nombres ou à deux grandeurs égales, on ôte ou on ajoute des grandeurs égales; ſi on les multiplie ou ſi on les diviſe par ces grandeurs égales, les ſommes, les reſtes, les produits, & les quotients ſeront encore égaux; ainſi elles portent avec elles leur démonſtration, lorſqu'on ne les applique, comme j'ai fait, qu'aux queſtions qui roulent ſur les nombres, & leur étude eſt très-utile pour accoutumer l'eſprit à faire attention à ſes démarches & à les ſimplifier.

Les Géometres entendent par le mot de *Raiſon*, la comparaiſon que l'on fait de deux nombres ou de deux grandeurs. Cette comparaiſon peut ſe faire ou en examinant la différence qui ſe trouve entre les deux grandeurs, ce qui ſe nomme *Raiſon Arithmétique*, ou en obſervant combien de fois l'une des deux grandeurs contient l'autre, ce qui ſe nomme *Raiſon Géometrique*. De même ſi après avoir comparé deux grandeurs, on vient à en comparer deux autres, & qu'on trouve que les deux comparaiſons ſoient ſemblables, on dit qu'il y a proportion entre ces quatre

grandeurs, & cette proportion eſt arithmétique ou géométrique, ſelon que les raiſons qui les compoſent ſont arithmétiques ou géométriques. Enfin l'on dit qu'il y a progreſſion arithmétique ou géometrique, lorſque pluſieurs grandeurs rangées de ſuite, ont entr'elles la même différence, ou qu'elles ſe contiennent par ordre de la même façon. Ce que l'on enſeigne là-deſſus eſt l'ame non-ſeulement de l'Arithmétique, mais encore de toutes les ſciences Mathémathiques. Les mots de *Nombre* ou de *Grandeur* ne nous préſentent que des idées abſtraites, & ſi nous voulons en connoître quelque choſe de plus, ce ne peut être que par le moyen des rapports que les nombres ou les grandeurs ont entr'eux, & à une commune meſure. Il faut donc s'attacher à cette matiere avec beaucoup d'attention, à moins qu'on ne veuille s'expoſer à trouver dans la ſuite des difficultés inſurmontables qui obligeroient ſouvent à rebrouſſer chemin. La maniere dont j'ai traité ce ſujet, l'application que j'en ai faite aux Regles de Trois directe & indirecte, ſimples & compoſées, à la Regle de ſocieté, à celle d'alliage, &c. & les queſtions numériques que j'y ai ajoutées, diſſiperont beaucoup l'ennui que l'eſprit en ſouffre ordinairement, & ſi l'on veut en bannir toute abſtraction, & joindre une parfaite clarté à une entiere certitude, je conſeille à ceux qui s'y appliqueront de ſubſtituer dans chaque Propoſition des nombres, au lieu des lettres de l'Alphabeth, ce que je n'ai pas toujours fait, pour éviter d'être trop long.

Il ſe trouve dans les Mathématiques des grandeurs qu'on nomme *ſourdes*, *irrationnelles*, ou *incommenſurables*, parce qu'on ne peut exprimer en nombre le rapport qu'elles ont à des grandeurs connues; les ſignes que l'on employe pour marquer ces grandeurs ſe nomment *Signes radicaux*, & la maniere dont on fait les opérations de l'Arithmétique ſur les incommenſurables, ſe nomme *Calcul des radicaux*. Quoique cette matiere ne ſoit pas d'un uſage fort fréquent, j'ai crû cependant ne devoir pas l'omettre, afin que dans les occaſions qui peuvent ſe préſenter, on n'y trouve aucun embarras; c'eſt pour la même raiſon que j'explique

auſſi le Calcul des Expoſans qui apprend à ſe paſſer quelquefois des ſignes radicaux, d'autant plus que les regles de ce Calcul ſont les mêmes que celles des Logarithmes dont l'uſage abrege beaucoup le travail dans le Calcul Trigonométrique. Au moyen de ce que je viens de dire, on peut s'aſſurer de trouver dans ce premier Livre, qui certainement n'eſt pas bien long, tout ce qu'il y a d'eſſentiel à ſçavoir ſur l'Arithmétique & l'Algebre, joint à bien des queſtions utiles & néceſſaires à l'Artillerie. Par exemple, j'ai fait voir comment par le moyen de la ſimple addition on peut former facilement des Tables pour trouver tout d'un coup le nombre de boulets contenus dans une pile, de quelque figure qu'elle ſoit; comment auſſi on peut découvrir la même choſe indépendamment des Tables, par le moyen de quelques formules algébriques très-ſimples & faciles à conſtruire; comment on peut connoître ſi dans une piece de Canon qu'on veut refondre, l'alliage a été bien fait, &c.

C'eſt une queſtion qui n'eſt pas encore bien décidée parmi les Sçavans de nos jours, ſçavoir, ſi l'on peut traiter les Elémens de la Géometrie d'une façon différente de celle d'Euclide. Il eſt conſtant que cet Auteur n'a penſé qu'à ranger ſes Propoſitions de maniere qu'elles ſe ſerviſſent de preuve les unes aux autres, & qu'il y a très-bien réuſſi; mais à cela près, il y a ſi peu d'ordre dans les Matieres qu'il traite, qu'il n'en faudroit pas davantage pour accoutumer l'eſprit au déſordre & à la confuſion, comme M. Nicole l'a obſervé dans la Préface de la Géometrie de M. Arnaud. D'un autre côté, il eſt sûr auſſi que M. Arnaud, le P. Lami, M. de Malezieux, & quelques autres Modernes ont mis dans leurs Ecrits l'ordre & l'arrangement le plus naturel & le plus ſimple qu'on puiſſe ſouhaiter, & de-là il ſemble d'abord qu'on ne doive point héſiter de préferer leurs Ouvrages à celui d'Euclide, malgré la vénération que les Anciens lui ont toujours portée. Cependant comme ces Meſſieurs ont crû pouvoir ſe diſpenſer de démontrer certaines choſes qui apparemment leur paroiſſoient tomber ſur le bon ſens; d'autres Auteurs non moins

célebres qu'eux, & entr'autres M. Wolf dans le cinquiéme tome de ſes Elémens, ſe ſont récriés contre leur Méthode pour des raiſons qui ne ſont pas abſolument à mépriſer. Le véritable eſprit de la Géometrie, diſent-ils, eſt de démontrer tout ce qui n'eſt pas d'une entiere évidence, de façon que tout homme raiſonnable qui voudra y faire attention, ſoit forcé de donner ſon acquieſcement; les preuves qu'on établit ſur ce qu'on a coutume de nommer *le bon ſens*, ne ſçauroient produire cet effet. Les hommes diſputent tous les jours, & ne s'accordent preſque jamais, quoiqu'il n'y ait aucun d'entr'eux qui ne s'imagine que le bon ſens & la raiſon lui donnent gain de cauſe; il faut donc des raiſonnemens plus précis & moins vagues, pour parler en vrai Géometre, & prendre garde que les négligences que l'on commettroit en ceci, introduiroient le doute & l'incertitude dans une Science qu'on a toujours regardé comme la ſeule qui puiſſe bannir le pirrhoniſme du milieu de nos Societés. Cette diverſité de ſentimens entre tant de célebres Auteurs, m'a tenu long-tems dans la perplexité ſur le choix que je devois faire d'une Méthode; mais enfin m'étant apperçû qu'on pouvoit fort bien ſuivre l'ordre des Modernes, & démontrer avec autant & plus de rigueur qu'Euclide n'a fait, je n'ai plus balancé de prendre un parti qui doit faire marcher enſemble la force du raiſonnement & la beauté de l'ordre naturel. M. Wolf a porté ſon jugement avec trop de précipitation, lorſqu'il s'eſt avancé juſqu'à dire qu'on ne pouvoit abandonner la marche qu'Euclide a tenue, ſans abandonner en même tems la rigueur des démonſtrations. S'il avoit bien voulu y réflechir plus mûrement, l'étendue de ſon génie lui auroit bien-tôt fait voir que les négligences de nos Modernes ne ſont que de légeres taches qu'on peut fort aiſément effacer de leurs Ouvrages, ſans toucher à l'élegance de leur Méthode. Ce ſeroit après tout, une choſe bien étrange, & qui marqueroit bien la foibleſſe de l'eſprit humain, ſi pour raiſonner juſte il nous falloit abſolument paſſer des triangles aux lignes, du compoſé au ſimple, & prendre par conſéquent des routes ſi oppoſées à

celles que la Nature ne manque jamais de tenir. J'ai été bien aiſe de faire obſerver ceci, afin qu'on ne ſoit pas étonné ſi je mets au nombre des Propoſitions géometriques des choſes qui paroiſſent à bien des gens n'avoir pas beſoin d'être démontrées, parce qu'ils n'ont pas trouvé de contradicteurs. Il eſt plus difficile qu'on ne penſe de faire des Elémens de Géometrie, quand on ne veut établir d'autres ſuppoſitions, que celles qu'on ne peut abſolument conteſter; & quoiqu'en veuillent dire les Partiſans d'Euclide, le huitiéme axiome de ſes Elémens qu'on lui a toujours reproché avec raiſon, fait aſſez voir que ſa Méthode n'eſt pas ſi parfaite qu'on ne puiſſe faire mieux.

L'Etendue en longueur, largeur & profondeur, eſt l'objet de la Géometrie. Chacune de ſes dimenſions priſe à part, ſe nomme *ligne* droite ou courbe, ſelon qu'elle ſuit toujours la même route, ou qu'elle en change à tous momens en prenant à droite ou à gauche; les grandeurs compriſes ſous deux dimenſions ſe nomment *ſurfaces*, & celles qui ſont compriſes ſous les trois, ſe nomment *ſolides* ou *corps*. Pour ſuivre donc l'ordre que je me ſuis preſcrit, je conſidere d'abord les proprietés des lignes droites ſelon les différentes poſitions qu'on peut leur donner, & les différentes figures qu'elles peuvent former par leur rencontre; j'examine auſſi les rapports qu'elles ont entr'elles, ſelon les différentes manieres dont elles ſe coupent, & de-là je paſſe à la ligne circulaire qui eſt la ſeule courbe dont on traite dans la Géometrie ſimple, à cauſe que c'eſt la ſeule qu'on peut décrire avec le compas; j'en rapporte grand nombre de proprietés qu'on paſſe ordinairement ſous ſilence dans les Elémens; & ce qui m'a obligé d'en agir ainſi, c'eſt que ces proprietés aſſez curieuſes par elles-mêmes, & faciles à démontrer, peuvent conduire ſans beaucoup de peine à la connoiſſance parfaite des ſections coniques que l'on a toujours regardé comme la partie la plus abſtraite de la Géometrie, ce qui lui a donné le nom de Géometrie compoſée. Après ceci j'explique les principes de la Trigonometrie, c'eſt-à-dire, de la ſcience qui apprend à connoître les

côtés & les angles d'un triangle par la connoiſſance de quelques unes de ces choſes. Je fais voir l'uſage qu'on en peut faire ſur le terrein, pour lever des Plans & des Cartes, & pour meſurer des diſtances acceſſibles ou inacceſſibles; d'où l'on peut juger aiſément de ſon utilité pour l'Art de la Guerre, & pour les Siéges des Places où l'Aſſiegé ne permet jamais de l'aborder de trop près; enfin je termine ce qui concerne les lignes par le Nivellement.

Les ſurfaces ſont ou planes, ou courbes; les ſurfaces planes ſont celles dont toutes les parties ne baiſſent ni ne hauſſent pas plus les unes que les autres, comme la ſurface d'un miroir ordinaire, d'un plancher bien uni, &c. & les ſurfaces courbes ſont celles dont toutes les parties ne ſont pas diſpoſées, comme il vient d'être dit; telle eſt la ſurface d'une colonne, d'une boule, d'un pain de ſucre, &c. Je donne les regles qui apprennent à meſurer les ſurfaces planes, à juger de leur rapport, à leur donner différentes figures, ſans changer leur grandeur, à les diviſer en tel nombre de parties égales ou inégales, dans telle raiſon qu'on jugera à propos, & à connoître entre les ſurfaces qui ont un même circuit, quelles ſont les plus grandes. C'eſt à l'occaſion de ceci, que je fais voir qu'entre les Magaſins qui ont un même contour, ceux qui ſont faits en quarrés longs, ſont moins capables que ceux dont la figure eſt quarrée, que les quarrés contiennent moins que ceux qui ſeroient faits en polygones réguliers d'un plus grand nombre de côtés; & enfin que les ronds ont beaucoup plus de capacité que les autres, d'où j'ai inféré que pourvû que les Magaſins ronds ſoient propres aux uſages auſquels on les deſtine, on doit les préferer à tous les autres, d'autant plus que leurs voûtes étant moins expoſées au choc direct des Bombes, doivent réſiſter plus long-tems à leurs efforts.

J'ai tenu à peu près la même Méthode à l'égard des ſolides & de leurs ſurfaces, qui comprennent ce qui regarde les ſurfaces courbes, & j'en ai dit beaucoup plus ſur ces matieres, qu'on

n'a

n'a coutume d'en dire dans les Elémens où l'on ſe borne aux priſmes, aux cylindres, aux pyramides, aux cônes, & à la ſphere. Toute cette Géometrie eſt entremêlée de grand nombre de Problêmes qui joignent la théorie à la pratique, & qui épargnent à l'eſprit la contention trop forcée, qu'une longue & continuelle théorie ne manqueroit pas de lui cauſer.

Je fais ſucceder immédiatement à la Géometrie la doctrine des ſections coniques; Appollonius, & la plûpart des anciens Géometres, ont extrêmement approfondi ces courbes, & ne nous auroient rien laiſſé à déſirer, ſi la confuſion & le déſordre qui regne dans leurs Ecrits ne dégoutoient le Lecteur de la fatigante attention qu'il faudroit leur donner. La plûpart des Modernes, prévenus en faveur de l'Algebre, ſe ſont imaginés qu'il n'y avoit que cette voye pour bien traiter cette matiere, & malheureuſement il eſt arrivé, qu'à l'exception des proprietés de l'axe qu'ils ont déduites aiſément de la formation des courbes, ils n'ont pû parvenir à démontrer les autres que par des détours peu naturels & des calculs embarraſſans, dont on eſt rebuté d'autant plus qu'on ne voit qu'avec beaucoup de peine la liaiſon & l'enchaînement que la Nature a miſes entre ces proprietés. M. Deſargues eſt le premier qui s'eſt apperçû que les ſections coniques étant formées par les différentes façons dont on coupe un cône qui a pour baſe un cercle, devoient participer aux proprietés de cette figure. Son Ouvrage intitulé: *Brouillon projet d'une atteinte aux évenemens des rencontres du cône avec un plan*, a été commenté par M. de la Hire, en un Volume *in*-4°. qui a pour titre: *Nouvelle Méthode en Géometrie pour les ſections*, &c. où il traite cette matiere à fonds: mais comme ce ſçavant Géometre n'avoit pas autant de talent pour s'énoncer, qu'il en avoit pour approfondir les ſujets ſur leſquels il travailloit, & que d'ailleurs il a toujours conſideré les ſections coniques dans le ſolide où elles ſe forment, ce qui fatigue extrêmement l'attention, la plûpart des Lecteurs ont encore mieux aimé ſupporter l'ennui de la lecture d'Appollonius, ou ſurmonter les difficultés du Calcul, que

de ſe voir contraints à percer l'impénétrable obſcurité de ſes Ecrits. C'eſt ainſi que les découvertes les plus intéreſſantes tombent quelquefois dans l'oubli, par le peu de ſoin que leurs Auteurs ont eu de s'expliquer clairement. Le parti qu'il m'a ſemblé devoir prendre, a été de montrer d'abord comment il faut couper un cône pour y former les trois ſections coniques, & de quelle maniere on y découvre leur principale proprieté; de faire voir enſuite comment on peut tracer ſur un plan ces mêmes courbes, & déduire de leurs formations grand nombre d'autres vérités importantes, en n'employant preſque jamais que les proprietés du cercle dont j'ai parlé ci-deſſus. Par ce moyen, l'étude abſtraite des ſections coniques ſe change en un eſpece d'agréable amuſement très-propre à faire connoître l'admirable fécondité qui naît de l'application des principes, & l'enchaînement naturel qui ſe trouve entre les différentes parties des Mathématiques. L'expérience que j'en ai faite à l'Ecole de la Fere, parle avantageuſement en faveur de ma Méthode; il n'eſt aucun de nos Meſſieurs qui en peu de tems n'ait acquis beaucoup plus de connoiſſances ſur cette matiere, qu'il n'en avoit acquis par une longue application aux formules algebriques qui, de leur propre aveu, leur avoient inſpiré beaucoup de dégoût. Je ne m'arrêterai pas ici à faire voir l'utilité des ſections coniques, il ſuffira de dire qu'on trouve ces courbes preſque à chaque pas, dès qu'on veut pouſſer ſon étude au-delà des ſimples Elémens, & qu'en particulier l'on ne pourroit rien ſtatuer de certain ſur l'art de tirer le Canon & de jetter les Bombes ſans la connoiſſance de la parabole & de ſes proprietés.

Sur la fin de ce ſecond Livre, j'explique le Calcul du Toiſé des ſurfaces & des ſolides, & celui du Toiſé des Bois dont l'uſage eſt preſque journalier dans la plûpart de nos Arſenaux.

L'Arithmétique des Infinis dont je traite au commencement du troiſiéme Livre, eſt une extenſion de la Méthode des Indiviſibles de Cavallerius, & c'eſt elle qui a donné naiſſance à nos nouveaux Calculs, je veux dire le différentiel & l'intégral; l'objet

de cette Science appliquée à la Géometrie, eſt de trouver la meſure des ſurfaces & des ſolides, par la connoiſſance du rapport qu'ont entr'eux les Elémens dont on conçoit que ces quantités ſont compoſées; ſon étendue n'eſt pas à la vérité ſi grande que celle des nouveaux Calculs, mais elle a l'avantage d'avoir des principes plus clairs & plus commodes pour la pratique, & de plus, ſi les nouveaux Calculs vont plus loin, ce n'eſt qu'à la faveur des ſeries infinies qu'ils employent, & qui après tout, ne ſont que des approximations. J'ai reſſerré cette matiere, autant qu'il m'a été poſſible, mais comme j'y ai mis beaucoup d'exemples qui en font voir l'uſage, j'en ai aſſez dit pour qu'on puiſſe en déduire grand nombre de conſéquences qui en feront ſentir toute l'utilité.

La Méchanique en géneral, eſt la ſcience du Mouvement; elle contient les regles des différens mouvemens, la Statique, ou l'équilibre des corps ſolides, l'Hydroſtatique, ou l'équiblibre des corps ſolides plongés dans les fluides, l'Airométrie, ou la connoiſſance des différens changemens qui arrivent à l'air, & l'Hydraulique, ou les regles du mouvement des fluides. Il y a des mouvemens que je nomme *réels*, parce qu'ils exiſtent dans la Nature, & d'autres que je nomme mouvemens *ſyſtématiques*, parce que nous ne ſçavons pas s'ils exiſtent réellement, & que nous ne les connoiſſons que par les hypothèſes que quelques Auteurs ont faites pour expliquer les différens phénomenes du Monde matériel. Je n'entre point dans l'explication des mouvemens ſiſtématiques, cela me jetteroit dans des détails inutiles à nos Ecoles, & qu'il faut laiſſer aux Aſtronomes & aux Phyſiciens. Je me borne aux loix du mouvement uniforme, du mouvement uniformément accéleré ou retardé, du mouvement compoſé de deux ou pluſieurs forces uniformes, & du mouvement compoſé de deux forces, dont l'une eſt uniforme, & l'autre uniformément accélerée, ou pour mieux dire accélerante. C'eſt ſur ce dernier mouvement qu'eſt fondé l'art de jetter les Bombes, & l'on peut dire que ce ſeroit la découverte la plus belle & la plus intéreſſante

qu'on eut pû faire, ſi dans la pratique grand nombre d'accidens n'en affoibliſſoit la certitude. L'air réſiſte au mouvement du mobile avec différens degrés de force, cauſés par les altérations qu'il ſouffre, ſelon les différens degrés de chaleur, de froideur, de ſéchereſſe & d'humidité, dont il eſt ſuſceptible; les Bombes & les Mortiers, quoique coulés avec beaucoup de ſoin, ne peuvent être faits avec cette extrême juſteſſe qui empêcheroit qu'il n'en provînt aucun dérangement; la poudre eſt ſujette aux altérations de l'air, & de plus, les matieres qui la compoſent ne ſe mêlent jamais ſi bien, qu'elle puiſſe être homogene & uniforme dans toutes ſes parties, ce qui produit des inflammations plus ou moins promptes, & par conſéquent différens degrés de viteſſe dans le mobile; la manœuvre quelque attention qu'on ait, ne ſçauroit ſe faire dans la préciſion géometrique; & tous ces accidens venant à ſe combiner d'une infinité de façons, produiſent auſſi une infinité d'effets différens, que les regles de la théorie ne peuvent garantir, qu'autant qu'un Officier intelligent & habile s'applique à connoître ce qui les altere, pour parvenir plus ſurement à ſon but à travers de tant de variations. Une longue pratique, & des épreuves ſouvent réïterées, ſont ici d'une grande utilité, mais il faut prendre garde que ces épreuves étant toujours accompagnées de quelques unes des circonſtances dont on vient de parler, ne ſerviroient qu'à faire imaginer de vains ſiſtêmes, ſi l'on ne partoit d'un point fixe & aſſuré qu'on n'abandonne jamais de vûe. Pour n'avoir pas pris cette précaution, Rivaut, Tartaglia, Diego Uſano, Collado, & preſque tous les Auteurs qui ont écrit ſur l'Artillerie & ſur les portées des pieces, nous ont débité de groſſieres erreurs qui auroient peut-être encore aujourd'hui des Partiſans, ſi M. Blondel dans ſon excellent Traité de l'art de jetter les Bombes, n'en avoit découvert toute la fauſſeté; de toutes les voyes qui peuvent conduire à la connoiſſance du vrai, il n'en eſt point de plus ſuſpectes que celle des expériences, leurs effets ſe montrent aux yeux, mais les cauſes qui les produiſent ſont un peu plus enveloppées, & ne ſe décou-

vrent pas aiſément; cependant on veut raiſonner, & avoir la gloire de la découverte; on forme donc des conjectures, ſans ſe donner le tems d'examiner toutes les circonſtances, les conjectures menent au ſiſtême, & le ſiſtême une fois imaginé, on l'expoſe aux yeux du Public; l'adreſſe conſiſte à le préſenter du plus beau côté, à diſſimuler ce qu'il y a de foible, & à mettre ſouvent ſur le tapis le petit détail des expériences, moyennant cela on éblouit les eſprits peu éclairés, la préſomption fait les ſiſtêmes, & l'ignorance trop crédule les adopte. Mais qu'arrive-t'il? la vérité prend enfin le deſſus, la chimere ſe diſſipe & s'évanouit, & la confuſion en reſte à l'Auteur & à ſes Partiſans, qui ſont tous étonnés d'avoir été ſéduits. La Nature eſt un eſpece de Protée, bien différent de celui qu'Homere nous dépeint ſi agréablement. Il faut la ſuivre ſans relâche, éclairer ſes démarches, & la ſerrer de près; mais dès qu'on veut la garotter, & l'aſſujettir à des raiſonnemens toujours bornés, elle s'échappe, & par cent nouvelles transformations elle ſemble ſe faire un plaiſir de nous faire voir, qu'il s'en faut de beaucoup que nous ne la ſaiſiſſions. Les nouveautés en fait d'Artillerie ſont ſouvent ſi pernicieuſes à l'Etat, qu'on ne ſçauroit être trop ſur ſes gardes pour n'en produire que de la bonne façon.

Il ſe trouve toujours entre pluſieurs corps, ou entre les parties d'un même corps, un point qu'on nomme centre d'équilibre, lorſqu'il s'agit de pluſieurs corps, & centre de gravité, lorſqu'il eſt queſtion des parties d'un même corps. Sa proprieté conſiſte en ce que les corps, ou les parties d'un même corps, ſe tiennent en équilibre autour de lui, dès qu'il n'a point de mouvement. Je commence la Statique, par la recherche de ces ſortes de points; je fais voir leur utilité pour la connoiſſance des forces mouvantes, & les avantages qui en proviennent à la Géometrie, depuis que le P. Guldin Jéſuite a découvert, qu'il ſuffiſoit de connoître le centre de gravité d'une figure plane, & la valeur de cette figure, pour connoître aiſément le ſolide qu'elle produit, lorſqu'elle tourne autour d'une ligne priſe pour axe de mouvement.

Cette Méthode s'étend auſſi à la meſure de tous les onglets ou priſmes tronqués, & c'eſt pour cette raiſon que je me ſuis arrêté beaucoup à chercher les centres de gravité de grand nombre de ſurfaces planes. De-là je paſſe à ce qui concerne l'équilibre des corps qui ſont ſur des plans inclinés, & de ceux qui ſe ſoutiennent avec des cordes; & je viens enfin à l'explication des différentes machines. Je n'en rapporte qu'un certain nombre telles que ſont les différentes eſpeces de leviers, la Balance Romaine, la Balance ordinaire, la Poulie, les Mouffles, la Roue dans ſon aiſſieu, les Roues dentées, la Chevre, la Vis & le Coin; mais ce que j'enſeigne touchant la maniere de calculer le rapport de la puiſſance au poids dans celles-ci, ſervira également pour le calcul des Machines plus compoſées, qui n'en ſont que des répétitions & des différentes combinaiſons.

Dans l'Hydroſtatique, on apprendra à connoître ce que c'eſt que la maſſe d'un corps, ſon volume, ſa denſité, ſa peſanteur abſolue & ſa peſanteur ſpécifique, comment on trouve les peſanteurs ſpécifiques des fluides & des ſolides, ce qui ſe paſſe lorſqu'un corps eſt plongé dans un fluide qui a plus ou moins de peſanteur ſpécifique que lui; de quelle maniere on peut faire flotter un corps qui devoit naturellement aller à fonds, & en faire enfoncer un autre qui devroit ſurnager. Ces connoiſſances ſont fort utiles pour l'Art de la Guerre: on eſt ſouvent obligé de faire paſſer une Armée ſur des Ponts jettés ſur une riviere, de tranſporter des Equipages, des Canons & des Mortiers ſur des batteaux; il eſt donc à propos de connoître ce que ces Ponts peuvent ſupporter, la charge qu'on peut mettre dans les batteaux ſans les faire ſubmerger, & le moyen de les élever ſur l'eau, lorſque par quelque accident ils ſont coulés à fonds.

L'Airométrie traite des proprietés de l'air, de ſa peſanteur, de ſon reſſort, de ſon mouvement, & des différentes condenſations & raréfactions que cauſent dans lui le froid, le chaud, l'humidité, la ſechereſſe, & les vapeurs & exhalaiſons qui ſortent du ſein de la Terre. Les Inſtrumens dont on ſe ſert pour juger plus

aiſément de la plûpart de ces choſes, ſont le Barométre, le Thermométre, le Manométre & l'Hygrométre; mais comme c'eſt encore ici une matiere de Phyſique, où la varieté des accidens peut dérouter la plus fine théorie, il faut être attentif à ne rien ſtatuer avec trop de précipitation ſur la foi de ces Inſtrumens, ni des expériences qu'on pourroit avoir faites.

Dans l'Hydraulique enfin, j'explique quelle eſt la nature du mouvement de l'eau, comment on peut calculer la dépenſe qui s'en fait par l'orifice d'un vaſe ou par le pertuis d'une riviere ou d'un canal; de quelle maniere on peut ſe ſervir utilement de l'air pour élever l'eau au-deſſus de ſon niveau, ce qui renferme l'explication des Machines hydrauliques, & la façon de calculer la réſiſtance que l'eau oppoſe aux corps ſolides.

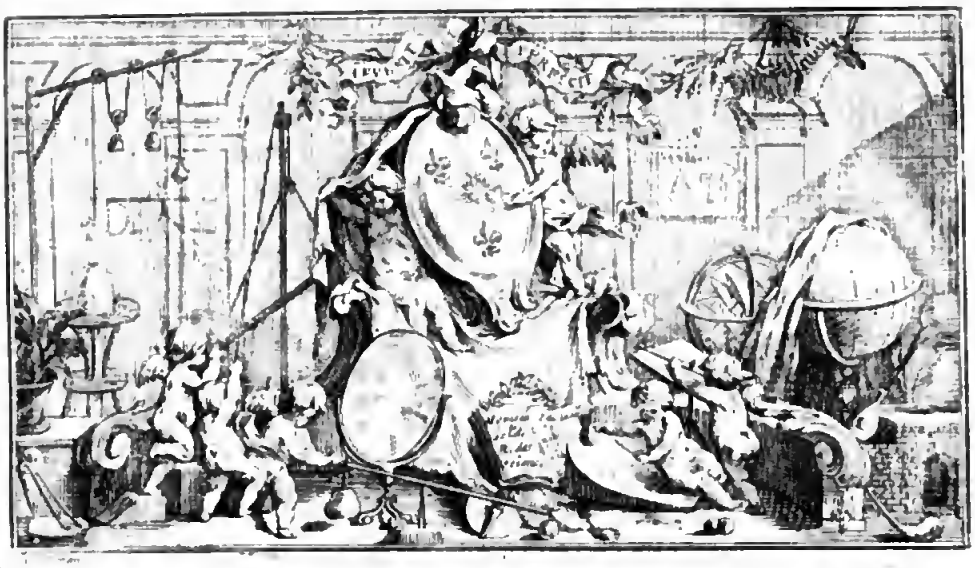
Les regles de la Perſpective ſont ſi propres non-ſeulement à donner le goût & la délicateſſe du deſſein, mais encore à former ce coup d'œil qu'on eſtime tant & avec raiſon dans les Gens de Guerre, que j'ai crû devoir en compoſer un petit Traité qu'on trouvera à la fin de cet Ouvrage. Je n'y ai rien dit d'abſolument nouveau, la choſe n'étoit guéres poſſible; tout a été dit ſur cette matiere. Mais je m'y ſuis attaché à ſimplifier les principes, à les réduire en moindre nombre, & à leur donner tant de clarté, qu'il n'eſt beſoin pour les entendre que d'avoir une légere teinture des Elémens de la plus ſimple Géometrie. J'eſpere que ceux qui liront cet Ouvrage conviendront aiſément que je ſuis parvenu au but que je m'étois propoſé.

Il ſemble qu'avant de finir ce Cours de Mathématique j'aurois dû y ajouter des réflexions & des maximes ſur la Conſtruction, l'Attaque, & la Défenſe des Places; mais comme ce ſujet demande d'être traité avec une certaine étendue, & que d'ailleurs je viens de donner au Public une ſeconde Edition du *Parfait Ingénieur François*, où je n'ai rien omis de tout ce qu'on pouvoit ſouhaiter là-deſſus, j'ai crû qu'il valoit mieux y renvoyer le Lecteur, que de groſſir ce Traité par des matieres trop reſſerrées, & qui par conſéquent n'auroient pû être d'une grande utilité.

Digitized by Google

Au reſte, cet Ouvrage eſt bien éloigné d'être un Abregé de mon Cours en cinq Volumes. Il s'y trouve bien des choſes que mon Cours ne renferme point, de même que le Cours en renferme grand nombre d'autres que j'ai paſſé ſous ſilence dans ce Volume pour les raiſons que j'ai rapportées ci-deſſus; quant à celles qui ſont communes à l'un & à l'autre, elles ſont traitées ici d'une maniere toute différente, ce qu'on verra aiſément dans la Géomerrie, dans les ſections coniques, &c. Un Auteur qui ne ceſſe de travailler, ne peut manquer d'avoir des nouvelles idées, & d'acquérir des connoiſſances qu'il n'avoit pas auparavant. C'eſt donc ici un eſpece de ſupplément à mes autres Ecrits; & ce ſupplément ne peut manquer d'être d'une grande utilité pour ceux mêmes qui auront lû, ou qui feront bien aiſes de lire ces Ouvrages.

ELEMENS



ELEMENS
DES PRINCIPALES PARTIES DES MATHEMATIQUES.

LIVRE PREMIER;

Contenant les Elemens de l'Arithmétique & de l'Algebre.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

1. L'ARITHMETIQUE eſt la Science des Nombres, ou l'Art de compter.

2. Cette Science étant extrêmement néceſſaire dans l'uſage de la vie, il n'eſt point de Nation qui n'ait imaginé des caracteres pour exprimer les différens nombres, & pour faire aiſément les Calculs; mais ceux que les Arabes ont inventé ayant paru les plus commodes, ont enfin emporté le deſſus, & il y a déja long-tems que tous les Peuples de l'Europe s'en ſervent non-ſeulement dans

le Commerce, mais encore dans ce qui concerne les Sciences & les beaux Arts.

3. Ces caracteres ſont au nombre de dix tels qu'on les voit ici. Les neuf premiers expriment les neuf premiers nombres, c'eſt-à-dire, *Un*, *Deux*, *Trois*, *&c.* & s'appellent *Unités*, parce que chacun pris ſolitairement n'exprime que des unités. Le caractere 6, par exemple, marque ſix unités, & ainſi des autres. Le dernier caractere o qu'on nomme *zero*, ne ſignifie rien par lui-même, mais dès qu'il eſt joint avec les autres, il eſt d'une grande utilité, comme on le verra bientôt.

1, *Un*
2, *Deux*
3, *Trois*
4, *Quatre*
5, *Cinq*
6, *Six*
7, *Sept*
8, *Huit*
9, *Neuf*
0, *Zero*

4. Lorſqu'on écrit ſur une même ligne pluſieurs des caracteres dont nous venons de parler, alors leur valeur change ſelon le rang qu'ils occupent. Le premier à droite vaut toujours des unités; le ſecond en tirant vers la gauche vaut des dixaines, c'eſt-à-dire, dix fois plus qu'il ne vaudroit s'il étoit ſeul; le troiſiéme devient encore dix fois plus grand, & vaut par conſéquent des centaines, puiſque dix fois dix font cent; le quatriéme augmente encore ſa valeur de dix fois plus, & vaut des mille, parce que dix fois cent font mille; le cinquiéme par la même raiſon vaut des dixaines de mille; le ſixiéme des centaines de mille; le ſeptiéme des millions, & ainſi de ſuite, augmentant toujours les valeurs de dix fois plus, comme on voit dans la Table ſuivante.

Trillions.	Centaines de millions de billions.	Dixaines de millions de billions.	Millions de billions.	Centaines de mille de billions.	Dixaines de mille de billions.	Mille de billions.	Centaines de billions.	Dixaines de billions.	Billions.	Centaines de millions de milliards.	Dixaines de millions de milliards.	Millions de milliards.	Centaines de mille de milliards.	Dixaines de mille de milliards.	Mille de milliards.	Centaines de milliards.	Dixaines de milliards.	Milliards.	Centaines de millions.	Dixaines de millions.	Millions.	Centaines de mille.	Dixaines de mille.	Mille.	Centaines.	Dixaines.	Unités.
4	5	6	3	5	2	1	6	8	7	5	6	3	2	4	5	3	9	5	4	2	5	7	8	2	3	7	5

Si on vouloit continuer cette ſuite au-delà des Trillions, on nommeroit les caracteres ſuivans, dixaines de trillions, centaines de trillions, mille de trillions, dixaines de mille de trillions, centaines de mille de trillions, millions de trillions, dixaines de millions de trillions, centaines de millions de trillions, quadrillions, & ainſi des autres à l'infini.

5. Au moyen de ceci, il eſt facile de ſupputer & d'écrire tel nombre que l'on voudra. Soit, par exemple, le nombre 7856795 3, je nomme le premier caractere à droite *unités*, le ſecond en tirant vers la gauche *dixaines*, le troiſiéme *centaines*, le quatriéme *mille*, le cinquiéme *dixaines de mille*, le ſixiéme *centaines de mille*, le ſeptiéme *millions*, & enfin le huitiéme *dixaines de millions*, ce qui me fait voir qu'en revenant de gauche à droite, le nombre contient ſept dixaines de millions, ou ſoixante-dix millions, huit millions, cinq cens mille, ſix dixaines de mille, ou ſoixante mille, ſept mille, neuf cens, cinq dixaines d'unités, ou cinquante & trois; d'où j'infere que ce nombre vaut en tout ſoixante dix-huit millions cinq cens ſoixante-ſept mille neuf cens cinquante-trois.

Que ſi le nombre propoſé contenoit un ou pluſieurs zeros, cela ſignifieroit que ce nombre ne contiendroit point les quantités dont les zeros occupent la place; par exemple, dans le nombre 780004, on verroit en allant de droite à gauche, que ce nombre contient quatre unités, point de dixaines, point de centaines, point de mille, huit dixaines de mille, & ſept centaines de mille, & par conſéquent en revenant de gauche à droite, on diroit que ce nombre contient ſept cens quatre-vingt mille & quatre unités.

De même, ſi on vouloit écrire le nombre trois millions ſix cens quarante-trois mille ſept cens cinquante-deux, on écriroit d'abord un 3 pour les trois millions, puis en allant de gauche à droite, on écriroit un 6 pour les ſix cens mille, un 4 pour les quarante mille, un 3 pour les trois mille, un 7 pour les ſept cens, un 5 pour les 50, un 2 pour les deux unités, & l'on auroit 3643752 qui exprimeroit le nombre demandé.

Que ſi le nombre propoſé étoit deux millions quarante mille trois cens trente; on écriroit d'abord un 2 pour deux millions, enſuite en venant de gauche à droite, on mettroit un zero, parce que le nombre propoſé ne contient point de centaines de mille, enſuite un 4 pour les quarante-mille, puis un zero, parce que le nombre propoſé ne contient point d'unités de mille, puis un 3 pour les trois cens, enſuite un 3 pour les trente, & enfin un 0, parce que le nombre propoſé ne contient point d'unités, & l'on auroit 2040330, & ainſi des autres; d'où l'on voit que le zero en occupant la place des quantités qu'un nombre ne contient pas, conſerve le rang, & par conſéquent la valeur de celles qu'il contient.

Voilà en quoi conſiſte tout l'artifice des caracteres arabes, artifice qu'on peut regarder comme l'une des plus belles inventions

de l'eſprit humain, puiſqu'au moyen de dix caracteres très-ſimples, on vient à bout non-ſeulement d'écrire très-aiſément toute ſorte de nombre, mais encore de les augmenter, les multiplier, & faire en un mot toutes les opérations néceſſaires dans les différens cas qui peuvent ſe préſenter.

6. Les nombres en eux-mêmes ſont des idées abſtraites qui ont à la vérité une valeur fixe & conſtante, mais qui ne ſignifient rien de déterminé. Par exemple, le nombre 20 vaut toujours vingt unités, ou deux dixaines, mais il ne ſignifie pas plus vingt hommes, que vingt chevaux, ou vingt écus, &c. C'eſt pourquoi quand on veut déterminer la ſignification des nombres, il faut néceſſairement écrire après eux ce qu'on veut qu'ils ſignifient; pour dire 20 loüis, il faut non-ſeulement écrire 20, mais encore il faut écrire le mot de loüis, & ainſi des autres.

7. Les nombres dont la ſignification eſt déterminée peuvent être ou de *même eſpece*, ou de *différente eſpece*, ſelon que les choſes qu'ils ſignifient ſont de même nature ou de différente nature. 9 écus, & 8 écus ſont des nombres de *même eſpece*; 9 écus & 9 toiſes ſont des nombres de *différente eſpece*.

8. L'uſage a voulu qu'on ait fait des diviſions & des ſou-diviſions de certaines choſes; par exemple, on a diviſé la livre en 20 parties nommées ſols, & le ſol en 12 parties nommées deniers. De même, on a diviſé la toiſe en ſix parties ou pieds, le pied en 12 parties ou pouces, le pouce en 12 parties ou lignes, & la ligne en 12 parties nommées points, & ainſi de grand nombre d'autres choſes. Ces ſou-diviſions ſe nomment *ſous-eſpeces*; quand on dit, une livre ſix ſols quatre deniers, les ſix ſols quatre deniers ſont des ſous-eſpeces de la livre.

9. Tout nombre, ſoit que ſa ſignification ſoit déterminée, ou qu'elle ne le ſoit pas, eſt ou *entier*, ou *rompu*, autrement dit *fraction*. Un nombre *entier* eſt un nombre qui par lui-même ne nous donne point l'idée d'un tout dont il faſſe partie; l'unité & tous les nombres au-deſſus de l'unité ſont de cette nature; car quand on dit par exemple 2 ou 2 écus, ce nombre 2 ne nous préſente l'idée que de deux unités ou de deux écus ſans aucun rapport à quelque autre nombre dont ces deux unités ou ces deux écus faſſent partie: au contraire le nombre *rompu*, ou la *fraction* eſt un nombre qui porte avec lui l'idée d'un tout dont ce nombre n'eſt qu'une partie; de cette eſpece ſont tous les nombres qu'on nomme un *tiers*, un *quart*, un *cinquiéme*, un *ſixiéme*, &c. car ces nombres

nous préſentent toujours l'idée d'un *tout* plus grand qu'eux.

Delà il ſuit qu'une fraction proprement dite eſt toujours moindre que le tout ou l'entier dont elle eſt partie, & que ſi quelquefois on ſe ſert de ces façons de parler, *trois moitiés*, *quatre tiers*, &c. qui expriment des nombres plus grands que leur tout; ces ſortes de fractions ſont des fractions *improprement dites*; car au lieu de dire trois moitiés, on devroit dire à proprement parler un & demi, puiſque trois moitiés ſont la même choſe que deux moitiés; c'eſt-à-dire l'entier ou le tout, plus la moitié d'un entier, & ainſi des autres.

10. Les nombres ſe diviſent encore en nombres *ſimples* & en nombres *compoſés*, le nombre *ſimple* eſt celui qui ne contient que des choſes de la même eſpece; 20 unités ou 20 écus eſt un nombre ſimple, parce qu'il ne contient que 20 unités de même nature, ou 20 écus; de même trois quarts eſt un nombre ſimple, parce qu'il contient des parties d'un tout de même eſpece. Le nombre *compoſé* eſt un nombre qui contient des *ſous-eſpeces*; 20 & un quart eſt un nombre compoſé, à cauſe qu'il contient vingt unités, & un quart d'unité ou une ſou-diviſion d'unité. De même, 20 livres 4 ſols eſt un nombre compoſé, puiſqu'outre les livres il contient des ſols, c'eſt-à-dire des ſous-eſpeces de la livre. Au reſte, il faut prendre garde qu'on ne doit appeller nombre *compoſé*, que ceux qui ſont compoſés d'eſpeces & de ſous-eſpeces, ou d'unités & & de fractions de ces mêmes unités; 20 écus & 3 toiſes ne ſont pas un nombre compoſé, non plus que 20 ſols & trois quarts de toiſes.

11. Les principales operations de l'Arithmétique ſont l'*Addition*, la *Souſtraction*, la *Multiplication*, & la *Diviſion*.

Ajouter, c'eſt faire un tout de deux ou pluſieurs nombres de même eſpece; ce tout ſe nomme *Somme*.

Souſtraire, c'eſt retrancher un nombre d'un autre de même eſpece; ce qui reſte après l'opération ſe nomme *Reſte* ou *Différence*, parce que la différence de deux nombres inégaux, n'eſt autre choſe que ce qui reſte, lorſqu'on a retranché le plus petit du plus grand.

Multiplier, c'eſt prendre un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui le multiplie. Quand on multiplie 2 par 3, on prend deux autant de fois qu'il y a d'unités dans trois, c'eſt-à-dire, on le prend trois fois; le nombre 2 ſe nomme le *Multiplicande*, le nombre 3 le *Multiplicateur*, & le nombre 6 qui

provient de cette Multiplication ſe nomme le *Produit.* Il eſt indifférent de prendre le Multiplicande pour le Multiplicateur, ou le Multiplicateur pour le Multiplicande; car il eſt viſible que ſi l'on multiplie 2 par 3, ou 3 par 2, le Produit ſera toujours 6.

Diviſer, c'eſt retrancher un nombre d'un autre autant de fois qu'il y eſt contenu. Quand on diviſe 6 par 2, on cherche combien de fois 2 eſt contenu dans 6, le nombre 6 ſe nomme le *Dividende* le nombre 2 ſe nomme *Diviſeur*, & le nombre 3 qui marque combien de fois le Diviſeur 2 eſt contenu dans le Dividende 6, ſe nomme le *Quotient.*

12. Ces quatre opérations peuvent ſe faire ſur les nombres entiers, ſur les nombres rompus, ſur les nombres ſimples, & ſur les nombres compoſés. Nous allons expliquer dans le Chapitre ſuivant l'Addition & la Souſtraction des nombres entiers ſimples, & compoſés, la Multiplication & la Diviſion des nombres entiers ſimples, après quoi nous parlerons dans les Chapitres ſuivans de la maniere de faire les mêmes opérations ſur les fractions, & de la Multiplication & Diviſion compoſée.

Axiôme.

13. Un *Tout* eſt égal à ſes parties priſes enſemble. Les parties du nombre 5 ſont 2 & 3; il eſt viſible qu'en ajoutant enſemble 2 & 3, on aura 5 égal au nombre 5 qui eſt compoſé de ces deux parties.

CHAPITRE SECOND.

Contenant l'explication des quatre premieres Regles d'Arithmétique.

Addition simple.

14. POUR ajouter enſemble pluſieurs grandeurs ſimples, on les écrit les unes ſous les autres en mettant les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c. après quoi on opére comme on va voir dans l'Exemple ſuivant.

EXEMPLE. *Il y a dans une Armée 4538 hommes d'Infanterie, 1519 Carabiniers, 3323 Cavaliers, & 2242 Dragons, on demande combien il y a d'hommes en tout.*

J'écris tous ces nombres les uns ſous les autres, comme il vient d'être dit, après quoi commençant par la colonne à droite,

j'ajoute tous les nombres qu'elle contient, en diſant : 8 & 9 ſont 17 & 3 ſont 20 & 2 ſont 22, c'eſt-à-dire deux dixaines & deux unités, & comme cette colonne ne peut contenir que des unités, je mene une ligne par-deſſous, & j'écris 2 ſous cette colonne, tranſportant les deux dixaines à la colonne ſuivante.

4538 *Fantaſſins.*
1519 *Carabiniers.*
3323 *Cavaliers.*
2242 *Dragons.*

Somme 11622 *Hommes.*

Je viens donc à la colonne ſuivante, & je dis : 2 que je tranſporte & 3 ſont 5 & 1 ſont 6 & 2 ſont 8 & 4 ſont 12, c'eſt-à-dire douze dixaines, ou cent & deux dixaines, & comme cette colonne ne peut contenir que des dixaines, j'écris par-deſſous 2, ou deux dixaines, & je tranſporte une centaine à la colonne ſuivante.

Je paſſe à cette troiſiéme colonne, & je dis : 1 que je tranſporte & 5 ſont 6 & 5 ſont 11 & 3 ſont 14 & 2 ſont 16, c'eſt-à-dire 16 centaines, ou un mille & ſix centaines, & comme cette colonne ne peut contenir que des centaines, j'écris par-deſſous 6, & je tranſporte un mille à la colonne ſuivante.

Je dis donc 1 & 4 ſont 5 & 1 ſont 6 & 3 ſont 9 & 2 ſont 11, c'eſt-à-dire onze mille, ou une dixaine de mille & un mille, j'écris 1 ſous cette colonne, & j'avance 1 ou une dixaine de mille vers la gauche, & la ſomme totale eſt 11622.

La Démonſtration de ceci eſt évidente par elle-même ; car il eſt viſible qu'en opérant comme j'ai fait, j'ai formé un tout qui comprend tous les nombres propoſés ; or le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble (*N.* 13.) donc le tout que j'ai trouvé eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

15. On donne pluſieurs manieres de faire la preuve de l'Addition, c'eſt-à-dire, de voir ſi on ne s'eſt point trompé ; mais la meilleure eſt de recommencer de nouveau, non plus en ajoutant chaque colonne de haut en bas, comme nous avons fait, mais de bas en haut : on dira donc 2 & 3 ſont 5 & 9 ſont 14 & 8 ſont 22 ; ainſi on verra qu'on ne s'eſt pas trompé en écrivant 2 ſous cette colonne, & en tranſportant deux dixaine à la colone ſuivante, & continuant de la même façon, on découvrira aiſément ſi on a commis quelque erreur.

ADDITION COMPOSE'E.

16. L'Addition compoſée ſe fait en écrivant d'abord chaque

ſous-eſpece ſous la ſous-eſpece ſemblable, après quoi on opere comme on va voir.

EXEMPLE. *Un homme a reçu de l'un de ſes créanciers 365 livres 15 ſols 11 deniers, d'un autre 432 livres 14 ſols 10 deniers, d'un troiſiéme 534 livres 19 ſols 9 deniers, & d'un quatriéme 635 liv. 18 ſols 10 deniers, combien a-t'il reçu en tout?*

	365#	15 ſols	11 den.
	432	14	10.
	534	19	9.
	635	18	10.
Somme	1969#	9 ſols	4 den.

Après avoir écrit ces nombres les uns ſous les autres comme on voit ici, je commence par les deniers, & comme il en faut 12 pour faire un ſol, je dis: 11 & 10 font 21, c'eſt-à-dire un ſol & neuf deniers, je mets un point à côté du dix pour marquer que j'ai un ſol, & je continue en diſant: 9 deniers que j'ai au-deſſus d'un ſol, & 9 qui viennent après font 18, c'eſt-à-dire un ſol & 6 deniers, je mets un point à côté du 9, pour marquer que j'ai encore un ſol, & je dis: 6 deniers que j'ai au-deſſus d'un ſol & 10 font 16, ou un ſol quatre deniers, je mets un point à côté du 10, & j'écris 4 au-deſſous de la ligne.

Les trois points que j'ai marqué me faiſant voir que j'ai trois ſols, je porte ces trois ſols au rang des ſols, & je dis: 3 & 5 font 8 & 4 font 12 & 9 font 21 & 8 font 29, ou deux dixaines & neuf ſols, j'écris 9 ſous la ligne, & je porte 2 au rang des dixaines, en diſant: 2 & 1 font 3 & 1 font 4 & 1 font 5 & 1 font 6 dixaines; or il en faut 2 pour faire une livre, je prens donc la moitié de 6 qui eſt 3, & par conſéquent j'ai trois livres, & comme il ne me reſte point de dixaines, je n'écris rien ſous le rang des dixaines de ſols.

Je porte mes 3 livres au rang des livres, en diſant: 3 & 5 font 8 & 2 font 10, &c. & achevant le reſte comme dans l'exemple précédent, j'ai la ſomme totale demandée.

Si au lieu de 6 dixaines de ſols, j'avois eu un nombre impair comme 7. J'aurois pris la moitié de 7 qui eſt 3 livres, & par conſéquent j'aurois porté 3 au rang des livres, mais comme il me ſeroit reſté une dixaine, j'aurois écrit 1 ſous le rang des dixaines de ſols.

Tout ceci n'a pas beſoin de Démonſtration.

SOUSTRACTION

SOUSTRACTION SIMPLE.

17. Ier. EXEMPLE. *Il y a dans une Place 9586 hommes, on veut en faire ſortir 4374, combien en reſtera-t'il ?*

J'écris le plus petit nombre ſous le grand, en mettant les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, &c. & tirant une ligne par-deſſous, je commence à droite, & je dis : de 6 retranchez 4, il reſte 2 que j'écris ſous la ligne ; de 8 retranchez 7, il reſte 1 que j'écris de même, & agiſſant de la même façon aux autres colonnes, je trouve qu'il reſtera 5212 hommes dans la Place.

9586	
4374	
5212	*Reſte.*
9586	*Preuve.*

18. Pour faire la preuve, j'ajoute enſemble le reſte avec le nombre des hommes qu'on veut faire ſortir, & ſi la ſomme ſe trouve égale au nombre total d'hommes qui étoit dans la Place, la regle eſt juſte, puiſqu'il eſt évident que la ſomme totale n'eſt autre choſe que le nombre des hommes qui ſortent joint au nombre de ceux qui reſtent.

De même que l'Addition ſert de preuve à la Souſtraction, de même auſſi la Souſtraction ſert de preuve à l'Addition ; car ſi dans l'exemple que nous venons de donner les 4374 hommes qui doivent ſortir, joints aux 5212 qui doivent reſter, font véritablement la ſomme de 9586 ; il eſt clair qu'en retranchant de cette ſomme le nombre 4374, le reſte doit être 5212, & de même ſi on retranche de cette même ſomme 9586, le nombre 5212, le reſte doit être 4374 ; donc ſi en faiſant l'une ou l'autre de ces Souſtractions, on ne retrouve pas l'un ou l'autre de ces deux reſtes, ce ſera une marque que l'Addition aura été mal faite.

II. EXEMPLE. *Un homme a reçu d'une part 70082 livres, & de l'autre il a payé 58765 livres, combien lui reſte-t'il ?*

J'écris ces nombres comme il vient d'être dit ; enſuite je dis : de 2 retranchez 5, cela ne ſe peut ; c'eſt pourquoi j'emprunte une dixaine au rang des dixaines, & je mets un point ſur le 8, pour marquer qu'il ne vaudra plus que 7 ; je dis donc une dixaine que j'ai emprunté & deux unités font 12 unités, & de 12 retranchez 5 il reſte 7 que j'écris ſous la ligne ; je paſſe aux dixaines en diſant : de 7 ôtez 6, il reſte 1 que j'écris ; enſuite de 0 retranchez 7, cela ne ſe peut :

70082*	
58765*	
11317*	

c'eſt pourquoi j'emprunte une unité du rang ſuivant ; mais comme il n'en a point, je paſſe à l'autre ſur lequel je mets un point ; or les unités de ce rang valent des dixaines de mille, ainſi l'unité que j'ai emprunté vaut dix mille, mais dix mille eſt trop grand pour retrancher 7, c'eſt-à-dire 7 centaines dans le rang où je dois opérer, c'eſt pourquoi je laiſſe 9 mille ſur le rang des mille, en mettant un point ſur le zero de ce rang, pour marquer que ce zero vaudra neuf, & il ne me reſte plus qu'un mille ou dix centaines ; je dis donc de 10 centaines ôtez 7, il reſte 3 que j'écris ſous la ligne ; enſuite de 9 ôtez 8, il reſte 1, & enfin de 6 ôtez 5, il reſte 1, & par conſéquent il reſte à cet homme 11317 livres. La regle eſt donc lorſqu'il ſe trouve pluſieurs zeros dans les rangs où l'on veut emprunter, de paſſer juſqu'au rang où il ſe trouve des unités, & de mettre des points ſur ce rang & ſur les zeros de ceux où on n'a pas pû emprunter, & faire valoir 9 chacun de ces zeros.

Ainſi pour retrancher 3542 de 6001, on dira d'abord ; de 1 ôtez 2, cela ne ſe peut, on empruntera donc une dixaine ; mais le rang des dixaines n'en ayant point non plus que celui des centaines, on paſſera au rang des mille, & l'on empruntera un mille ou 10 centaines, & comme dix centaines ſont trop grandes pour ne retrancher que 2 unités, on laiſſera 9 centaines au rang des centaines, & de la centaine reſtante on laiſſera 9 dixaines au rang des dixaines, & il ne reſtera plus qu'une dixaine, laquelle jointe à l'unité qu'on a, fera 11 ; on dira donc : de 11 ôtez 2, il reſte 9 ; de 9 ôtez 4, il reſte 5 ; de 9 ôtez 5, il reſte 4, & de 5 ôtez 3, il reſte 2.

...
6001
3542
2459

SOUSTRACTION COMPOSE'E.

19. Ier. EXEMPLE. *Sur 986 livres 15 ſols 8 deniers, on veut payer 754 livres 9 ſols 6 deniers, que reſtera-t'il?*

J'écris le moindre nombre ſous le plus grand, les deniers ſous les deniers, les ſols ſous les ſols, &c. & je dis : de 8 deniers ôtez 6, il reſte 2 ; de 15 ſols ôtez 9, il reſte 6 ; de 6 livres ôtez 4, il reſte 2, & achevant le reſte de même que dans la Souſtraction ſimple, je trouve qu'il reſtera 232 livres 6 ſols 2 deniers.

986#	15 ſols	8 den.
754#	9 ſols	6 den.
232#	6 ſols	2 den.

II. EXEMPLE. *De 9600 livres, 8 ſols, 6 deniers, on veut ôter 7564 livres 12 ſols 10 deniers, quel ſera le reſte?*

Après avoir écrit ces deux nombres à la maniere accoutumée, je dis: de 6 deniers ôtez 10, cela ne ſe peut, j'emprunte un ſol au rang des ſols, ce qui fait 12 deniers & ſix que j'ai font 18, & de 18 ôtez 10, il reſte 8.

9600#	8 ſols	6 den.
7564#	12 ſols	10 den.
2035#	15 ſols	8 den.

Je paſſe au rang des ſols, & comme de 7 on ne peut ôter 12, j'emprunte une livre ou 20 ſols au rang des unités de livres, mais ce rang n'en ayant point non plus que les dixaines, j'emprunte un cent au rang des centaines où je mets un point; de cette centaine je laiſſe 9 dixaines au rang des dixaines, en mettant un point ſur le zero pour marquer qu'il vaudra 9; de la dixaine reſtante, je laiſſe 9 unités en mettant un point ſur le zero de ce rang, & il me reſte une unité de livres, ou 20 ſols, leſquels, joints au 7 que j'ai déja font 27, & de 27 ôtez 12 il reſte 15.

Je paſſe aux livres, en diſant: de 9 ôtez 4 il reſte 5; de 9 ôtez 6 il reſte 3; de 5 ôtez 5 il reſte 0, & de 9 ôtez 7, il reſte 2.

III. EXEMPLE. *Un homme doit 90000 livres, il en paye 75432 liv. 12 ſols 6 deniers, que lui reſte-t'il encore à payer?*

J'écris les deux nombres à la façon ordinaire, & comme dans le nombre ſupérieur il n'y a ni ſols, ni deniers, ni unités de livres, ni dixaines, ni centaines, ni mille, j'emprunte ſur le 9 une dixaine de mille; de cette dixaine j'en laiſſe 9 mille ſur les mille, en mettant un point ſur le zero de ce rang; du mille reſtant je laiſſe 9 centaines ſur le rang des centaines, en mettant un point ſur le zero de ce rang; de la centaine reſtante je laiſſe 9 dixaines ſur le rang des dixaines, en mettant un point ſur le zero; de la dixaine reſtante je laiſſe 9 unités au rang des unités en mettant un point ſur ſon zero, & il me reſte une livre ou 20 ſols; or pour paſſer aux deniers, je n'ai beſoin que d'un ſol ou de 12 deniers, c'eſt pourquoi je laiſſe 19 au rang des ſols, ce que je marque en y mettant un point; après quoi je dis de 1 ſol qui me reſte ou de 12 deniers ôtez 6 il reſte 6; de 19 ſols ôtez 12, il reſte 7; de 9 livres ôtez 2, il reſte 7; de 9 ôtez 3, il reſte 6; de 9 ôtez 4, il reſte 5; de 9 ôtez 5, il reſte 4; & de 8 ôtez 7, il reſte 1; donc cet homme eſt encore redevable de 14567 livres 7 ſols 6 deniers.

90000#	ſols	den.
75432#	12 ſols	6 den.
14567#	7 ſols	6 den.

MULTIPLICATION SIMPLE.

20. Ier. EXEMPLE. *36 aunes d'étoffe à 4 livres l'aune, combien valent-elles?*

Puiſque chaque aune vaut 4 livres, 36 aunes vaudront 4 fois 36, c'eſt-à-dire, il faudra prendre 36 quatre fois, ou autant de fois qu'il y a d'unités dans 4; donc c'eſt ici une Multiplication. (*N.* 11.)

J'écris d'abord le nombre 36 aunes qui eſt le nombre à multiplier, & par-deſſous j'écris le multiplicateur 4 ſous les unités 6 du nombre 36; enſuite je mene une ligne, & je dis: 4 fois 6 font 24, c'eſt-à-dire 2 dixaines & 4 unités, j'écris 4 unités ſous la ligne, & je retiens 2 dixaines: je dis 4 fois 3 dixaines font 12 & 2 que je retiens font 14, j'écris 4 ſous les dixaines, & j'avance 1 au rang des centaines, ainſi j'ai 144 livres pour la valeur de 36 aunes à 4 livres l'aune.

36 aunes.
4
Produit 144

Pour démontrer ceci, il n'y a qu'à faire attention que le nombre 36 eſt la même choſe que 3 dixaines & 6 unités; or en multipliant 6 unités par 4, j'ai pris 6 unités autant de fois qu'il y a d'unités dans 4, & en multipliant 3 dixaines par 4, j'ai auſſi pris 3 dixaines autant de fois qu'il y a d'unités dans 4. Donc j'ai pris le nombre 36 autant de fois qu'il y a d'unités dans 4, & par conſéquent j'ai fait la multiplication demandée. (*N.* 11.)

II. EXEMPLE. *Un homme a fait 236 toiſes d'ouvrages à 28 livres la toiſe, combien lui revient-il?*

Puiſque chaque toiſe vaut 28 livres, il faudra donc prendre 236 vingt & huit fois, ou autant de fois qu'il y a d'unités dans 28, pour avoir la valeur de 236 toiſes, ainſi c'eſt encore une Multiplication. C'eſt pourquoi j'écris d'abord le nombre à multiplier 236, & enſuite le Multiplicateur 28, en mettant les unités ſous les unités, & les dixaines ſous les dixaines, après quoi je multiplie d'abord le nombre 236 par les unités 8 du multiplicateur, ce qui donne 1888; enſuite je multiplie le même nombre 236 par les dixaines 2 du multiplicateur, en diſant: 2 fois 6 font 12, c'eſt-à-dire 12 dixaines, parce que le multiplicateur 2 ſignifie des dixaines, ainſi j'écris 2 dixaines ſous les dixaines 8 du premier produit

236 toiſes
28
1888
472
6608

1888, & je retiens 1 ; deux fois 3 font 6 & 1 de retenu font 7, & j'écris 7 ; 2 fois 2 font 4, & j'écris 4 ; ainſi ce ſecond produit eſt 472 ; j'ajoute enſemble ces deux produits 1888, & 472 tels qu'ils ſont rangés, c'eſt-à-dire j'écris d'abord 8, enſuite je dis : 8 & 2 font 10, j'écris 0 & retiens 1 ; 1 de retenu & 8 font 9 & 7 font 16, j'écris 6 & retiens 1 ; 1 de retenu & 1 font 2 & 4 font 6, j'écris 6, & le produit total 6608 eſt la valeur des 236 toiſes.

Pour comprendre la raiſon de ceci, on conſiderera que le multiplicateur 28 eſt la même choſe que 2 dixaines & 8 unités. Or en multipliant 236 d'abord par 8, j'ai pris ce nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans 8, & en le multipliant enſuite par 2 dixaines, je l'ai pris 2 dixaines de fois, à cauſe que j'ai avancé le produit d'un rang vers la gauche, ce qui le fait valoir dix fois plus qu'il ne vaudroit ſi je ne l'avois pas avancé. Donc j'ai pris le nombre 236 2 dixaines de fois & 8 fois, c'eſt-à-dire 28 fois ; & par conſéquent j'ai fait la multiplication requiſe, ajoutant donc enſemble les deux produits en conſervant leur rang, j'ai eu neceſſairement le produit total.

21. Pour faire plus commodément la multiplication, on ſe ſert d'une Table nommée *Quarré de Pythagore* du nom de ſon Auteur. On la conſtruit en faiſant d'abord un grand quarré que l'on partage en dix rangs égaux de gauche à droite, & en dix autres de haut en bas, de façon que tout le quarré eſt partagé en 100 petits quarrés ou cellules que l'on voit ici.

Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

On écrit dans les dix cellules à gauche de haut en bas, les dix nombres 1, 2, 3 &c. juſqu'à 10 & l'on fait la même choſe dans les 10 cellules ſuperieures de gauche à droite, enſuite dans les dix cellules du ſecond rang de haut en bas, à la tête duquel eſt le nombre 2, on écrit les nombres 2, 4, 6, &c. en augmentant toujours de 2, de même dans les cellules du troiſiéme rang de haut en bas, à la tête duquel eſt le nombre 3, on écrit les nombres 3, 6, 9, 12, &c. en augmentant toujours de 3, de même encore dans les cellules du 4e. rang de haut en bas, à la tête duquel eſt le nombre 4, on écrit les nom-

bres 4, 8, 12, &c. en augmentant toujours de 4, & faiſant la même choſe à l'égard des autres rangs de haut en bas, la Table ſe trouve conſtruite.

Pour faire uſage de cette Table, ſi l'on veut par exemple ſçavoir ce que fait 6 fois 7, on cherche d'abord dans la premiere colonne de haut en bas, à gauche, la cellule où le nombre 6 ſe trouve écrit, & dans le rang ſuperieur de gauche à droite la cellule où ſe trouve le nombre 7. Après quoi ſuivant des yeux le rang de gauche à droite, qui commence par le nombre 6, & le rang de haut en bas qui commence par 7, la cellule où ces deux rangs s'entrecoupent contient 42, ce qui fait voir que 6 fois 7 font 42; & la raiſon en eſt évidente par la conſtruction de la Table; car il eſt viſible qu'en formant le rang du haut en bas qui commence par 7, la ſeconde cellule contient 2 fois 7 ou 14, la troiſiéme 3 fois 7 ou 21, &c. de ſorte que la ſixiéme qui répond au rang de gauche à la droite qui commence par 6, doit néceſſairement contenir 6 fois 7 ou 42.

De même ſi on vouloit trouver ce que vaut 7 fois 9, on prendroit le rang de gauche à droite qui commence par 7, & le rang de haut en bas qui commence par 9; & l'endroit où ces deux rangs ſe couperoient contiendroit 63, qui eſt le produit de 7 par 9, & ainſi des autres.

22. La preuve de la multiplication, c'eſt-à-dire la maniere de voir ſi on ne s'eſt point trompé en faiſant l'operation, ſe fait par la diviſion, qui eſt une opération toute contraire, comme on verra bien-tôt.

Division simple.

23. Ier. Exemple. *On veut partager 69 livres à 3 Soldats, combien reviendra-t'il à chacun d'eux?*

Il eſt viſible que pour répondre à cette queſtion, il faut partager le nombre 69 en 3, & par conſéquent examiner combien de fois 3 eſt dans 69; car s'il s'y trouve par exemple 23 fois ſans reſte, il ſera vrai de dire que 23 pris trois fois font 69, puiſque le tout eſt égal à ſes parties priſes enſemble (*N.* 13.), & qu'ainſi 23 ſera la partie qui reviendra à chaque Soldat. C'eſt donc ici une diviſion (*N.* 11.).

Pour cela j'écris le nombre à diviſer 69, & le diviſeur 3 pardeſſus ſur le premier caractere à gauche; je mene enſuite une ligne ſous 69, & une autre à droite pour ſéparer le dividende

du quotient que je mettrai à côté de cette ligne. Cela ſait, je dis: en 6 combien de fois 3, & trouvant qu'il y eſt 2 fois, j'écris 2 au quotient, & je dis 2 fois 3 font 6, & du caractere 6 du dividende ôtez 6, il ne reſte rien. Je diviſe l'autre caractere 9 du dividende de la même façon, & pour cela je l'écris ſous la ligne, directement ſous le diviſeur, & je dis: en 9 combien de fois 3, & trouvant qu'il y eſt 3 fois, j'écris 3 au quotient, & je dis 3 fois 3 font 9, & du caractere 9 du dividende ôtez 9, il ne reſte rien, & comme il n'y a plus de caractere au dividende, l'opération eſt finie; ainſi il revient 23 livres à chaque ſoldat.

3
69(23
9

La raiſon de ceci paroîtra claire, ſi l'on conſidere que lorſqu'en faiſant la premiere opération, j'ai dit en 6 combien de fois 3 il m'eſt venu 2 dixaines ou 20; car 6 dixaines contiennent 3 vingt fois, ou deux dixaines de fois; ainſi en multipliant le diviſeur 3 par le premier quotient 2, ce qui fait 6 dixaines, & retranchant ces 6 dixaines du dividende, il n'eſt plus reſté au dividende que 9 unités. Or par la ſeconde opération ayant trouvé que le diviſeur étoit 3 fois dans ces 9 unités, j'ai multiplié le diviſeur 3 par le ſecond quotient 3, & j'ai retranché le produit 9 des 9 unités du dividende; ainſi il n'eſt reſté rien au dividende. Donc j'ai retranché du dividende le diviſeur 3, autant de fois qu'il y étoit contenu, & par conſéquent j'ai fait la diviſion demandée (*N.* 11.).

24. La preuve de cette regle ſe fait par la multiplication; car il eſt clair que ſi le diviſeur 3 eſt contenu 23 fois dans le dividende 69, le même diviſeur 3 pris 23 fois ou multiplié par 23, doit être égal au dividende, puiſque la ſomme des parties eſt toujours égale au tout qui le contient (*N.* 13.). Donc ſi après avoir multiplié le diviſeur par le quotient, on ne retrouvoit pas le dividende, ce ſeroit marque qu'on auroit mal operé. Ceci ſuppoſe qu'il ne reſte rien au dividende qui ne puiſſe plus être diviſé par le diviſeur; car ſi cela arrivoit, il faudroit, pour faire la preuve, multiplier le diviſeur par le quotient, & ajouter au produit ce qui ſeroit reſté du dividende, & la ſomme devroit être égale au dividende.

De même que la multiplication ſert de preuve à la diviſion, de même auſſi la diviſion ſert de preuve à la multiplication. Car on voit bien que ſi en multipliant 3 par 23 on trouve un produit 69. Il s'enſuit néceſſairement qu'en diviſant 69 par 3, on doit retrouver 23 au quotient, ou qu'en diviſant le même 69 par 23, le quotient doit donner 3.

II. EXEMPLE. *Un Marchand a employé 156024 livres à acheter des Etoffes qui lui coutent 6 livres l'aune, combien d'aunes en a-t'il acheté?*

Puiſque l'aune vaut 6 livres, le Marchand a acheté autant d'aunes que le nombre 6 eſt contenu de ſois dans la ſomme 156024 livres qu'il a déboursée. Pour répondre donc à la queſtion propoſée, il faut voir combien de ſois 6 eſt contenu dans 156024, & par conſéquent il faut faire une diviſion.

J'écris le nombre à diviſer 156024 ſous lequel je tire une ligne & une autre à droite, pour ſéparer le dividende du quotient; enſuite j'écris le diviſeur au-deſſus du dividende à gauche; mais comme 6 n'eſt pas contenu dans le premier caractere 1 du dividende, je l'écris au-deſſus du ſecond caractere 5.

```
 6
156024(26004
 36
 00
 02
 24
  0
```

Je dis donc en 15 combien de fois 6? & trouvant qu'il ne peut y être que 2 fois, j'écris 2 au quotient; je multiplie le diviſeur 6 par le quotient 2, ce qui fait 12, & de la partie 15 du dividende retranchant le produit 12, il reſte 3 que j'écris ſous la ligne, non pas ſous le caractere 5, mais en l'avançant d'un rang à gauche, afin de pouvoir placer ſous le caractere 5, & par conſéquent ſous le diviſeur 6, le troiſiéme caractere 6 du dividende, pour faire une ſeconde opération.

Je place donc ſous le diviſeur le troiſiéme caractere 6 du dividende, & je vois qu'au lieu des trois premiers caracteres 156 du dividende, je n'ai plus que 36; je dis donc en 36, combien de fois 6? & trouvant qu'il y eſt 6 fois, j'écris 6 au quotient. Je multiplie ce quotient 6 par le diviſeur 6, ce qui fait 36, & retranchant ce produit des deux caracteres 36 du dividende, il ne reſte rien; c'eſt pourquoi je mene une ligne ſous 36, & j'écris 0, non pas ſous le diviſeur, mais en l'avançant d'un rang à gauche pour la même raiſon que ci-deſſus.

J'abbaiſſe le quatriéme caractere 0 du dividende ſous le diviſeur, & je vois qu'au lieu des quatre premiers caracteres 1560 du dividende, je n'ai plus que 00. Je dis donc en zero, combien de ſois 6, & trouvant qu'il n'y eſt point, j'écris un zero au quotient, je multiplie le diviſeur 6 par ce quotient zero, ce qui donne zero. Je retranche ce produit zero des caracteres 00 du dividende, & le reſte eſt 0; ainſi je tire une ligne ſous deux 00, & j'écris

cris 0, non pas directement ſous le diviſeur, mais en l'avançant d'un rang à gauche.

J'abbaiſſe le cinquiéme caractere 2 du dividende ſous le diviſeur, & je trouve qu'au lieu des cinq premiers caracteres 15602 du dividende, je n'ai plus que 02, c'eſt-à-dire 2; car le zero qui le précede ne ſignifie rien; je dis donc en 2, combien de fois 6? & trouvant qu'il n'y eſt point, j'écris encore zero au quotient. Je multiplie le diviſeur 6 par le quotient zero, ce qui fait zero, & retranchant ce produit du caractere 2 du dividende, le reſte eſt 2; car de 2 retranchez zero, le reſte eſt 2; je mene une ligne, & j'écris le reſte 2, non pas ſous le diviſeur, mais en l'avançant d'un rang à gauche.

J'abbaiſſe le dernier caractere 4 du dividende ſous le diviſeur, & je trouve qu'au lieu du dividende 156024, je n'ai plus que 24. Je dis en 24, combien de fois 6? & trouvant qu'il y eſt 4 fois, j'écris 4 au quotient. Je multiplie le diviſeur 6 par ce quotient 4, ce qui donne 24, & retranchant ce produit des caracteres 24 du dividende, le reſte eſt zero, que j'écris au deſſous en menant une ligne; & comme il ne reſte plus rien au dividende, la diviſion eſt finie; & par conſéquent le quotient 26004 marque le nombre d'aunes que ce Marchand a acheté.

Lorſqu'en retranchant des caracteres du dividende, le produit du diviſeur par l'un des quotients il ne reſte rien, on peut ſe diſpenſer d'écrire 0 par deſſous; car ce caractere au commencement d'un nombre ne ſignifie rien.

Il faut obſerver à meſure qu'on abbaiſſe un caractere du dividende ſous ce diviſeur, de mettre un point ſur ce caractere pour marquer qu'il a été abbaiſſé.

III. EXEMPLE. *On veut partager à 26 perſonnes la ſomme de 154518 livres, combien reviendra-t'il à chacun?*

Cette queſtion ſe réſout comme les deux précédentes, & il n'y a de différence qu'en ce que le diviſeur 26 a deux caracteres; or voici ce qu'on fait.

J'écris le Dividende 154518 menant une ligne par-deſſous & à côté comme ci-deſſus, enſuite je mets le Diviſeur 26 non pas ſur le premier caractere 1, parce que 2 n'eſt pas contenu dans 1, mais ſur le ſecond caractere; puis je cherche combien

```
 26
154518(5943
245
111
 78
 00
```

de fois 26 eſt contenu dans les trois premiers caracteres 154 du diviſeur; mais comme cet examen ſeroit embarraſſant, je le fais par partie, en cherchant combien de fois le premier caractere 2 du diviſeur eſt contenu dans les deux premiers caracteres 15 du dividende, & examinant enſuite ſi après avoir retranché le produit du diviſeur 2 par le quotient, le ſecond caractere 6 eſt contenu un même nombre de fois dans ce qui reſte, joint au troiſiéme caractere 4 du dividende; que ſi 6 n'y eſt pas contenu un même nombre de fois, je diminue le nombre de fois, juſqu'à ce que les deux caracteres 2 & 6 ſoient contenus également.

Je dis donc 2 eſt à la verité 7 fois dans 15; car 2 fois 7 font 14, & 14 étant ôté de 15 il reſte 1, qui avec le caractere ſuivant 4 fait 14, mais 6 n'eſt pas contenu 7 fois dans 14; ainſi au lieu de 7 fois, je ne fais entrer 2 dans 15 que 6 fois; or 2 fois 6 font 12, & 12 étant retranché de 15 il reſte 3, qui avec le caractere ſuivant 4 du dividende font 34, & 6 n'eſt pas contenu 6 fois dans 34; donc au lieu de faire entrer 2 ſix fois dans 15, je ne le fais entrer que 5, & je dis 2 fois 5 font 10, & 10 étant retranché de 15 il reſte 5, qui avec le 4 ſuivant fait 54; mais 6 peut aller 5 fois dans 54, c'eſt pourquoi j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviſeur 26 par ce quotient, & je retranche ce produit des 3 premiers caracteres 154 du dividende, en diſant: 5 fois 6 font 30, or 30 ne peut être ôté de 4, j'emprunte donc ſur le caractere ſuivant du dividende à gauche autant d'unités qu'il en faut pour faire avec 4 un nombre plus grand que 30, & par conſéquent j'en emprunte 3, qui avec 4 feront 34, & 30 étant retranché de 34 il reſte 4, que j'écris au deſſous en avançant d'un rang à gauche. Je continue en diſant 2 fois 5 font 10, & comme les 2 caracteres 15 du diviſeur ne devroient plus valoir que 12, à cauſe des trois unités que j'ai emprunté, je corrige ce défaut en donnant au produit 10 trois unités; je dis donc 2 fois 5 font 10, & 3 que j'ai emprunté font 13; & 13 étant retranché de 15 il reſte 2 que j'écris au deſſous à la gauche du 4 que j'ai écrit auparavant.

Cette premiere operation étant faite, j'abbaiſſe le quatriéme caractere 5 du dividende ſous le dernier caractere du diviſeur, & je vois qu'au lieu des quatre premiers caracteres 1545 du dividende, je n'ai que 245. J'examine combien de fois 26 eſt contenu dans 245 de la façon que je viens de dire, & trouvant qu'il y eſt 9 fois, j'écris 9 au quotient, je multiplie le diviſeur 26 par le quotient, & le retranchant de 245 de la même maniere que j'ai

fait ci-deſſus, il reſte 11, que je mets ſous la ligne que je tire, en avançant d'un rang à gauche.

Je fais les mêmes operations à l'égard des deux caracteres reſtants 1 & 8 du dividende, & tout étant achevé, le quotient total 5943 marque ce qui revient à chacune des 26 perſonnes.

25. Il y a donc trois choſes à obſerver dans chaque operation que l'on fait en diviſant. La premiere eſt d'examiner combien de fois le diviſeur eſt dans les caracteres du dividende, qui ſont au deſſous de lui, & à gauche s'il s'en trouve; & d'écrire ce nombre de fois au quotient : la ſeconde eſt de multiplier le quotient par le diviſeur, & la troiſiéme eſt de retrancher le produit qu'on a trouvé, des caracteres du dividende qui ſont ſous le diviſeur, & à gauche.

26. Lorſque la Diviſion ſe fait exactement & ſans reſte comme dans les exemples précédens, on dit que le diviſeur eſt *exact*, mais lorſqu'il ſe trouve un reſte qui ne peut plus être diviſé, on dit que le diviſeur n'eſt pas *exact*. Qu'on propoſe par exemple, le nombre 434 à diviſer par 3, on trouvera après avoir fait toutes les opérations, un reſte 2 qui ne ſçauroit ſe diviſer par 3, puiſque 3 n'eſt pas contenu dans 2, ainſi le diviſeur n'eſt pas exact, & dans ce cas ſi l'on vouloit faire la preuve, on multiplieroit le diviſeur 3 par le quotient 144, ce qui donneroit le le produit 432, auquel on ajouteroit le reſte 2 pour avoir le Dividende 434.

```
 3
 434 (144
 13
 14
  2
```

```
 144
   3
 ---
 432
   2
 ---
 434
```

27. Lorſque le diviſeur n'eſt pas éxact, le reſte eſt une fraction; ainſi dans l'Exemple que nous venons de donner le nombre 2, eſt une fraction, car ce nombre ſignifie 2 unités qu'il faut partager en trois, ou deux tiers d'unité; ſuppoſons par exemple que l'on veüille partager 2 écus à 3 perſonnes, il eſt ſur que ſi on partage chaque écu en 3 parties égales, les deux écus ſeront compoſés de ſix parties égales, dont chacune vaudra le tiers d'un écu; ainſi diviſant ce nombre 6 par le nombre 3 des perſonnes, le quotient 2 marquera que chaque perſonne aura deux de ces 6 parties, & par conſéquent deux tiers d'écus. Donc 2 écus à partager entre trois perſonnes, eſt la même choſe que deux tiers d'écus; or 2 tiers d'écus eſt une fraction, donc le reſte d'une diviſion eſt une fraction.

28. De tout ce que nous venons de dire touchant la multiplication & la diviſion, on doit tirer les conſéquences ſuivantes.

Dans toute multiplication, ſi l'on diviſe le produit par le nombre à multiplier, le quotient ſera égal au multiplicateur; & ſi l'on diviſe le même produit par le multiplicateur, le quotient ſera égal au nombre à multiplier (*N.* 24.)

29. *Dans toute diviſion éxacte, le produit du quotient par le diviſeur eſt égal au dividende; & dans toute diviſion qui n'eſt pas éxacte, le produit du quotient par le diviſeur étant ajouté au reſte de la diviſion, donne une ſomme égale au dividende ou nombre à diviſer* (*n.* 24.).

Il y a donc deux differentes regles, l'une pour la diviſion éxacte, & l'autre pour celle qui ne l'eſt pas; mais il faut obſerver que ces deux régles peuvent ſe reduire à une ſeule; car le reſte d'une diviſion non-éxacte étant une fraction (*n.* 27.), ſi j'écris le reſte à côté du quotient en guiſe de fraction, comme on verra bien-tôt dans le Chapitre ſuivant, le quotient & la fraction étant multipliés par le diviſeur, donneront un produit égal au dividende. Soit par exemple le nombre 14 à diviſer par 3, le quotient eſt 4, & le reſte 2 eſt une fraction qui ſignifie *deux tiers* (*N.* 27.) or deux tiers s'écrivent de cette façon $\frac{2}{3}$ (*N.* 30.), ainſi j'écris $\frac{2}{3}$ à côté du quotient 4, ce qui fait $4\frac{2}{3}$; je multiplie $4\frac{2}{3}$ par le diviſeur 3 en diſant: 3 fois deux tiers font ſix tiers, & ſix tiers font deux entiers; car chaque entier contient trois tiers, donc je n'ai plus de fraction & je retiens deux entiers; 3 fois 4 font 12 entiers & 2 de retenu font 14, ainſi le produit eſt 14, & ce produit eſt égal au dividende; d'où l'on voit *que dans la Diviſion non exacte, de même que dans la Diviſion exacte, le produit du diviſeur par le quotient total, c'eſt-à-dire par le quotient & la fraction qui exprime le reſte, eſt égal au dividende*; & par conſéquent la même regle ſert pour l'un & l'autre cas.

3	
14	$(4\frac{2}{3}$
2	

$4\frac{2}{3}$
3
14

CHAPITRE III.

Des Fractions.

30. UNe fraction nous préſente toujours deux idées, dont l'une eſt l'idée du nombre des parties qui compoſent l'entier, & l'autre eſt celle du nombre des parties que l'on prend. Quand on dit deux tiers d'écus, on conçoit qu'un écu eſt partagé en trois parties égales, & qu'on en prend 2, & ainſi des autres. D'où il ſuit qu'il faut néceſſairement employer deux expreſſions qui répondent à ces deux idées; or voici comme on fait.

Pour exprimer deux tiers, on écrit d'abord le nombre 2, ſous lequel on mene une petite ligne, & ſous cette ligne on met le nombre 3. Ainſi on écrit $\frac{2}{3}$, de même pour exprimer trois quarts, quatre cinquiémes, &c. on écrit $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c, le nombre écrit au deſſus de la petite ligne ſe nomme le *numerateur*, parce qu'il marque combien on prend des parties de l'entier, & celui qui eſt ſous la ligne ſe nomme *dénominateur*, parce qu'il exprime en combien de parties égales on conçoit que l'entier eſt diviſé, & que par conſéquent il détermine l'eſpece de la fraction.

31. Deux ou pluſieurs fractions de differente eſpece, c'eſt-à-dire, dont les dénominateurs ſont differens, ne peuvent ni être ajoutées enſemble, ni être ſouſtraites les unes des autres. $\frac{2}{3}$ d'écus & $\frac{3}{4}$ d'écus ne peuvent faire ni $\frac{5}{3}$ ni $\frac{5}{4}$; car quoiqu'on prenne d'un côté 2 parties d'un écu, & de l'autre 3, ce qui fait 5; cependant on ne peut pas dire que ces cinq parties ſont toutes ou des tiers ou des quarts: par la même raiſon on ne ſçauroit retrancher la fraction $\frac{1}{2}$ de la fraction $\frac{2}{3}$; c'eſt pourquoi ſi l'on veut faire ces operations ſur ces ſortes de fractions, il faut néceſſairement les reduire à avoir une même dénomination, ſans cependant changer leur valeur; & c'eſt ce que nous allons voir après que j'aurai poſé les principes ſuivans.

32. *Si l'on multiplie deux nombres par un même nombre, les produits ſeront entr'eux comme les nombres à multiplier, c'eſt-à-dire, le premier produit ſera contenu dans le ſecond, ou le contiendra autant de fois que le premier nombre à multiplier ſera contenu ou contiendra le ſecond.*

Soient les nombres à multiplier 4 & 8, & le multiplicateur 3, les produits ſeront 12 & 24, & il eſt viſible que le nombre 4 étant contenu 2 fois dans 8, le même 4 pris 3 fois, c'eſt-à-dire 12, ſera auſſi contenu deux fois dans le nombre 8 pris 3 fois, c'eſt à-dire 24; ainſi 12 ſera à 24 comme 4 eſt à 8.

4	8
3	3
12	24

33. *Si l'on diviſe deux nombres par un même nombre, les quotiens ſeront en même raiſon que les autres à diviſer.*

Soient les nombres 12 & 48 à diviſer par 3, les quotiens ſeront 4 & 16; or 12 étant le quart de 48, il eſt clair que le tiers de douze, c'eſt-à-dire le quotient 4 doit être le 4 du tiers de 48, c'eſt-à-dire du quotient 16.

3	3
12(4	48(16
	18
	0

34. *Lorſque l'on multiplie un nombre ſucceſſivement par pluſieurs*

multiplicateurs, le produit que l'on trouve eſt égal au produit que l'on auroit, ſi l'on multiplioit tout d'un coup le nombre propoſé par le produit de tous les multiplicateurs.

Soit le nombre 4 à multiplier ſucceſſivement par 2 & 3, le produit ſera 24; car 4 multiplié par 2 donne 8, & 8 multiplié par 3 donne 24; d'autre part ſi je multiplie le multiplicateur 2 par le multiplicateur 3, ce qui fait 6, & que je multiplie le nombre propoſé 4 par ce produit, j'ai auſſi 24.

4	2	6
2	3	4
8	6	24
3		
24		

Et la raiſon en eſt évidente, car en multipliant 4 par le premier multiplicateur 2, je prens 4 deux fois, c'eſt-à-dire je le rends double de lui-même, & dans cet état en le multipliant par 3, je le prens 3 fois, de ſorte qu'en tout je le prens 2 fois 3 fois, c'eſt-à-dire 6 fois; or lorſqu'après avoir fait le produit 6 des multiplicateurs 2 & 3, je multiplie 4 par 6, je prens auſſi 4 ſix fois, donc de part & d'autre je fais la même choſe, & le produit doit être le même.

35. *Lorſqu'on diviſe un nombre ſucceſſivement par pluſieurs diviſeurs, le quotient que l'on trouve eſt le même que celui qu'on trouveroit, ſi l'on diviſoit tout d'un coup le nombre propoſé par le produit de tous les diviſeurs.*

Soit le nombre 24 à diviſer par 2 & 3, le quotient ſera 4, car 24 diviſé par 2 donne 12, & 12 diviſé par 3 donne 4; d'autre part le produit des deux diviſeurs 2 & 3 eſt 6, & ſi je diviſe 24 par 6, j'ai auſſi 4 pour quotient.

2 3	2	6
24(12(4	3	24(4
0 0	6	0

La raiſon en eſt qu'en diviſant 24 par 2, je le reduits à la moitié, & dans cet état en le diviſant par 3, je le réduits au tiers de la moitié, & par conſéquent je le réduits au ſixiéme; car la moitié étant partagée en trois parties, l'entier qui contient deux moitiés, contient auſſi 6 de ces parties; ainſi chacune d'elles eſt le ſixiéme de l'entier: or lorſqu'après avoir fait le produit 6 des deux diviſeurs, je diviſe 24 par ce produit, je réduits 24 au ſixiéme; donc de part & d'autre je fais la même choſe, & le quotient doit être le même.

Réduire deux ou pluſieurs fractions à un même dénominateur.

36. Soient les deux fractions propoſées $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, je multiplie les deux dénominateurs 3 & 5 l'un par l'autre, ce qui donne le dé-

nominateur commun 15 ; enſuite je multiplie le numérateur 2 de la premiere par le dénominateur 5 de la ſeconde, & le numérateur 4 de la ſeconde par le dénominateur 3 de la premiere, ce qui me donne deux nouveaux numérateurs 10 & 12, & je dis que la premiere fraction $\frac{2}{3}$ eſt changée en $\frac{10}{15}$ qui a la même valeur que $\frac{2}{3}$, & que la ſeconde $\frac{4}{5}$ eſt changée en $\frac{12}{15}$ qui ne vaut pas plus que $\frac{4}{5}$.

10 12
$\frac{2}{3}$ 15 $\frac{4}{5}$

Pour en être convaincu, on n'a qu'à conſiderer qu'en operant comme j'ai fait, le numerateur 2 de la premiere fraction, & ſon dénominateur, ont été multipliés par un même nombre 5, & qu'ainſi les produits 10 & 15 ſont en même raiſon que les nombres à multiplier 2 & 3 (*N.* 32.) ; d'où il ſuit que 10 eſt les deux tiers de 15, de même que 2 eſt les deux tiers de 3, & que par conſéquent c'eſt la même choſe de partager l'entier en 15 parties égales, & d'en prendre 10, que de le partager en 3, & d'en prendre 2 ; de même le numerateur 4 de la ſeconde fraction, & ſon dénominateur 5, ayant été multipliés par le même nombre 3, les produits 12 & 15 ſont en même raiſon que les nombres 4 & 5. Donc les deux nouvelles fractions $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, ſont les mêmes que les deux propoſées $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$; & il eſt viſible qu'elles ont le même dénominateur 15, puiſque dans l'une & dans l'autre ce dénominateur eſt le produit des 2 dénominateurs 3 & 5 des fractions propoſées.

Soient les trois fractions propoſées $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, je multiplie les trois dénominateurs les uns par les autres, c'eſt-à-dire je multiplie 3 par 5, ce qui fait 15, & 15 par 6, ce qui fait 90, & je prens 90 pour le dénominateur commun : je multiplie enſuite le numérateur 2 de la premiere ſucceſſivement par les dénominateurs des deux autres, ou ce qui revient au même, par le produit 30 de ces deux dénominateurs 5 & 6 (*N.* 34.) & le produit 60 eſt le nouveau numérateur de cette fraction.

3
5
15
6
45

60 72 15
$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{6}$
90

Je multiplie de même le numerateur 4 de la ſeconde ſucceſſivement par les dénominateurs 3 & 6 des deux autres, ou tout d'un coup par le produit 18 de ces deux denominateurs ; & le produit 72 eſt le nouveau numerateur de cette ſeconde fraction ; enfin je multiplie le numerateur 1 de la troiſiéme fraction ſucceſſivement par les dénominateurs 3 & 5 des deux autres, ou tout d'un coup par leur produit 15, & le produit 15 eſt le nouveau numerateur de cette troiſiéme fraction.

Les trois fractions proposées $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}$, sont donc changées en ces trois ci $\frac{60}{90}, \frac{72}{90}, \frac{15}{90}$, qui ont un même dénominateur, & dont les valeurs sont les mêmes que celles des proposées. La démonstration de ceci est la même que la précedente; car il est aisé de voir qu'en operant de cette façon, le numerateur 2 & le dénominateur 3 de la premiere fraction ayant été multipliés l'un & l'autre successivement par les dénominateurs 3 & 5, ou tout d'un coup par le produit 30 de ces deux dénominateurs, les produits 60, 90, sont en même raison que 2 & 3 (*n.* 34.), & que par conséquent 60 est les deux tiers de 90, de même que 2 est les deux tiers de 3; d'où il suit que c'est la même chose de partager l'entier en 90 parties égales, & d'en prendre 60, que de le partager en 3 & d'en prendre 2, & qu'ainsi la fraction $\frac{60}{90}$ est la même que $\frac{2}{3}$. On fera le même raisonnement à l'égard des deux autres fractions.

La regle est donc de multiplier tous les dénominateurs ensemble, & de prendre le produit pour le dénominateur commun, ensuite de multiplier le numerateur de chaque fraction par les dénominateurs de toutes les autres, ce qui donnera les nouveaux numerateurs que l'on cherche.

Réduire un entier en fraction dont le dénominateur soit donné.

Soit le nombre 15 à réduire en une fraction dont le dénominateur soit 3, je multiplie 15 par 3, & le produit est 45, j'écris donc 45, & menant une ligne, j'écris le dénominateur 3 au-dessous, ce qui me donne la fraction $\frac{45}{3}$ égale à l'entier 15.

15
3 $\frac{45}{3}$
45

Démonstration. Chaque unité de l'entier 15 étant divisée en trois parties égales, contient 3 tiers, & par conséquent 15 unités doivent contenir 15 fois 3 tiers, c'est-à-dire $\frac{45}{3}$. Donc $\frac{45}{3}$ est égal à 15.

Réduire en entier une fraction improprement dite, ou dont le numérateur est plus grand que le dénominateur.

38. Soit la fraction $\frac{45}{3}$ à réduire en entiers; je divise 45 par le dénominateur 3, & le quotient 15 est l'entier que je cherche.

3
45(15
15
0

Démonstration. Puisque la fraction est une fraction de tiers, chaque entier en doit contenir 3, ainsi il doit y avoir dans $\frac{45}{3}$ autant d'entiers qu'il y aura de 3, & par conséquent en divisant 45 par 3, on a le nombre des entiers contenus dans $\frac{45}{3}$.

Réduire

Réduire une fraction aux plus petits nombres qui puiſſent l'exprimer.

39. Soit la fraction $\frac{12}{24}$ à reduire à ſes moindres termes, il eſt ſur qu'il faut pour cela que je cherche un nombre qui diviſe exactement le numerateur 12 & le dénominateur 24; car les quotients ſeront certainement plus petits que 12 & 24, & cependant ils ſeront en même raiſon (*n.* 33.), d'où il ſuit que je pourrai mettre le premier quotient à la place du numerateur 12, & le ſecond à la place du dénominateur 24, ce qui me donnera une nouvelle fraction égale à $\frac{12}{24}$, & dont les termes ſeront moindres. 2°. Il faut encore que ce diviſeur que je cherche, ſoit le plus grand diviſeur éxact qui puiſſe diviſer 12 & 24; car les quotients deviendront alors les moindres qu'ils puiſſent être, à cauſe que plus le diviſeur eſt grand, moins il eſt contenu dans le dividende, & par conſéquent le diviſeur devient moindre.

Pour remplir donc ces deux conditions, je diviſe le dénominateur 24 par le numerateur 12, & trouvant que la diviſion eſt exacte, & que le quotient eſt 2, je diviſe auſſi 12 par lui-même, & le quotient eſt 1; ainſi les deux nombres 12 & 24 ayant été diviſés par le même nombre 12, les quotients 1 & 2 ſont en même raiſon (*N.* 33.) & par conſéquent la fraction $\frac{1}{2}$ eſt la même que la fraction $\frac{12}{24}$; de plus on ne ſçauroit trouver de moindres termes pour exprimer cette fraction, puiſque le diviſeur 12 étant égal au numerateur, on ne ſçauroit trouver un plus grand nombre qui diviſe exactement 12 & 24.

12	12
24 (2	12 (1
0	0

Si après avoir diviſé le dénominateur par le numerateur, la diviſion n'eſt pas exacte; on néglige le quotient, & l'on diviſe le numerateur par le reſte de la premiere diviſion; & ſi cette ſeconde diviſion n'eſt pas éxacte, on diviſe le reſte de la premiere diviſion par le reſte de la ſeconde, & on continuë de même juſqu'à ce qu'on trouve un diviſeur éxact; alors on diviſe le numerateur & le dénominateur de la fraction propoſée par ce diviſeur, & les deux quotients compoſent la fraction reduite.

Soit par exemple la fraction $\frac{168}{240}$ à réduire aux moindres termes. Je diviſe le dénominateur 240 par le numérateur 168, & la diviſion n'eſt pas éxacte; car il me reſte 72.

168	72.	24
240(1	168(2	72 (3
72	24	0

Je neglige le quotient 1, & je diviſe le numerateur 168 par 72,

& la diviſion n'eſt pas éxacte, puiſqu'il me reſte 24.

Je néglige le quotient 2, & je diviſe le premier reſte 72 par le ſecond 24, & la diviſion eſt éxacte.

Je prens donc le diviſeur 24 & je diviſe le numerateur 168, & le dénominateur 240 l'un & l'autre par 24, & les quotients 7 & 10 ſont en même raiſon que 168 & 240 ; donc la fraction $\frac{7}{10}$ eſt la même que la fraction $\frac{168}{240}$ réduite à ſes moindres termes.

24	24
168(7	240(10
00	00
	0

Demonstration. Je dis 1°. que 24 doit diviſer exactement le numerateur 168 & le dénominateur 240; car 24 diviſe exactement 72, or 168 contient 2 fois 72 plus 24, comme on voit par la diviſion que nous avons faite ; ainſi 168 eſt le même que 2 fois 72 plus 24 ; mais 24 ſe diviſe exactement lui-même, & diviſe auſſi exactement 2 fois 72 : puiſqu'il diviſe exactement 72, donc 24 diviſe exactement 2 fois 72 plus 24, c'eſt-à-dire 168. De même 240 contient une fois 168 plus 72, comme on voit par la diviſion que nous avons faite ; donc 240 eſt la même choſe que 168 plus 72 ; or 24 diviſe exactement 168 & 72, donc 24 doit auſſi diviſer exactement 168 plus 72, c'eſt-à-dire 240.

Je dis 2°. que 24 eſt le plus grand diviſeur qui puiſſe diviſer exactement 168 & 240. Si l'on vouloit qu'il y eût un nombre plus grand que 24, qui diviſât exactement 168 & 240, il faudroit que ce nombre diviſât exactement 168 & le premier reſte 72 ; car 240 étant la même choſe que 168 plus 72, ſi le diviſeur de 168 ne diviſoit pas exactement 72, il ne diviſeroit pas non plus 168 plus 72, c'eſt-à-dire 240. De plus 168 étant égal à 2 fois 72 plus 24, le diviſeur qui diviſeroit exactement 168 & 72, devroit auſſi diviſer exactement 2 fois 72, & 24 ; car autrement il ne diviſeroit pas 168 égal à 2 fois 72 plus 24 ; or 24 ne peut pas avoir un diviſeur plus grand que lui, donc il ne peut pas ſe trouver de nombre plus grand qui diviſe exactement 168 & 240.

Evaluer une fraction.

40. Nous avons dit (*N.* 8.), qu'il y a certaines choſes dont l'uſage a voulu qu'on ait fait des diviſions & de ſoudiviſions nommées ſous eſpeces. Or *évaluer* une fraction de quelqu'une de ces choſes, c'eſt chercher combien la fraction contient de ſous-eſpeces.

Pour ſçavoir combien $\frac{1}{4}$ de livres contient de ſols, qui eſt la ſous-

eſpece de la livre, il faut reduire la livre en ſols, c'eſt-à-dire la multiplier par 20, à cauſe que la livre contient 20 ſols; enſuite on diviſera 20 par 4 pour en avoir le quart qui eſt 5, & l'on multipliera ce quart par 3, parce qu'on a $\frac{3}{4}$, & le produit 15 ſols marquera que $\frac{3}{4}$ de livres valent 15 ſols, ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

Ajouter enſemble deux ou pluſieurs fractions.

41. Si les fractions ont un même dénominateur, on ajoute enſemble tous les numerateurs; mais ſi les dénominateurs ſont differens, on réduit auparavant les fractions à une même dénomination.

Ier. EXEMPLE. *Un homme a acheté d'une part* 12 *aunes* $\frac{3}{5}$ *d'étoffe, & d'un autre* 14 *aunes &* $\frac{4}{5}$, *combien a-t'il acheté d'aunes en tout?*

J'écris les aunes ſous les aunes, & les fractions ſous les fractions, après quoi je dis $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{5}$ font $\frac{7}{5}$, & comme le numérateur 7 eſt plus grand que le dénominateur 5, je diviſe 7 par 5, pour ſçavoir combien il y a d'entiers, & je trouve 1 entier avec un reſte 2, c'eſt-à-dire $\frac{2}{5}$, j'écris $\frac{2}{5}$ ſous la ligne, & paſſant aux aunes, je dis 1 entier que j'ai & 2 font 3, & 4 font 7, & achevant le reſte à l'ordinaire, je trouve que cet homme a acheté 27 aunes & $\frac{2}{5}$.

12 aunes	$\frac{3}{5}$
14	$\frac{4}{5}$
27 aunes	$\frac{2}{5}$

II. EXEMPLE. *Un Marchand a vendu à trois differentes perſonnes* 15 *aunes* $\frac{2}{3}$, 12 *aunes* $\frac{3}{4}$, 18 *aunes* $\frac{4}{5}$, *combien a-t'il vendu en tout?*

Je réduis les trois fractions au même dénominateur, & j'ai les nouvelles fractions $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, qui ſont les mêmes que les fractions propoſées.

J'écris donc 15 aunes $\frac{40}{60}$, au lieu de 15 aunes $\frac{2}{3}$, 12 aunes $\frac{45}{60}$, au lieu de 12 aunes $\frac{3}{4}$, & 18 aunes $\frac{48}{60}$, au lieu de 18 aunes $\frac{4}{5}$, & ajoutant enſemble les trois numerateurs, la ſomme eſt $\frac{133}{60}$; & comme le numerateur eſt plus grand que le dénominateur, je diviſe 133 par 60, & le quotient eſt 2 entiers avec un reſte $\frac{13}{60}$. J'écris $\frac{13}{60}$ ſous les fractions, & portant 2 entiers au rang des aunes, je dis 2 que je porte & 5 font 7, & achevant le reſte à la maniere accoutumée, je trouve que ce Marchand a vendu 47 aunes $\frac{13}{60}$.

40	45	48
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
	60	

15 aunes	$\frac{40}{60}$
12...	$\frac{45}{60}$
18...	$\frac{48}{60}$
47 aunes	$\frac{13}{60}$

Souſtraire une fraction d'une autre.

42. Si les deux fractions ont le même dénominateur, on ſouſtrait le numerateur de la petite du numerateur de la grande, & ce qui reſte eſt le numerateur de la fraction reſtante : que ſi les dénominateurs ſont differens, on réduit auparavant les deux fractions à une même dénomination.

Ier. EXEMPLE. *Un homme entreprend un voyage qui en ſuivant la route commune ſeroit de 28 lieuës $\frac{3}{4}$, mais en prenant une autre route, il ne fera que 17 lieuës $\frac{1}{4}$, combien épargnera-t'il de lieuës?*

J'écris ces deux nombres l'un ſous l'autre, c'eſt-à-dire les lieuës du petit ſous les lieuës du grand, & les fractions ſous les fractions ; enſuite je dis : de $\frac{3}{4}$ ôtez $\frac{1}{4}$, ou de 3 ôtez 1, il reſte 2, ou $\frac{2}{4}$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}$; de 8 ôtez 7, il reſte 1, & de 2 ôtez 1, il reſte 1 ; ainſi cet homme fera 11 lieuës $\frac{1}{2}$ de moins.

28 lieuës $\frac{3}{4}$
17 $\frac{1}{4}$
11 lieuës $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$

II. EXEMPLE. *De 17 aunes $\frac{1}{4}$, ôtez 15 aunes $\frac{2}{3}$, que reſte-t'il?*

Je réduis les deux fractions au même dénominateur, ce qui donne $\frac{9}{12}$ & $\frac{8}{12}$; j'écris donc 17 aunes $\frac{9}{12}$, au lieu de 17 aunes $\frac{1}{4}$, & par-deſſous 15 aunes $\frac{8}{12}$, au lieu de 15 aunes & $\frac{2}{3}$; enſuite je dis : de $\frac{9}{12}$ ôtez $\frac{8}{12}$, ou de 9 ôtez 8, il reſte 1 ou $\frac{1}{12}$; de 7 aunes ôtez 5, il reſte 2, & de 1 ôtez 1, il ne reſte rien ; ainſi le reſte eſt 2 aunes $\frac{1}{12}$.

9 8 — 17 aunes $\frac{9}{12}$
$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ — 15 $\frac{8}{12}$
12 — 2 aunes $\frac{1}{12}$

III. EXEMPLE. *Un homme a acheté 25 aunes $\frac{2}{5}$ d'étoffe, il en a cedé à un ami 9 aunes $\frac{3}{4}$, combien lui en reſte-t'il?*

Je réduis les deux fractions au même dénominateur, ce qui donne $\frac{8}{20}$, & $\frac{15}{20}$, j'écris donc 25 aunes $\frac{8}{20}$, & par deſſous 9 aunes $\frac{15}{20}$, & je dis : de $\frac{8}{20}$ je ne puis ôter $\frac{15}{20}$, c'eſt pourquoi j'emprunte une unité au rang des aunes, & la réduiſant en une fraction dont le dénominateur ſoit 20, j'ai $\frac{20}{20}$ qui joints aux $\frac{8}{20}$ que j'ai déja font $\frac{28}{20}$, & de $\frac{28}{20}$ ôtez $\frac{15}{20}$, il reſte $\frac{13}{20}$; enſuite de 4 ne pouvant ôter 9, j'emprunte une unité ſur le rang ſuivant, laquelle unité vaut 10, & ces 10 joints aux 4 que j'ai déja font 14, & de 14 ôtez 9, il reſte 5 ; enfin de 1

8 15 — 25 aunes $\frac{8}{20}$
$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ — 9 $\frac{15}{20}$
20 — 15 aunes $\frac{13}{20}$

ôtez 0, il reſte 1 ; donc ce qui reſte à cet homme eſt 15 aunes $\frac{1}{10}$.

Multiplier une fraction par une autre.

43. Pour multiplier deux fractions l'une par l'autre, ſoit que les dénominateurs ſoient les mêmes, ou qu'ils ſoient differens, on multiplie les deux numerateurs l'un par l'autre, & les deux dénominateurs auſſi, & l'on a une nouvelle fraction qui eſt le produit des deux.

Pour multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{5}$, on multiplie le numerateur 3 par le numerateur 4, ce qui fait 12, on multiplie de même le dénominateur 4 par ledénominateur 5, ce qui fait 20, & l'on écrit $\frac{12}{20}$ pour le produit des deux fractions.

Demonstration. Si au lieu du multiplicateur $\frac{4}{5}$ j'avois quatre unités, je multiplierois le numerateur 3 de la fraction $\frac{3}{4}$ par le multiplicateur 4, & j'aurois $\frac{12}{4}$ pour le produit; car $\frac{3}{4}$ pris 4 fois, c'eſt-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur 4 font $\frac{12}{4}$; or ce n'eſt pas par 4 unités que je dois multiplier $\frac{3}{4}$, mais par $\frac{4}{5}$, ou par 4 diviſé par 5 ; ainſi en multipliant par 4, j'ai trop multiplié, & le produit $\frac{12}{4}$ eſt trop grand; pour corriger donc ce défaut, il faut que je diviſe ce produit par le dénominateur 5 de $\frac{4}{5}$; mais $\frac{12}{4}$ étant la même choſe que 12 diviſé par 4, il s'enſuit que 12 diviſé par 4, doit être enſuite diviſé par 5, ou ce qui revient au même, que 12 doit être diviſé tout d'un coup par le produit 20 des deux diviſeurs 4 & 5 (*N.* 35.). Donc la fraction $\frac{12}{20}$ eſt le produit cherché.

Diviſer une fraction par une autre.

44. Pour diviſer une fraction par une autre, il faut toujours que les dénominateurs ſoient les mêmes ; & ſi cela n'eſt pas, il faut auparavant réduire les fractions à la même dénomination. Après quoi on diviſe le numerateur de la fraction à diviſer par le numerateur de la fraction qui doit la diviſer.

Pour diviſer $\frac{8}{9}$ par $\frac{4}{9}$, on diviſe 8 par 4, & le quotient 2 fait voir que $\frac{8}{9}$ contient 2 fois $\frac{4}{9}$.

Pour diviſer $\frac{9}{10}$ par $\frac{7}{10}$, on diviſe 9 par 7, & le quotient $\frac{2}{7}$ ou 1 $\frac{2}{7}$ fait voir que $\frac{9}{10}$ contient $\frac{7}{10}$ une fois & deux ſeptiémes de fois, c'eſt-à-dire que $\frac{9}{10}$ contient $\frac{7}{10}$ & 2 parties de ſept dixiémes ou $\frac{2}{10}$, & ainſi des autres.

Des fractions de fractions.

45. De même qu'on peut diviſer un entier en pluſieurs parties égales, & en prendre quelques-unes, ce qui fait une fraction: de même auſſi on peut diviſer une fraction en pluſieurs parties égales, & en prendre quelques-unes, ce qui fait une fraction de fraction. D'où l'on voit qu'une fraction de fraction n'a pas un rapport immediat à l'entier, mais ſeulement à la fraction dont elle eſt partie. Le $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ n'eſt pas le tiers de l'entier, mais le tiers d'une partie de l'entier.

Pour operer ſur les fractions de fractions, il faut auparavant leur donner un rapport immediat à l'entier, c'eſt-à-dire les faire devenir ſimples fractions, ce que l'on fait ainſi.

Soit la fraction de fraction $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ d'aune; je multiplie les deux dénominateurs enſemble. Ce qui fait 12, & prenant 12 pour dénominateur, & 1 pour numerateur, j'ai la fraction $\frac{1}{12}$ d'aune égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ d'aune; ce qui eſt viſible, puiſque l'aune contenant quatre quarts, & chaque quart contenant trois tiers, l'aune doit par conſéquent contenir trois fois quatre, ou 12 parties telles que chacune ſoit le tiers de ſon quart; & par conſéquent chacune de ces parties eſt la douziéme partie de l'aune.

Soit encore la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ d'aune; je multiplie les deux numerateurs, ce qui fait 6, & les deux dénominateurs, ce qui fait 12, & j'ai la fraction $\frac{6}{12}$ d'aune égale à $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ d'aune: car le tiers d'un quart étant un douziéme d'aune, les deux tiers d'un quart ſont deux douziémes d'aune, & les deux tiers de trois quarts ſont 2 fois 3 ou 6 douziémes d'aune.

CHAPITRE IV.

De la Multiplication & de la Diviſion compoſée.

46. LA partie *aliquote* d'un nombre eſt une partie qui étant priſe pluſieurs fois eſt égale à ce nombre: 4 étant pris 5 fois eſt égal à 20, donc 4 eſt une partie *aliquote* de 20.

47. La partie *aliquante* d'un nombre eſt une partie qui étant priſe pluſieurs fois, eſt toujours ou moindre ou plus grande que ce nombre, ſans pouvoir jamais lui être égale: 6 pris 3 fois eſt moindre que 20, & le même 6 pris 4 fois, 5 fois, &c. eſt plus grand que 20. Donc 6 eſt partie *aliquante* de 20.

48. Toute partie aliquante d'un nombre peut ſe partager en deux ou pluſieurs parties aliquotes. Par exemple *6*, partie aliquante de 20, peut ſe couper en deux parties 4 & 2, donc la premiere eſt contenuë 5 fois dans 20, & la ſeconde y eſt contenuë dix fois: le même 6 peut ſe couper encore en deux parties 5 & 1; donc la premiere eſt contenuë 4 fois dans 20, & l'autre y eſt contenuë 20 fois.

49. C'eſt par le moyen des parties aliquotes, & des aliquantes réduites en aliquotes qu'on fait la multiplication compoſée, ainſi qu'on verra après que nous aurons établi les deux principes ſuivans.

50. *Si l'on diviſe un nombre entier par* 10, *le quotient ſera toujours égal à toutes les parties du dividende, excepté la derniere à droite, qui ſera une fraction, donc le dénominateur ſera* 10.

Soit le nombre 3642 à diviſer par 10, je le diviſe à la façon ordinaire, & je vois que dans chaque operation le premier nombre 1 du diviſeur eſt contenu dans le caractere du dividende qui ſe trouve ſous lui autant de fois que ce caractere contient d'unités; & que le ſecond caractere 0 du diviſeur laiſſe toujours ſubſiſter le caratere du dividende qui eſt ſous lui; donc après la derniere opération, je dois avoir au quotient les caracteres 364 qui ſont les trois premiers caracteres du dividende, & le dernier caractere eſt un reſte à diviſer par 10, & par conſéquent ce reſte eſt $\frac{2}{10}$.

10
3642 (364 $\frac{2}{10}$
64
42
2

De-là il ſuit qu'au lieu de faire la diviſion demandée, on n'a qu'à retrancher tout d'un coup le dernier caractere & écrire 364 $\frac{2}{10}$.

51. *Si l'on diviſe un nombre par* 20, *le quotient ſera toujours égal à la moitié de tous les termes de ce nombre qui précédent le dernier, & le reſte ſera une fraction qui aura pour dénominateur* 20.

Soit le nombre 4652 à diviſer par 20. Je fais la diviſion, & je trouve que le premier caractere 2 du diviſeur me donne dans chaque opération la moitié du caractere du dividende qui ſe trouve ſous lui, parce que c'eſt la même choſe de prendre la moitié ou de diviſer par 2, & que le ſecond caractere zero du diviſeur laiſſe toujours ſubſiſter le caractere du dividende qui ſe trouve ſous lui; donc après la derniere operation je dois avoir au quotient 232, c'eſt-

20
4652 (232 $\frac{12}{20}$
65
52
12

à-dire la moitié des trois premiers caracteres 465 du dividende; & après avoir pris cette moitié, il reſte 1 dixaine, laquelle jointe au dernier caractere 2 du dividende fait 12, c'eſt-à-dire 12 à diviſer par 20, ou $\frac{12}{20}$.

De-là il ſuit qu'au lieu de faire la diviſion demandée, il n'y a qu'à retrancher du dividende le dernier caractere à droite, & prendre la moitié en allant de gauche à droite; ainſi on dira la moitié de 4 eſt 2, la moitié de 6 eſt 3, & la moitié de 5 eſt 2; & il reſte 1 dixaine, qui jointe au caractere retranché 2 fait $\frac{12}{20}$, & l'on aura 232 $\frac{12}{20}$.

Je laiſſe à examiner aux commençans ce qui arriveroit, ſi l'on diviſoit un nombre par 30, 40, 50, 60, &c.

Ier. EXEMPLE. *Un Ouvrier a fait 365 toiſes d'ouvrage à 4 livres 10 ſols la toiſe, combien lui revient-il?*

J'écris le nombre à multiplier 365, & ſous ſon dernier caractere à droite j'écris 4 liv. & j'avance 10 ſols, enſuite je multiplie 365 par 4, ce qui donne 1460 livres.

365 toiſes		
4 ℔	10 ſols	
1460		
182	10	
1642 ℔	10 ſols	

Maintenant pour multiplier par 10 ſols, je dis: ſi l'aune ne coutoit qu'une livre ou 20 ſols, le prix de 365 aunes ſeroit 365 livres, mais 10 ſols eſt la moitié d'une livre, donc je ne dois avoir que la moitié de 365; je dis donc: la moitié de 3 eſt 1 & il reſte 1 qui joint au caractere ſuivant 6 fait 16; la moitié de 16 eſt 8; la moitié de 5 eſt 2, & il reſte 1 livre à partager en deux ou une moitié de livre; or la moitié d'une livre eſt 10, & par conſéquent j'écris 10 ſols, & ajoutant enſemble les deux produits, j'ai 1642 liv. 10 ſols pour le prix de 365 toiſes.

II. EXEMPLE. *A 5 livres 13 ſols 6 deniers la toiſe, combien vaudront 535 toiſes?*

Je multiplie 535 par 5 liv. ce qui donne 2675 liv. enſuite les 13 ſols n'étant pas une partie aliquote de 20 ſols, ou d'une livre, je coupe 13 ſols en trois parties 10, 2, & 1, dont la premiere eſt la moitié d'une livre, la ſeconde eſt le dixiéme, & la troiſiéme eſt le vingtiéme; je multiplie donc par 10 ſols, en diſant: ſi la toiſe ne valoit que 1 livre, le prix de 535 toiſes ne vaudroit que 535 livres; or

535 toiſes			
5 ℔	13 ſols	6 den.	
2675			
267	10		
53	10		
26	15		
13	7	6	
3036 ℔	2 ſols	6 den.	

or 10 eſt la moitié de la livre, donc je ne dois prendre que la moitié, & prenant cette moitié, j'ai 267 livres 10 ſols.

Pour multiplier par 2 ſols qui eſt le dixiéme d'une livre, je prens le dixiéme de 535 que rendroit une livre; or pour prendre le dixiéme, ou pour diviſer par 10, je coupe le dernier caractere de 535 (*N.* 50.) & j'ai 53 livres, & le reſte eſt une fraction $\frac{5}{10}$, mais chaque dixiéme vaut 2 ſols, donc 5 dixiémes valent 10 ſols, & par conſéquent j'ai 53 livres 10 ſols pour le produit de 2 ſols.

Pour multiplier par 1 ſol, je prends le vingtiéme de 535 livres qu'une livre rendroit, c'eſt-à-dire, je diviſe 535 par 20, ainſi je coupe le dernier caractere 5, & je prends la moitié de 53 qui eſt 26 (*n.* 51.), & il reſte 1, lequel joint au dernier caractere fait $\frac{15}{20}$. Or chaque vingtiéme vaut 1 ſol, donc $\frac{15}{20}$ font 15 ſols; j'ai donc 26 livres 15 ſols pour le produit de 1 ſol.

Maintenant pour multiplier par 6 deniers, je prends la moitié de ce que 1 ſol m'a rendu, à cauſe que 6 deniers eſt la moitié d'un ſol, & j'ai 13 livres 7 ſols 6 deniers. Mais ſi avant les ſix deniers je n'avois eu que 10 ſols, & que par conſéquent je n'euſſe point le produit d'un ſol qui me fait voir tout d'un coup que 6 deniers doivent me rendre la moitié de ce produit, je ferois une ſuppoſition en diſant: ſi j'avois à multiplier par 2 ſols qui eſt le dixiéme d'une livre, je n'aurois qu'à retrancher le dernier caractere de 535, & j'aurois 53 livres & $\frac{5}{10}$, chacun deſquels valant 2 ſols font 10 ſols; ainſi j'aurois 53 livres 10 ſols pour le produit de 2 ſols; or 6 deniers ſont le quart de 2 ſols: donc 6 deniers doivent me produire le quart de 53 livres 10 ſols, & prenant le quart, j'aurois le quart de 5 eſt 1, & il reſte 1, qui avec le 3 ſuivant fait 13; le quart de 13 eſt 3, & il reſte 1 livre ou 20 ſols, qui joint aux 10 ſols ſuivans font 30 ſols; le quart de 30 ſols eſt 7 ſols, & il reſte 2 ſols ou 24 deniers, dont le quart eſt 6; ainſi j'aurois 13 livres 7 ſols 6 deniers pour le produit de 6 deniers.

J'ajoute enſemble tous les produits que je viens de trouver, & le produit total 3036 livres 2 ſols 6 deniers eſt le prix des 535 aunes.

III. EXEMPLE. 327 *toiſes* 3 *pieds* 6 *pouces à* 3 *livres* 9 *ſols* 4 *deniers la toiſe, combien valent-elles?*

Je néglige les 3 pieds 6 pouces du multiplicateur, & je multiplie 327 par 3, ce qui donne 981 livres.

9 ſols n'étant pas une partie aliquote de 20 ſ. je coupe 9 en 2 parties 5 & 4, dont l'une eſt le quart, & l'autre le cinquiéme d'une liv.

Je multiplie par 5 ſols, en prenant le quart de 327; le quart de 32 eſt 8, le quart de 7 eſt 1, & il reſte 3 livres à diviſer par 4, ou $\frac{3}{4}$ de livres; or chaque quart vaut 5 ſols, donc $\frac{3}{4}$ valent 15 ſols, & par conſéquent j'ai 81 livres 15 ſols pour le produit de 5 ſols.

32.7 toiſ.	3 pie.	6 pouces.	
3 *	9 ols	4 den.	
981			
81	15		
65	8		
5	9		
1	14	8	
0	5	9	$\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$
1135 *	12 ſols	5 den.	$\frac{1}{2}$

Je multiplie par 4 ſols en prenant le cinquiéme de 327; le cinquiéme de 32 eſt 6, & il reſte 2, qui avec le caractere ſuivant 7 font 27; le cinquiéme de 27 eſt 5, & il reſte 2 à diviſer par 5, ou $\frac{2}{5}$; or chaque cinquiéme vaut 4 ſols, donc $\frac{2}{5}$ valent 8 ſols; ainſi j'ai 65 livres 8 ſols pour le produit de 4 ſols.

Pour multiplier par 4 deniers, je ſuppoſe que j'euſſe à multiplier par 2 ſols, qui eſt le dixiéme d'une livre, & en ce cas j'aurois 32 livres $\frac{7}{10}$ ou 14 ſols pour le produit de deux ſols; or 4 deniers ſont le ſixiéme de 2 ſols, donc je dois prendre le ſixiéme de 32, mais ce ſixiéme eſt 5, & il reſte 2 livres ou 40 ſols, leſquels joints aux 14 ſols font 54 ſols, & le ſixiéme de 54 ſols eſt 9 ſols, donc j'ai 5 livres 9 ſols pour le produit de 4 deniers.

Il reſte encore les 3 pieds 6 pouces que j'ai negligé. Or puiſque la toiſe coûte 3 livres 9 ſols 4 deniers, 3 pieds qui ſont la moitié de la toiſe, ne doivent coûter que la moitié de 3 livres 9 ſols 4 deniers. Je dis donc la moitié de 3 livres eſt 1 livre, & il reſte 1 livre ou 20 ſols, leſquels joints aux 9 ſols font 29 ſols; la moitié de 29 eſt 14, & il reſte 1 ſol ou 12 deniers, leſquels joints aux 4 deniers font 16 deniers, & la moitié de 16 eſt 8.

Six pouces ſont le ſixiéme de 3 pieds; car la valeur de chaque pied étant de 12 pouces, 3 pieds en valent 36, dont 6 eſt le ſixiéme. Je prends le ſixiéme de ce que trois pieds m'ont rendu en diſant: le ſixiéme de 1 liv. eſt zero de livres, & il reſte une livre ou 20 ſols, leſquels joints aux 14 ſols font 34 ſols; le ſixiéme de 34 eſt 5 ſols, & il reſte 4 ſols ou 48 deniers, leſquels joints aux 8 deniers font 56; le ſixiéme de 56 eſt 9 deniers, & il reſte $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ que j'écris.

J'ajoute enſemble tous les produits que j'ai trouvé, & la ſomme totale 1135 livres 12 ſols 5 deniers $\frac{1}{3}$ eſt la valeur des 327 toiſes 3 pieds 6 pouces.

52. REMARQUE. J'ai dit au ſujet des 4 deniers, qu'en ſuppoſant que j'euſſe à multiplier par 2 ſols, qui eſt le dixiéme d'une livre, je n'avois qu'à retrancher le dernier caractere de 327, & que j'aurois 32 livres 14 ſols pour le produit de 2 ſols, c'eſt-à-dire qu'il

faudroit doubler le dernier caractere 7 en le mettant au rang des ſols, & cela pour les raiſons que j'en ai apportées (*n.* 50.); or en voulant multiplier par 4 deniers, qui eſt le ſixiéme de 2 ſols, j'ai pris le ſixiéme de 32 qui eſt 5, & il m'eſt reſté 2 livres ou quatre dixaines de ſols, leſquels jointes aux 14 ont fait 54 ſols, dont j'ai pris le ſixiéme, d'où l'on voit que j'ai doublé le reſte 2 de même qu'il faut doubler le dernier caractere 7 du nombre 327. Or ſi l'on ne veut doubler ni le reſte ni le dernier caractere, on n'a qu'à prendre le tiers au lieu du ſixiéme, & dire le tiers de 27 ſols eſt 9 ſols; & la raiſon de cela, c'eſt que le tiers de 27, qui eſt la moitié de 54, eſt égal au ſixiéme du tout de 54, & on fera de même dans tous les cas ſemblables, en prenant pour le reſte & pour le dernier caractere une fraction dont le dénominateur ne ſeroit plus que la moitié du dénominateur de celle qu'on prenoit.

Ainſi ſi l'on vouloit multiplier par 2 deniers, qui ſont le douziéme de 2 ſols, on prendroit le douziéme de 32 qui eſt 2, & il reſteroit 8, qui avec le dernier caractere 7 feroit 87, & au lieu d'en prendre le douziéme on en prendroit le ſixiéme, en diſant, le ſixiéme de 8 eſt 1, & il reſte 2, qui avec 7 font 27, le ſixiéme de 27 eſt 4, & il reſte 3 ou $\frac{3}{6}$, or chaque ſixiéme de ſol vaut 2 deniers, donc $\frac{3}{6}$ font 6 deniers; on auroit donc 2 livres 14 ſols 6 deniers pour le produit de 2 deniers, & ainſi des autres.

IVe. EXEMPLE. *A 3 livres 4 ſols 3 deniers, combien valent 535 aunes* $\frac{1}{4}$.

Je néglige d'abord la fraction, & multipliant 535 par 3, j'ai 1605 livres.

4 ſols étant la cinquiéme partie d'une livre, je prens le cinquiéme de 535, & j'ai 107 livres.

Pour multiplier par 3 deniers, je ſuppoſe que j'aye à multiplier par 2 ſols, & en ce cas retranchant le dernier caractere de 535, j'aurois 53 liv. $\frac{5}{10}$, ou 10 ſols pour le produit de 2 ſols; or 3 deniers eſt le huitiéme de 2 ſols; je prens donc le huitiéme de 53 livres qui eſt 6, & il reſte 5 liv. qu'il faudroit doubler pour avoir 10 dixaines, leſquelles jointes au double 10 du dernier caractere feroient 110 dont il faudroit prendre le huitiéme, mais pour n'être pas obligé de doubler rien, je laiſſe ſubſiſter le reſte 5, & le dernier caractere 5, ce qui ne fait plus que 55, c'eſt-à-dire la moitié de 110, & je prens non plus le huitiéme, mais le quart de 55,

535 aunes $\frac{1}{4}$			
3 ℔	4 ſols	3 den.	
1605			
107			
6	13	9	
0	16	0	$\frac{1}{4}$
1719 ℔	9 ſols	9 den.	$\frac{1}{4}$.

parce que le quart de la moitié eſt égal au huitiéme du tout ; or le quart de 55 ſols eſt 13 ſols, & il reſte 3 ou $\frac{1}{4}$ qui valent 9 deniers, parce que chaque quart de ſols vaut 3 deniers ; j'ai donc 6 livres 13 ſols 9 deniers pour le produit de 3 deniers.

Il reſte à multiplier par le quart d'aune que j'ai negligé. Or la valeur d'une aune étant 3 liv. 4 ſols 3 deniers, la valeur d'un quart ne doit être que le quart de 3 livres 4 ſols 3 deniers ; je dis donc le quart de 3 livres eſt zero de livres, & il reſte 3 livres ou 60 ſols, leſquels joints aux 4 ſuivans ſont 64 ; le quart de 64 ſols eſt 16 ſols, le quart de 3 deniers eſt zero de deniers, & il reſte $\frac{1}{4}$ que j'écris.

J'ajoute enſemble tous les produits trouvés, & le produit total 1719 livres 9 ſols 9 deniers $\frac{1}{4}$ eſt la valeur des 535 aunes $\frac{1}{4}$.

De la Diviſion compoſée.

53. La diviſion compoſée ſeroit trop embarraſſante à faire par les parties aliquotes, ſur tout lorſque le dividende & le diviſeur ſeroient des nombres compoſés ; c'eſt pourquoi avant de faire l'operation on reduit tout aux moindres eſpeces, ainſi qu'on va voir dans les exemples ſuivans, qui ſerviront de preuves aux exemples de la multiplication compoſée que je viens de donner.

Ier. EXEMPLE. *On a donné à un Ouvrier 1642 livres 10 ſols pour avoir fait 365 toiſes d'ouvrage, combien vaut la toiſe de cet ouvrage?*

1642 livres 10 ſols viennent d'avoir multiplié les 365 toiſes par le prix de la toiſe : donc ſi je diviſe le produit 1642 livres 10 ſols par le nombre à multiplier 365, le quotient ſera le multiplicateur ou la valeur de la toiſe qu'on demande (*N.* 28.).

Avant de faire la Diviſion, je réduis les livres en ſols, c'eſt-à-dire je multiplie 1642 par 20, à cauſe que chaque livre vaut 20 ſols, & j'ai 32840, auſquelles ajoutant les 10 ſols, la ſomme eſt 32850 ſols, & c'eſt le Dividende.

1642^liv^
20^ſols^
32840
10
32850 *Dividende.*

365
20
7300 *Diviſeur.*

7300 | 32850 (4^liv^
3650
20
73000^ſols^

7300 | 73000 (10^ſols^
00
0

Maintenant le dividende étant devenu 20 fois plus grand, à cauſe de cette multiplication, le quotient deviendroit 20 fois plus grand que ſi je n'avois pas augmenté le Di-

videnде ; car le diviſeur eſt d'autant plus contenu dans le dividende que ce dividende eſt plus grand, & par conſéquent le quotient devient plus grand ; c'eſt pourquoi je multiplie le diviſeur par le même nombre 20 qui a multiplié le dividende ; ainſi le dividende & le diviſeur ſont encore entr'eux comme ſi je ne les avois pas multiplié (*N.* 33.), & par conſéquent le quotient doit être le même qu'il ſeroit ſi je n'avois fait aucune multiplication.

Le produit de 365 par 20 étant 7300, je diviſe 32850 par 7300, & le quotient eſt 4 livres, & il reſte 3650 ou $\frac{3650}{7300}$ qui eſt une fraction de livre, & qui par conſéquent eſt la même choſe que 3650 livres à diviſer par 7300 ; je reduis ces livres en ſols, en multipliant par 20, ce qui donne 73000 ſols, que je diviſe par le diviſeur 7300, & le quotient eſt 10 ſols ; ainſi le prix de la toiſe eſt 4 livres 10 ſols, & ceci eſt la preuve du premier exemple de la multiplication compoſée.

J'aurois pu me paſſer de multiplier le diviſeur 365 par 20, & alors faiſant la diviſion, le quotient auroit contenu des ſols, puiſque le dividende auroit contenu des ſols, & que le diviſeur n'auroit pas été augmenté à proportion du dividende ; ainſi j'aurois eu 90 ſols ; or pour réduire 90 ſols en livres, il faut les diviſer par 20, c'eſt-à-dire, chercher combien il y a de fois 20 ſols ou 1 livre dans 90 ſols, & par conſéquent retranchant le dernier caractere 0, j'aurois pris la moitié de 9 qui eſt 4 liv. & il ſeroit reſté 1 qui avec le 0 retranché auroit fait $\frac{10}{20}$ ou 10 ſols, & j'aurois eu 4 livres 10 ſols pour le prix de la toiſe ; or quoique cette méthode ſoit plus abregée, cependant comme elle ſeroit embarraſſante dans certains cas, j'ai mieux aimé donner la précédente qui convient à tous les cas, comme on verra dans les exemples ſuivans.

365	
32850	(90 ſols
0000	4 liv 10
0	

54. Il faut remarquer en paſſant que lorſqu'on multiplie par un nombre dont le dernier caractere à droite eſt un zero, il faudroit multiplier tous les caracteres du nombre à multiplier par zero, & que par conſéquent on auroit un rang de zeros comme on voit ici, après quoi il faudroit multiplier le nombre à multiplier 1642 par le ſecond caractere 2 du multiplicateur, & écrire le produit par-deſſous le rang des zeros, en commençant à écrire ſous les dixaines ;

1642	1642
20	20
0000	32840
3284	
32840	

or pour abréger on n'écrit qu'un zero ſous les unités, & à côté de ce zero on écrit le ſecond produit 3284, ce qui donne le même produit total que ſi on avoit écrit le rang de zeros tout entier.

De même pour multiplier 1642 par le multiplicateur 200 qui a 2 zeros de droite à gauche, au lieu d'écrire un rang de zeros pour le premier zero, enſuite un ſecond rang de zeros pour le ſecond zero, enſuite un troiſiéme rang pour le produit 3284, on écrira ſimplement deux zeros l'un ſous les unités & l'autre ſous les dixaines, & enſuite on écrira le produit 3284 à côté de ces zeros; c'eſt-à-dire, à commencer ſous le rang des centaines, car par ce moyen le produit 3284 aura toujours ſa même valeur, & le produit total ſera toujours le même.

1642	1642
200	200
0000	328400
0000	
3284	
328400	

II. EXEMPLE. *535 toiſes d'ouvrage ont couté 3036 livres 2 ſols 6 deniers, combien vaut la toiſe?*

Pour faire cette diviſion, je reduis les livres en ſols, en les multipliant par 20, ce qui fait 60720 ſols, auſquels ajoutant les 2 ſols, j'ai 60722 ſols. Je reduis ces ſols en deniers en les multipliant par 12, ce qui fait 728664 deniers, auſquels ajoutant les 6 deniers, la ſomme eſt 728670, & c'eſt le dividende.

3036	535
20	20
60720	10700
2	12
60722	21400
12	10700
121444	128400 *Diviſeur*
60722	
728664	
6	
728670 *Dividende*	

Or ce dividende ayant été multiplié par 20 & par 12, eſt devenu beaucoup plus grand qu'il ne faut par rapport au diviſeur, & par conſéquent le quotient deviendroit plus grand qu'il ne faut pour exprimer des livres, c'eſt pourquoi afin de conſerver le rapport du dividende au diviſeur, je multiplie auſſi le diviſeur par 20, & enſuite par 12, ce qui donne 128400.

128400	184000
728670 (5^ſ	1733400 (13^ſols
86670	449400
20	64200
1733400	12
	128400
	64200
	770400
128400	
770400 (6^den.	
000000	

Je diviſe 728670 par 128400, & le quotient eſt 5 livres ; car quoique j'ai réduit le nombre à multiplier en deniers, cependant comme j'ai multiplié le diviſeur par 20 & 12, c'eſt comme ſi je n'avois rien fait, & par conſéquent il doit me venir des livres au quotient, & la fraction reſtante $\frac{86670}{128400}$ eſt une fraction de livres.

J'évaluë cette fraction en multipliant ſon numérateur par 20, à cauſe que la livre contient 20 ſols (*N.* 40.), & je diviſe le produit 1733400 par le dénominateur 128400, & le quotient eſt 13 ſols & une fraction de ſols $\frac{64200}{128400}$.

J'évaluë cette ſeconde fraction en multipliant ſon numerateur par 12, à cauſe que le ſol contient 12 deniers, & je diviſe le produit 770400 par le dénominateur 128400, ce qui me donne 6 deniers, & il ne reſte rien. Ainſi la valeur de la toiſe eſt 5 livres 13 ſols 6 deniers, & c'eſt la preuve du ſecond exemple de la multiplication compoſée.

III. EXEMPLE. 327 *toiſes 3 pieds 6 pouces ont coûté* 1135 *livres* 12 *ſols* 5 *deniers* $\frac{1}{3}$, *ſur quel pied a-t'on payé la toiſe?*

Je reduis le dividende 1135 livres 12 ſols 5 deniers $\frac{1}{3}$ en ſols en multipliant les livres par 20, & le produit eſt 22700 ſols, auſquels ajoutant les 12 ſols, la ſomme eſt 22712 ſols; je reduis ces ſols en deniers en les multipliant par 12, & le produit eſt 272544 deniers, auſquels ajoutant les 5 deniers, la ſomme eſt 272549 deniers; enfin je reduis ces deniers en tiers en les multipliant par 3, & le produit eſt 817647, auquel ajoutant 1 tiers que j'ai, la ſomme eſt 817648 tiers de deniers.

Je réduis auſſi le diviſeur 327 toiſes 3 pieds 6 pouces en pieds, en multipliant 327 par 6 à cauſe que la toiſe contient 6 pieds, & le produit eſt 1962 pieds, auſquels ajoutant les 3 pieds, la ſomme eſt 1963 pieds; je réduis ces pieds en pouces, en les multipliant par 12, à cauſe que le pied contient 12 pouces, & le produit eſt 23580 auquel ajoutant les 6 pouces, la ſomme eſt 23586 pouces.

1135	
20	
22700	
12	
22712 *ſols*	
12	
45424	
22712	
272544	
5	
272549 *deniers*	
3	
817647	
1	
817648 *tiers*	
6	
4905888 *dividende*	

327	
6	
1962	
3	
1965 *pieds*	
12	
3930	
1965	
23580	
6	
23586 *pieds*	
20	
471720	
3	
1415160 *diviſeur*	

Le dividende & le diviſeur ſont donc réduits par là à leurs derniéres eſpeces ; mais afin de conſerver le même rapport qu'ils avoient avant ces multiplications, je tâche de faire en ſorte qu'ils ſe trouvent également multipliés par les mêmes nombres, & pour cela je multiplie les tiers de deniers par 6, à cauſe que les 327 ont été multipliées par 6, & je multiplie les pouces par 20 & par 3, à cauſe que les 1135 livres ont été multipliées par 20 & par 3, par ce moyen le dividende & le diviſeur ſe trouvant multipliés l'un & l'autre par 20, 12, 6, & 3, ſont entr'eux dans le même rapport que ſi on ne les avoit pas multipliés.

Ces multiplications faites, je diviſe le dividende 4905888 par le diviſeur 1415160, & achevant le reſte comme dans l'exemple précédent, je trouve 3 livres 9 ſols 4 deniers pour le prix de la toiſe, & c'eſt la preuve du troiſiéme exemple de la multiplication compoſée.

1415160
4905888 (3#
660408
20
13208160

1415160
13208160 (9 *ſ.*
471720
12
943440
471720
5660640

1415160
5660640 (4 *den.*
000000

IV. EXEMPLE. *Un homme a acheté 535 aunes $\frac{1}{4}$ d'étoffe qui lui ont coûté 1719 livres 9 ſols 9 deniers $\frac{3}{4}$, combien l'aune lui a-t'il coûté?*

Je réduis les livres en ſols, les ſols en deniers, & les deniers en quarts, ce qui donne 1650711 quarts de deniers, je réduits de même les aunes en quarts, ce qui donne 2141 quarts d'aunes.

1719# 9*ſols* 4 *den.*
20
34380
9
34389 *ſols*
12
68778
34389
412668
9
412677
4
1650708
3
1650711 *quarts de den.*

535 *aunes* $\frac{1}{4}$
4
2140
1
2141 *quarts d'aune*
20
42820
12
85640
42820
513840 *diviſeur*

513840
1650711 (3#
109191
20
2183820

513840
2183820 (4 *ſ.*
128460
12
256920
128460
1541520

513840
1541520 (3 *den.*
0000000

Or

Or comme les aunes n'ont été multipliées que par 4, tandis que les livres ont été multipliées par 20, par 12, & par 4; je multiplie les 2141 quarts d'aunes par 20 & par 12, afin que le dividende & le diviſeur ſoient entr'eux dans le même rapport qu'ils étoient avant la multiplication, & par conſéquent j'ai pour dividende 1650711, & pour diviſeur 513840.

Je diviſe le dividende par le diviſeur, & évaluant les fractions à l'ordinaire, je trouve 3 livres 4 ſols 3 deniers pour la valeur de l'aune, & ceci eſt la preuve du quatriéme Exemple de la multiplication compoſée.

55. Ce ſeroit ici le lieu d'expliquer les autres opérations de l'Arithmétique, mais comme les démonſtrations de ces régles dépendent des principes que je donnerai dans les Chapitres ſuivans, je n'en parlerai qu'en leur lieu, pour être plus court & en même tems plus clair.

CHAPITRE V.

De l'Algebre.

56. LA difficulté, l'ennui, & ſouvent même l'impoſſibilité que l'on trouve à réſoudre grand nombre de queſtions & de problêmes concernant les nombres, lorſqu'on veut ſe ſervir des régles ordinaires de l'Arithmetique, ont été cauſe qu'on a cherché une autre méthode, qui par les principes les plus ſimples nous mît en état de découvrir les vérités propoſées ſans fatiguer trop l'eſprit. Cette méthode fut nommée par ſes Auteurs *Arithmetique ſpécieuſe* ou *Logiſtique ſpécieuſe*; & comme elle ne rouloit que ſur les nombres, les uns y employoient les chiffres ordinaires avec les lettres nommées *Majuſcules* à l'exemple de *Diophante* d'Alexandrie, & les autres à l'imitation de *Viete* ne ſe ſervoient que des lettres majuſcules. Les préceptes de cette ſcience étoient extrêmement ſimples & très naturels; mais la maniere obſcure dont on annonçoit la plûpart des choſes, les dénominations barbares que l'on donnoit à certaines quantités, & les expreſſions embarraſſantes que l'on y employoit la rendoit ſi dégoûtante, qu'il ſe trouvoit très-peu de perſonnes qui vouluſſent s'en accommoder. Dans la ſuite Mr. Deſcartes, non-ſeulement la délivra de tout ce qui la rendoit ſi hériſſée en donnant des dénominations plus faciles,

des expreſſions plus courtes, & en ſubſtituant les petites lettres de l'alphabet au lieu des grandes; mais encore il la perfectionna, & l'étendit à la quantité continuë, qui eſt l'objet de la Géometrie. C'eſt cette méthode que l'on nomme aujourd'hui *Analyſe* pour les raiſons que nous dirons dans le chapitre ſuivant, où nous expliquerons ſes préceptes, & la maniere de les mettre en uſage.

57. *L'Algébre* eſt la ſcience qui apprend à faire les opérations de l'Arithmetique ſur les lettres de l'alphabet.

58. Les caracteres que l'on employe dans l'arithmetique ayant une valeur déterminée, il eſt ſûr que ſi on veut les ajouter, les ſouſtraire, les multiplier ou les diviſer, on peut trouver d'autres caracteres qui repréſentent leur ſomme, ou leur reſte, ou leur produit, ou leur quotient. Mais il n'en eſt pas de même des lettres de l'alphabet; car comme on peut ſuppoſer que la lettre *a* ou la lettre *b* repréſente un nombre tantôt plus grand, tantôt moindre, ſelon les differentes queſtions que l'on veut réſoudre, on ne ſçauroit dire qu'une troiſiéme lettre *c*, ou *d* ſoit leur ſomme, ou leur reſte, &c. Sans faire des ſuppoſitions qui ſeroient fort embarraſſantes, ſur tout lorſque le calcul viendroit un peu long. C'eſt pourquoi on a trouvé des ſignes qui d'un côté préviennent ces embarras, & qui de l'autre mettent tant de netteté dans les opérations, qu'après avoir reſolu la queſtion propoſée, on voit d'un coup d'œil & le point d'où l'on eſt parti, & tous les pas que l'on a faits. Ces ſignes ſont les ſuivans.

Des Signes de l'Algébre.

59. Le ſigne + ſignifie *plus*, & marque l'addition; $a+b$ fait voir que la grandeur exprimée par la lettre *b* eſt ajoutée à la grandeur exprimée par la lettre *a*.

60. Le ſigne — ſignifie *moins*, & marque la ſouſtraction; $a-d$ ſignifie que la grandeur *d* eſt retranchée de la grandeur *a*.

61. Le ſigne × eſt la marque de la multiplication; $a \times b$ c'eſt la grandeur *a* multipliée par la grandeur *b*. Ordinairement on retranche ce ſigne, & l'on ſe contente de joindre enſemble les lettres que l'on veut multiplier. Ainſi *ab* ſignifie que *a* eſt multiplié par *b*.

62. Lorſqu'on écrit une ou pluſieurs lettres au-deſſus du ſigne — & une ou pluſieurs lettres au deſſous, cela ſignifie que ce qui eſt au-deſſus eſt diviſé par ce qui eſt en deſſous. $\frac{a}{b}$ fait voir

que la grandeur a eſt diviſée par la grandeur b; $\frac{ab}{cd}$ ſignifie que le produit de a par b eſt diviſé par le produit de c par d; $\frac{a+d}{c-b}$ marque que la ſomme des deux quantités a, d eſt diviſée par c, duquel on a retranché b, ou par la difference de c à b; car cette difference n'eſt autre choſe que ce qui reſte après qu'on a retranché la grandeur b de la grandeur c.

63. Le ſigne $=$ ſignifie que la grandeur qui eſt à gauche de ce ſigne, eſt égale à celle qui eſt à droite. $a=b$ marque que a eſt égal à b; $ab=cd$ ſignifie que le produit de a par b eſt égal au produir de la grandeur c par la grandeur d; $a+b=c+d$ marque que la ſomme des grandeurs a, b, eſt égale à la ſomme des grandeurs c, d, & ainſi des autres; on trouve dans quelques Auteurs le ſigne $\propto$ au lieu du ſigne $=$; mais ce dernier eſt aujourd'hui le plus uſité.

64. Quand une grandeur eſt égale à une autre, cela ſe nomme *Equation* ou *Egalité*: la grandeur qui eſt à gauche du ſigne $=$ ſe nomme premier *membre* de l'Equation, & celle qui eſt à gauche ſe nomme ſecond *membre*. Dans l'Equation $a=b$, la grandeur a eſt le premier membre, & la grandeur b eſt le ſecond; de même dans l'Equation $a+b=c-d$, la grandeur $a+b$ eſt le premier membre, & la grandeur $c-d$ eſt le ſecond, & ainſi des autres.

65. Le ſigne $>$ marque que la grandeur qui eſt à gauche de ce ſigne, eſt plus grande que celle qui eſt à droite. $a>b$ ſignifie que a eſt plus grand que b; $a+b>e+f$ ſignifie que $a+b$ eſt plus grande que la ſomme des grandeurs e, f.

66. Le ſigne $<$ marque que la grandeur miſe à gauche eſt moindre que la grandeur miſe à droite. $a<b$ ſignifie que a eſt moindre que b.

67. Ce ſont là les ſignes les plus frequens dans l'Algébre; quand aux autres nous les expliquerons en leur lieu.

Des grandeurs complexes & incomplexes, poſitives & négatives.

68. Par le mot de *grandeur* en général on entend tout ce qui peut s'augmenter ou ſe diminuer, & qui par conſéquent a des parties. Il y en a de deux ſortes, l'une qu'on nomme *ſucceſſive*, parce que ſes parties ſe ſuccedent les unes aux autres ſans exiſter jamais toutes à la fois, comme la durée ou le tems, & l'aurre qu'on nomme *permanente*, parce que ſes parties exiſtent en même tems. La grandeur *permanente* ſe diviſe encore en grandeur ou quantité *diſ-*

crete dont les parties ne ſont pas liées, telles que ſont les nombres, & tous les aſſemblages où la continuité & la liaiſon des parties ne ſont pas néceſſaires; & en grandeur ou quantité *continuë*, c'eſt-à-dire, dont les parties ont une étroite liaiſon, telles que ſont toutes les choſes materielles. Comme l'Algébre peut employer ſon calcul ſur ces differentes eſpeces de grandeurs, on a donné le nom de *grandeur* en général aux lettres dont elle ſe ſert.

69. La grandeur *complexe* eſt une grandeur compoſée de deux ou pluſieurs autres grandeurs, entre leſquelles ſe trouvent le ſigne + ou le ſigne —; ainſi $a+b$ eſt une grandeur complexe, de même que $a+c-d$. Mais ab quoique formée par le produit de deux lettres n'eſt pas une grandeur complexe, parce qu'il ne ſe trouve entr'elles ni le ſigne + ni le ſigne —.

70. La grandeur *incomplexe* eſt celle qui n'eſt pas liée avec une ou pluſieurs autres par le ſigne + ou par le ſigne —. Ainſi a eſt une grandeur incomplexe, & le produit ab l'eſt auſſi.

71. La grandeur *poſitive* ou *réelle* eſt une grandeur qui a le ſigne + ou qui n'en a point du tout, parce qu'alors on ſous-entend qu'elle a le ſigne +. Ordinairement la lettre qui commence une expreſſion algébrique n'a point de ſigne; ainſi l'on écrit $a+b$ au lieu de mettre $+a+b$; mais ſi cette premiere lettre avoit le ſigne —, alors il faudroit abſolument écrire $-a+b$; car ſi on ne mettoit pas ce ſigne —, on ſous-entendroit que la lettre a auroit le ſigne +, ce qui ſeroit faux.

72. La grandeur *négative* ou fauſſe eſt une grandeur qui a le ſigne —, & qu'on devroit appeller plutôt un défaut de grandeur. Un homme qui n'ayant rien doit 10 écus, eſt certainement au-deſſous du rien, puiſqu'il faudroit lui donner 10 écus pour payer ſa dette, & faire que ſon bien fût égal à zero; ainſi les 10 écus qu'il doit ſont une grandeur négative ou un défaut qui le mettent au-deſſous du rien. De même une longueur de 70 toiſes comparée à une grandeur de 80, eſt égale à 80 moins dix, c'eſt-à-dire qu'il faudroit lui donner 10 pour la rendre égale à 80: donc ce 10 qu'elle n'a pas eſt pour elle une grandeur négative ou un défaut, & ainſi des autres. Au reſte, cette façon de parler n'eſt pas particuliere à l'Algébre; car tous les jours dans les converſations on dit fort bien qu'un homme a 100 moins 2 ans, qu'un autre a 20 écus moins dix ſols, &c.

De l'Addition des grandeurs littérales.

73. Pour ajouter deux ou pluſieurs grandeurs incomplexes, on les écrit de ſuite en mettant entr'elles les ſignes qu'elles ont; pour ajouter $+a$ avec $+b$, ou a avec b, on écrit $a+b$; pour ajouter les quatre grandeurs poſitives a, b, c, d, on écrit $a+b+c+d$; & pour ajouter les trois grandeurs $a, b, -d$, dont la derniere eſt négative, on écrit $a+b-d$, & non pas $+d$, parce qu'ajouter un défaut, c'eſt retrancher une grandeur poſitive: ſi j'ai 20 écus, & qu'on me charge d'une dette de 10, c'eſt comme ſi on me retranchoit 10 écus.

74. Si parmi les grandeurs incomplexes qu'on veut ajouter, il s'en trouve quelques-unes qui ſoient exprimées par une même lettre, & qui ayent le même ſigne, on n'écrit qu'une fois cette lettre, & l'on met à ſa gauche le caractere arithmetique qui marque le nombre des grandeurs exprimées par la même lettre. Pour ajouter les grandeurs a, a, a, b, b, on écrit $3a+2b$, au lieu d'écrire $a+a+a+b+b$, & cela s'appelle *corriger l'expreſſion*, c'eſt-à-dire la rendre plus ſimple & plus nette, ce qu'il ne faut jamais négliger, parce que la netteté des expreſſions partage moins l'attention de l'eſprit, & contribuë à la netteté des idées.

Que ſi parmi les grandeurs exprimées par la même lettre, les unes avoient le ſigne $+$ & les autres le ſigne $-$; on prendroit le nombre qui exprime combien il y en a qui ont le ſigne $+$, & le nombre qui exprime combien il y en a qui ont le ſigne $-$, & retranchant ce dernier nombre du premier, on écriroit une fois la lettre qui exprime l'une de ces grandeurs, & à gauche de cette lettre on mettroit le reſte de la ſouſtraction; ainſi pour ajouter les grandeurs $a, a, a, a, -a, -a$, on écriroit $-2a$; car les quatre premieres ayant le ſigne $+$ feroient $4a$, ou $+4a$, & les deux autres ayant le ſigne $-$ feroient $-2a$; or $4a-2a$, c'eſt la même choſe que de retrancher $2a$ de $4a$, ce qui fait $+2a$, & par conſéquent $4a-2a$ feroient $+2a$ ou ſimplement $2a$. Si j'ai 4 écus, & qu'on me charge d'une dette de 2 écus, je n'en aurai plus que 2.

Enfin ſi le nombre qui exprime combien il y a de grandeurs qui ont le ſigne $+$, & qui ſont exprimées par la même lettre, eſt moindre que celui qui exprime combien il y en a qui ont le ſigne $-$, & qui ſont exprimées auſſi par la même lettre, on ne pourra retrancher ce ſecond nombre du premier, mais on retranchera le premier du ſecond, & on écrira le reſte avec le ſigne $-$. Ainſi pour ajouter

les grandeurs a, a, $-a$, $-a$, $-a$, $-a$, les deux premieres ayant le ſigne $+$, feront $2a$ ou $+2a$, & les quatre dernieres ayant le ſigne $-$, feront $-4a$. Ainſi ajoutant $2a$ avec $-4a$ on auroit $2a-4a$ ou $-2a$; car ſi j'ai 2 écus, & qu'on me charge d'une dette de 4, il eſt clair qu'après avoir donné les 2 écus que j'avois, je devrai encore 2 écus.

Il faut bien prendre garde à ces ſortes de corrections, car autrement le calcul algébrique deviendroit embroüillé & embarraſſant.

L'addition des grandeurs complexes ſe fait de même que l'addition des incomplexes, en obſervant ce qui vient d'être dit.

Pour ajouter $a+b$ avec $c+d$, on écrit $a+b+c+d$. De même pour ajouter $a+b$ avec $e+f$ on écrit $a+b+e-f$.

Pour ajouter $4a+2b+d$ avec $3a+3b+e$, on écrit les grandeurs exprimées par les mêmes lettres les unes ſous les autres, enſuite on dit $4a$ & $3a$ font $7a$; $2b$ & $3b$ font $5b$, après quoi on écrit $+d+e$.

$$\begin{array}{r} 4a+2b+d \\ 3a+3b+e \\ \hline 7a+5b+d+e \end{array}$$

Pour ajouter $8a+5b+d$ avec $5a-2b-f$, on écrit les grandeurs marquées par les mêmes lettres les unes ſous les autres, enſuite on dit $8a$ & $5a$ font $13a$; $5b$ moins $2b$ font $+3b$, après quoi on écrit $+d-f$.

$$\begin{array}{r} 8a+5b+d \\ 5a-2b-f \\ \hline 13a+3b+d-f \end{array}$$

Pour ajouter $5a+2b+f$ avec $-6a-3b-f$, on écrit les grandeurs de même nom les unes ſous les autres, & l'on dir $5a$ moins $6a$ fait moins un a, ou $-a$; $2b-3b$ fait moins un b, ou $-b$; $f-f$ ne fait rien, parce qu'un de reçu & un de donné, il ne reſte rien, ainſi la ſomme eſt $-a-b$, & de même des autres.

$$\begin{array}{r} 5a+2b+f \\ -6a-3b-f \\ \hline -a-b \end{array}$$

De la Souſtraction des grandeurs littérales.

75. La ſouſtraction des grandeurs littérales incomplexes ſe fait en changeant toujours le ſigne de la grandeur qui doit être ſouſtraite.

Si l'on veut ſouſtraire $+a$ de $+b$, on écrit $b-a$. Car ſi de 10 écus que j'ai on m'en retranche 4, il m'en reſtera $10-4$.

Pour ſouſtraire $+c$ de $-d$, on écrit $-d-c$. Si je dois dix écus, & qu'on m'en retranche encore 5, ou qu'on m'en faſſe devoir encore 5, il eſt clair que je devrai payer $10+5$, & que par

conſéquent mon bien ſera diminué non-ſeulement de 10, mais encore de 5.

Si l'on veut ſouſtraire $-a$ de $+b$, on écrit $b+a$; car ſi tandis que j'ai 10 écus on me retranche une dette de 4 écus, ce qu'on ne peut faire qu'en me donnant ces 4 écus, on voit bien que j'aurai 14 écus ou 10 écus plus 4.

Pour ſouſtraire $-a$ de $-b$, on écrit $+b+a$; car ſi je dois 10 écus, & que quelqu'un ſupprime une partie de cette dette, par exemple 4 écus, ce qu'il ne peut faire qu'en me donnant 4 écus, il eſt ſûr que je devrai 10 d'un côté, mais que j'aurai 4 de l'autre, ainſi j'aurai $-10+4$.

76. La Souſtraction des grandeurs complexes ſe fait de même que celle des grandeurs incomplexes, en obſervant ce que nous avons dit ci-deſſus touchant la correction des expreſſions.

Pour ſouſtraire $a+b$ de $c+d$, on écrit $c+d-a-b$. De même pour ſouſtraire $a-c$ de $d-f$, on écrit $d-f-a+c$, & ainſi des autres.

Pour ſouſtraire $2a+2b+c$, de $5a+4b+d$, on écrit les grandeurs marquées des mêmes lettres les unes ſous les autres, enſuite on dit: de $5a$ ôtez $2a$, il reſte $3a$; de $4b$ ôtez $2b$, il reſte $2b$, & de d ôtez c, il reſte $d-c$.

$$\begin{array}{r} 5a+4b+d \\ 2a+2b+c \\ \hline 3a+2b+d-c \end{array}$$

Pour ſouſtraire $3a-4b-2d$; de $6a+2b-4d$, on dit: de $6a$ ôtez $3a$, il reſte $3a$, de $2b$ ôtez $-4b$, il reſte $6b$; car puiſqu'il faut changer le ſigne $-$ en $+$, j'ai $2b+4b$ qui font $6b$; de $-4d$ ôtez $-2d$, il reſte $-2d$; car puiſqu'il faut changer le ſigne de $-2d$ en $+$, j'ai $-4d+2d$, mais $+2d$ effacent $-2d$ de $-4d$, à cauſe que $-$ & $+$ ſe détruiſent, ainſi il reſte $-2d$.

$$\begin{array}{r} 6a+2b-4d \\ 3a-4b-2d \\ \hline 3a+6b-2d \end{array}$$

Pour ſouſtraire $6a+4b-3d$ de $4a+3b-2d$, on dit: de $4a$ ôtez $6a$, il reſte $-2a$, car $4a-6a$ ſont la même choſe que $-2a$, puiſque dans $-6a$ il y a $-4a$ qui effacent $+4a$, & il reſte $-2a$; de $3b$ ôtez $4b$, il reſte $-b$, & de $-2d$ ôtez $-3d$, il reſte $+d$; car puiſqu'il faut changer le ſigne de $-3d$, j'ai $-2d+3d$; or dans $+3d$, il y a $2d$ qui effacent $-2d$, & il reſte encore un d, & par conſéquent j'ai $+d$, & ainſi des autres.

$$\begin{array}{r} 4a+3b-2d \\ 6a+4b-3d \\ \hline -2a-b+d \end{array}$$

De la Multiplication des grandeurs littérales.

77. Si les deux grandeurs que l'on veut multiplier l'une par l'autre ont toutes les deux le ſigne +, ou toutes les deux le ſigne —, le produit a toujours le ſigne +, & ſi l'une ayant le ſigne +, l'autre ayant le ſigne —, le produit a toujours le ſigne —, d'où l'on tire cette régle. *Plus par plus, ou moins par moins, donne plus, & plus par moins, ou moins par plus, donne moins.*

DEMONSTRATION. Nous avons dit (*N.* 11.) que dans la multiplication on doit prendre le nombre à multiplier autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur. Donc 1°. ſuppoſant que le nombre à multiplier ſoit *a*, & le multiplicateur *b*, & que l'un & l'autre ſoient poſitifs, il faudra prendre la grandeur poſitive *a* autant de fois que la grandeur poſitive *b* contiendra d'unités; c'eſt pourquoi ſi *b* contient 3 unités, le produit *ab* ſera la grandeur poſitive $3a$, & par conſéquent *ab* aura le ſigne plus. 2°. Si le nombre à multiplier *a* eſt poſitif, & le multiplicateur *b* eſt négatif, c'eſt-à-dire s'il eſt $-b$ ou -3, il faudra prendre la grandeur poſitive *a*, non pas 3 fois, mais -3 fois, parce que le multiplicateut ne contient pas 3 unités, mais -3 unités; ainſi le produit *ab* ſera la même choſe que la grandeur négative $-3a$, & ſon ſigne ſera négatif; car prendre une grandeur -3 fois, c'eſt la ſouſtraire 3 fois. 3°. Si le nombre à multiplier *a* eſt négatif, c'eſt-à-dire s'il eſt $-a$, & que le multiplicateur *b* ſoit poſitif, il faudra prendre le défaut $-a$ autant de fois qu'il y a d'unités dans *b* ou 3; & par conſéquent le produit *ab* ſera la même choſe que $-3a$, & ſon ſigne ſera encore négatif. 4°. Enfin ſi *a* & *b* ont tous deux le ſigne moins, il faudra prendre le défaut $-a$, non pas 3 fois, mais -3 fois, à cauſe que *b* ou 3 ayant le ſigne moins, ne contient pas 3 unités, mais -3 unités. Or prendre -3 fois, c'eſt ſouſtraire 3 fois, & ſouſtraire 3 fois un défaut ou une dette, c'eſt donner 3 fois ce qu'il faut pour la réparer, puiſqu'il n'eſt pas poſſible qu'on éteigne une dette que j'aurois, ſi on ne me donnoit ce qui eſt néceſſaire pour la payer. Donc prendre -3 fois le défaut $-a$, c'eſt donner $3a$, & par conſéquent le produit *ab* eſt la même choſe que $3a$, & ſon ſigne eſt poſitif. Donc la régle que nous venons de donner eſt véritable.

78. La multiplication des grandeurs complexes ſe fait à peu près comme la multiplication des nombres, & l'on y obſerve les régles que nous venons de donner touchant les ſignes. En voici quelques exemples. Ier.

Ier. Exemple. Pour multiplier $a+b$ par $a+c$, on écrit le multiplicateur $a+c$ ſous la grandeur à multiplier, & l'on multiplie tous les termes de la grandeur à multiplier par le premier terme a du multiplicateur. $+a$ par $+a$ donne $+aa$; $+b$ par $+a$ donne $+ab$; enſuite on multiplie tous les termes de la grandeur à multiplier par le ſecond terme c du multiplicateur; $+a$ par $+c$ donne $+ac$, & $+b$ par $+c$ donne $+bc$; ainſi le produit eſt $aa+ab+ac+bc$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+c \\ \hline aa+ab+ac+bc \end{array}$$

II. Exemple. Pour multiplier $a+b+c$ par $a+b+d$, j'écris le multiplicateur $a+b+d$ ſous la grandeur à multiplier $a+b+c$, & je multiplie d'abord tous les termes $a+b+c$ par le premier terme a du multiplicateur. $+a$ par $+a$ donne $+aa$; $+b$ par $+a$ donne $+ab$; & $+c$ par $+a$ donne $+ac$.

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ a+b+d \\ \hline aa+ab+ac \\ \quad +ab+bb+bc \\ \quad\quad +ad+bd+cd \\ \hline aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd \end{array}$$

Je multiplie tous les termes $a+b+c$ par le ſecond terme b du multiplicateur. $+a$ par $+b$ donne $+ab$, & comme j'ai déja un produit $+ab$, j'écris celui-ci ſous le premier, ce qu'il faut toujours obſerver lorſqu'il ſe trouve des produits qui ont les mêmes lettres; $+b$ par $+b$ donne $+bb$; & $+c$ par $+b$ donne $+bc$.

Enfin je multiplie de la même façon tous les termes $a+b+c$ par le troiſiéme terme d du multiplicateur, ce qui donne $+ad+bd+cd$, & corrigeant l'expreſſion, c'eſt-à-dire mettant $+2ab$ au lieu de $+ab+ab$, le produit eſt $aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd$.

III. Exemple. Pour multiplier $a+b$ par $a-b$; je multiplie les termes $a+b$ par le premier terme a du multiplicateur, ce qui donne $aa+ab$. Je multiplie les mêmes termes par le ſecond terme $-b$ du multiplicateur, en diſant: $+a$ par $-b$ donne $-ab$ que j'écris ſous $+ab$, & $+b$ par $-b$ donne $-bb$. Je corrige l'expreſſion en effaçant $+ab-ab$, à cauſe que ces grandeurs ſe détruiſent par des ſignes contraires, & le produit eſt $aa-bb$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ \quad -ab-bb \\ \hline aa\quad -bb \end{array}$$

IV. Exemple. Pour multiplier $a+b-c$ par $a-b+c$, je multiplie tous les termes $a+b-c$ par le premier terme a du multiplicateur, ce qui donne $aa+ab-ac$. Je multiplie les mêmes termes par le second terme $-b$ du multiplicateur, ce qui donne $-ab-bb+bc$ que j'écris en mettant $-ab$ ſous $+ab$; je multiplie les mêmes termes par le troiſiéme terme $+c$ du multiplicateur, ce qui donne $+ac+bc-cc$ que j'écris en mettant $+ac$ ſous $-ac$, & $+bc$ ſous $+bc$; je corrige l'expreſſion en effaçant $+ab-ab$, & $-ac+ac$, parce que ces grandeurs ſe détruiſent par des ſignes contraires, & en mettant $+2bc$ au lieu de $+bc+bc$; & le produit eſt $aa-bb+2bc-cc$.

$$\begin{array}{r} a+b-c \\ a-b+c \\ \hline aa+ab-ac \\ -ab \quad -bb+bc \\ +ac \quad +bc-cc \\ \hline aa \quad -bb+2bc-cc \end{array}$$

79. Remarque. Il faut prendre garde que dans les produits de deux ou pluſieurs lettres, chaque lettre conſerve ſa valeur, ſoit qu'elle ſoit miſe ou après les autres, ou entre deux; ainſi ab ou ba ſont la même choſe: de même abc, bac, bca, cab, cba ont toujours la même valeur. De même $ab+bc$, ou $bc+ab$ ne ſont pas différens, & en ceci l'Algébre différe beaucoup de l'Arithmetique, dont on ne ſçauroit déranger aucun caractére ſans changer ſa valeur.

De la Diviſion des grandeurs littérales.

80. Il en eſt des ſignes $+$ & $-$ à l'égard de la diviſion, de même qu'à l'égard de la multiplication; c'eſt-à-dire que ſi l'on diviſe $+$ par $+$ ou $-$ par $-$, le quotient a le ſigne $+$; & ſi l'on diviſe $+$ par $-$, ou $-$ par $+$, le quotient a le ſigne $-$.

Demonstration. Suppoſons que le dividende ſoit 6, & le diviſeur 2. 1°. Si l'un & l'autre ont le ſigne $+$, le dividende 6 contiendra poſitivement le diviſeur 2, trois fois, ainſi le quotient 3 aura le ſigne $+$. 2°. Si l'un & l'autre ont le ſigne $-$, le défaut -6 contiendra poſitivement 3 fois le défaut -2; & par conſéquent le quotient 3 aura encore le ſigne $+$. 3°. Si le dividende eſt -6 & le diviſeur $+2$, le défaut -6 ne contiendra pas 3 fois la grandeur poſitive, mais trois fois le défaut de 2, ainſi le quotient 3 aura le ſigne $-$. 4°. Si le dividende eſt $+6$, & le diviſeur -2, la grandeur poſitive 6 ne contiendra pas trois fois le dé-

faut — 2, mais trois fois ſon contraire ou la grandeur poſitive 2, donc le quotient 3 aura le ſigne —.

Et pour être encore plus convaincu de ceci, il n'y a qu'à obſerver que le diviſeur étant exact dans la ſuppoſition que nous venons de faire, il faut néceſſairement que le produit du diviſeur par le quotient ſoit égal au dividende (*N.* 29.). Or cela ne ſçauroit être ſi le quotient n'avoit pas le ſigne que notre régle lui donne; car dans le premier cas ſi le quotient étoit — 3, le produit de — 3 par le diviſeur + 2 donne — 6, au lieu que le dividende eſt + 6. Dans le ſecond cas, ſi le quotient étoit — 3, le produit de — 3 par le diviſeur — 2 donne + 6, au lieu que le dividende eſt — 6. Dans le troiſiéme cas, ſi le quotient étoit + 3 par le diviſeur, + 2 donneroit + 6 & non pas — 6. Enfin dans le troiſiéme cas, ſi le quotient étoit + 3, le produit de + 3 par le diviſeur — 2 donneroit — 6 au lieu de + 6.

81. La même choſe arriveroit encore ſi le diviſeur n'étoit pas exact. Suppoſons que le dividende ſoit 7 & le diviſeur 2, le quotient ſera 3 avec un reſte 1. Or ſi 7 & 2 ſont poſitifs, le quotient doit être poſitif, parce que + 3 par + 2 font plus 6, lequel ajouté au reſte 1 fait + 7 égal au dividende 7. Si 7 & 2 ſont négatifs, le quotient ſera poſitif; car + 3 par — 2 fait — 6, lequel ajouté au reſte — 1, qui eſt négatif, puiſque c'eſt le reſte de — 7, la ſomme eſt — 7 égale au dividende — 7. Si 7 eſt négatif, & 2 eſt poſitif, le quotient doit avoir —, parce que — 3 par + 2 fait — 6, lequel ajouté au reſte 1 qui eſt encore négatif, à cauſe que c'eſt le reſte de — 7, la ſomme eſt — 7 égale au dividende: enfin ſi 7 eſt poſitif & 2 eſt négatif, le quotient doit être négatif, à cauſe que — 3 par — 2 fait + 6, lequel étant ajouté au reſte 1 qui eſt poſitif, puiſque c'eſt le reſte de + 7, donne la ſomme + 7 égale au dividende.

82. Pour diviſer + a par + b, ou — a par — b, on écrira + $\frac{a}{b}$, ou $\frac{a}{b}$, & pour diviſer — a par + b, ou + a par — b, on écrira — $\frac{a}{b}$.

83. Si le dividende & le diviſeur étoient exprimés par une même lettre a, on écriroit + 1 au lieu de $\frac{a}{a}$, ou — 1 au lieu de — $\frac{a}{a}$; car le quotient 1 multiplié par le diviſeur + a donne le dividende a, & le même quotient 1 multiplié par le diviſeur — a donne le dividende — a. De même le quotient — 1 multiplié par le

diviſeur $-a$, donne le dividende $+a$, & le quotient -1 multiplié par le diviſeur $+a$, donne le dividende $-a$.

Pour marquer la diviſion de ab par b, au lieu d'écrire $\frac{ab}{b}$ on écrira ſimplement a, parce que le quotient a multiplié par b donne le dividende ab, par la même raiſon, au lieu d'écrire $\frac{aac}{aa}$ on écrira c; au lieu d'écrire $\frac{acb}{cb}$ on écrit a, & ainſi des autres; d'où l'on voit que *quand il y a des grandeurs marquées par les mêmes lettres au dividende & au diviſeur, il faut les effacer en même nombre de fois de part & d'autre*, & c'eſt une regle qu'il faut obſerver pour abréger les expreſſions. Ainſi au lieu de $\frac{aabbc}{abc}$ on écrira ab: au lieu de $\frac{abc}{abd}$ on écrira $\frac{c}{d}$; au lieu de $\frac{aabbcdef}{abbcde}$ on écrira af, ce qui, comme on voit, abrége beaucoup, & donne plus de clarté.

84. S'il y avoit des nombres à gauche du dividende & du diviſeur, on diviſeroit ces deux nombres à la façon ordinaire, & l'on mettroit le quotient à gauche du quotient littéral. Pour abréger l'expreſſion $\frac{6aabbcd}{3abcd}$ on diviſeroit 6 par 3, ce qui donne 2, & l'on écriroit $2ab$: pour abréger l'expreſſion $\frac{9aaccd}{3acce}$, on écriroit $\frac{3acd}{e}$, & ainſi des autres.

Mais ſi la diviſion des chiffres ne pouvoit ſe faire exactement, on les laiſſeroit ſubſiſter; on écriroit donc $\frac{7aab}{3a}$, au lieu de $\frac{7aaab}{3a}$, &c.

85. La diviſion des grandeurs complexes ſe fait à peu près comme la diviſion ordinaire, & l'on y obſerve les régles que nous avons données touchant les ſignes $+$, & en voici quelques exemples qui ſerviront de preuve à ceux que nous avons donné touchant la multiplication des grandeurs complexes.

1er. EXEMPLE. Pour diviſer $aa+ab+ac+bc$ par $a+c$, je mene une ligne ſous le dividende, & une autre à droite pour y placer le quotient, enſuite j'écris le diviſeur $a+c$ ſous le dividende, en mettant ſes termes ſous ceux du dividende qui ont les mêmes lettres. Je dis donc aa diviſé

$aa+ab+ac+bc$	$(a+b$
$a \quad +c$	
$+ab \quad +bc$	
$a \quad +c$	
0	0

par $+a$ donne au quotient a (*N.* 82.) je multiplie les caractéres du quotient par le diviſeur, & je retranche le produit du dividende en diſant : $+a$ par $+a$ donne $+aa$, & de $+aa$ ôtez $+aa$, il ne reſte rien, & je mets un point ſur le terme aa du dividende, pour marquer qu'il a été diviſé ; $+a$ par $+c$ fait $+ac$, & du terme $+ac$ du dividende ôtez le produit $+ac$, il ne reſte rien, & je marque un point ſur ac.

Je mene une ligne ſous $a+c$, & abaiſſant les deux termes $+ab+ac$ du dividende qui n'ont pas été diviſés, j'écris ſous eux le diviſeur $a+c$, & je dis $+ab$ diviſé par $+a$ donne au quotient $+b$, je multiplie ce quotient par $a+c$, & retranchant le produit $ab+bc$ des termes $ab+bc$ du dividende, il ne reſte rien : ainſi le quotient eſt $a+b$, & c'eſt la preuve du premier exemple de la multiplication des grandeurs complexes ; car notre dividende étoit le produit dans cet exemple, & notre diviſeur étoit le multiplicateur, & par conſéquent notre quotient $a+b$ a dû être le nombre à multiplier.

II. EXEMPLE.

$$\begin{array}{l|l} aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd & a+b+d \\ \hline a+b+c & \\ \hline +ab \quad +bb+bc & \\ \quad a \quad +b+c & \\ \hline +ad+bd+cd & \\ +a+b+c & \\ \hline 0\quad 0\quad 0 & \end{array}$$

Pour diviſer $aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd$ par $a+b+c$, j'écris le dividende & le diviſeur comme dans l'Exemple précédent, enſuite je dis aa diviſé par $+a$ donne a au quotient ; je multiplie les termes $a+b+c$ du diviſeur par le quotient, & j'ai a par $+a$ donne aa, & du terme aa du dividende retranchant aa, il ne reſte rien. a par $+b$ donne ab, & de $+2ab$ retranchant ab, il reſte ab que j'écris au-deſſous, en mettant un point ſur $2ab$ de même que ſur aa, pour marquer qu'ils ont été diviſés, ce qui doit toujours être obſervé ; a par $+c$ donne $+ac$, & de $+ac$ retranchant $+ac$, il ne reſte rien.

J'abaiſſe les termes $bb+bc$ du dividende, & j'écris par-deſſous le diviſeur $a+b+c$, puis je dis $+ab$ diviſé par a donne au

quotient $+b$, & multipliant ce quotient par le diviſeur, & retranchant le produit des termes $ab+bb+bc$, il ne reſte rien; j'abbaiſſe les trois derniers termes $ad+db+cd$, & écrivant le diviſeur $a+b+c$, je trouve au quotient $+d$, & achevant le reſte de la même façon, il ne reſte rien; ainſi le quotient total eſt $a+b+d$, & c'eſt la preuve du ſecond exemple de la multiplication des grandeurs complexes.

86. *Remarque.* Il arrive ſouvent que la diviſion ſemble ne pouvoir pas ſe faire, parce qu'il manque au diviſeur des termes qui contiennent quelqu'un des termes du diviſeur, lorſqu'il ſe trouve multiplié par le quotient; cependant il y a bien des cas où la diviſion devient poſſible, en donnant au dividende la grandeur qui lui manque une fois ſous le ſigne $+$, & une autre fois ſous le ſigne $-$, ce qui eſt la même choſe que ſi on ne lui donnoit rien: les deux exemples ſuivans feront mieux comprendre ceci.

III. Exemple. Pour diviſer $aa-bb$ par $a-b$, je dis aa diviſé par $+a$ donne $+a$ au quotient. Je multiplie le diviſeur par ce quotient, en diſant: a par $+a$ donne $+aa$, & du terme aa du dividende ôtant $+aa$ il ne reſte rien. a par $-b$ donne $-ab$; or il n'y a point de terme dans le dividende qui contienne le produit ab; ainſi il ſemble que la diviſion ne puiſſe pas ſe faire; cependant voici comme je m'y prens. Je ſuppoſe que le dividende outre les termes $aa-bb$ contient encore les termes $+ab-ab$, ce qui ne l'augmente ni le diminue, puiſque $+ab-ab$ n'eſt rien; & je dis: du produit $-ab$ du dividende ôtant le produit $-ab$ du quotient par le caractere $-b$ du diviſeur, il ne reſte rien. J'abbaiſſe les deux termes $+ab-bb$ du dividende, & écrivant le diviſeur par deſſous, je dis: $+ab$ diviſé par a donne b au quotient, multipliant donc ce quotient par le diviſeur $a-b$, j'ai $ab-bb$ qui ôté de $ab-bb$ ne laiſſe rien; ainſi le quotient total eſt $a+b$, & c'eſt la preuve du troiſiéme exemple de la multiplication.

$$\begin{array}{l|l} aa-bb & a+b \\ \hline a-b & \\ \hline +ab-bb & \\ \quad a-b & \\ \hline \quad 0\ \ 0 & \end{array}$$

IV. Exemple. Pour diviſer $aa-bb+2bc-cc$ par $a-b+c$, je dis aa diviſé par $+a$ donne au quotient $+a$, & multipliant ce diviſeur par ce quotient, j'aurai aa, qui retranché de aa ne laiſſe rien; a par $-b$ donne $-ab$, & de $-ab$ que je ſuppoſe être au dividende il ne reſte rien; mais à cauſe que j'ai ſuppoſé au dividende $-ab$, ce qui n'eſt pas vrai, j'écris $+ab$ au-deſſous, ainſi $+$

$ab - ab$ que je donne au dividende ne l'augmentent ni ne le diminuent. a par $+c$ donne $+ac$, & de $+ac$ que je ſuppoſe au dividende, ôtant $+ac$, il ne reſte rien; mais j'écris $-ac$ par-deſſous, afin de corriger ma ſuppoſition.

$$\begin{array}{l|l} aa - bb + 2bc - cc & a - b + c \\ \hline & \\ + ab - ac - bb + 2bc & \\ a \quad - b + c & \\ \hline - ac + bc - cc & \\ a \quad - b + c & \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array} \quad a + b - c$$

J'abbaiſſe les termes $-bb + 2bc$ du dividende à côté de $+ab - ac$, & j'écris le diviſeur par deſſous en diſant: ab diviſé par $+a$, donne b au quotient; je multiplie ce quotient par le diviſeur, b par $+a$ donne ab, qui retranché de ab ne laiſſe rien, b par $-b$ donne $-bb$, & de $-bb$ ôtez $-bb$, il ne reſte rien; b par $+c$ donne $+bc$, & de $+2bc$ ôtez bc, il reſte bc que j'écris au-deſſous.

J'abaiſſe les termes reſtans $-ac - cc$ du dividende, & écrivant le diviſeur par deſſous, il me vient $-c$ au quotient, j'acheve le reſte à l'ordinaire, & le quotient total eſt $a + b - c$. C'eſt la preuve du quatriéme exemple de la multiplication.

87. Si par le moyen de ces ſortes de ſuppoſitions la diviſion ne pouvoit pas ſe faire, on écriroit le diviſeur ſous le dividende, de même qu'on fait pour les fractions.

Des Puiſſances des grandeurs incomplexes.

88. On appelle *puiſſances* d'une grandeur, les différens degrés par leſquels elle s'éléve en ſe multipliant elle même ſucceſſivement 2 fois, 3 fois, 4 fois, &c à l'infini: les anciens appelloient premiere *puiſſance* d'une grandeur, le produit de cette grandeur multipliée par elle-même, c'eſt à dire ſon quarré; mais aujourd'hui on appelle premiere puiſſance la grandeur priſe en elle-même. Ainſi a eſt la premiere puiſſance de a; multipliant a par a, le produit aa eſt la ſeconde puiſſance ou le *quarré* de a; multipliant aa par a, le produit aaa eſt la troiſiéme puiſſance ou le cube de a; & ainſi de ſuite: de ſorte que $aaaa$ eſt la quatriéme puiſſance, $aaaaa$ eſt la cinquiéme puiſſance, &c. ce que l'on peut continuer à l'infini.

89. La grandeur a eſt la racine de toutes ſes puiſſances; c'eſt-à-dire a eſt la racine quarrée de ſa ſeconde puiſſance ou de ſon

quarré *aa*, il eſt la racine troiſiéme de ſa troiſiéme puiſſance ou de ſon cube *aaa*; la racine quatriéme de ſa quatriéme puiſſance *aaaa*, &c.

90. Pour abréger l'expreſſion de ces puiſſances, on n'écrit qu'une fois la lettre avec un petit chiffre à droite un peu élevé, lequel marque combien de fois la lettre devroit être écrite; ainſi au lieu de *aa*, *aaa*, *aaaa*, *aaaaa*, &c. on écrit a^2, a^3, a^4, a^5, &c. ce qui ſignifie *a* élevé au quarré, au cube ou à la troiſiéme puiſſance, à la quatriéme, à la cinquiéme, &c. ces chiffres ſe nomment *expoſants*, parce qu'ils marquent à quel degré la grandeur eſt élevée.

91. Il ne faut pas confondre ces *expoſants* avec les chiffres qui ſe trouvent quelquefois à gauche d'une grandeur algébrique: Ceux-ci ſe nomment *coëfficients*, & marquent une addition réïterée de la grandeur qui eſt à leur droite: au lieu que les *expoſants* marquent la multiplication réïterée de la grandeur par elle-même, ce qui eſt bien différent. Par exemple ſi *a* vaut 3, l'expreſſion $4a$ marquera que *a* doit être pris 4 fois, ce qui fait 12, & au contraire a^4 marquera que *a* doit être multiplié par lui-même pour faire *aa* ou a^2, ce qui fait d'abord 9, qu'enſuite a^2 doit être multiplié par *a*, ce qui fait *aaa* ou a^3, & par conſéquent 27; & enfin que a^3 doit être multiplié encore par *a*, ce qui donne *aaaa* ou a^4; & par conſéquent 81 qui eſt différent de 12 ou de $4a$.

Des Puiſſances des grandeurs complexes.

92. Les grandeurs complexes prennent différens noms ſelon qu'elles ont plus ou moins de termes; on les nomme *binomes* lorſqu'elles ont deux termes; *trinomes* quand elles en ont trois; *quadrinomes* quand elles en ont quatre, &c. & en général on les nomme *multinomes*, $a+b$ eſt un binome; $c+d+e$ eſt un trinome, &c.

93. De même qu'on peut élever les grandeurs incomplexes à la ſeconde puiſſance, à la troiſiéme, à la quatriéme, &c. on peut élever auſſi les grandeurs complexes aux mêmes puiſſances; & ces grandeurs venant à ſe multiplier elles-mêmes, donnent des produits qui ont toujours plus de termes qu'elles, & dont il eſt bon de connoître la formation.

Pour cela, prenons un binome dont nous ferons ſucceſſivement les puiſſances, après quoi ce qui arrivera dans ces différentes multiplications, nous fera juger aiſément de ce qui doit arriver aux termes des trinomes, quadrinomes, &c.

94. Soit

94. Soit donc le binome $a+b$, je le multiplie par lui-même, ce qui me donne le quarré $aa+2ab+bb$; je multiplie ce quarré par $a+b$, & j'ai le cube $a^3+3a^2b+3abb+b^3$; je multiplie ce cube par $a+b$, ce qui donne la quatriéme puiſſance $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$, & continuant de la même façon, je trouve les autres puiſſances de $a+b$ telles qu'on les voit dans la table ſuivante qu'on nomme Table des puiſſances.

Table des Puiſſances d'un Binome.

1re. *Puiſſance.*	a	b				
2e.	a^2	$2ab$	bb			
3e.	a^3	$3a^2b$	$3abb$	b^3		
4e.	a^4	$4a^3b$	$6a^2bb$	$4ab^3$	b^4	
5e.	a^5	$5a^4b$	$10a^3bb$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	b^5

Cette Table contient deux ſortes de rangs : les uns qui vont de gauche à droite, & qui contiennent les puiſſances de $a+b$, & les autres qui vont de haut en bas; & les cellules de tous ces rangs ſont remplies de différens produits qui ont tous leurs *coëfficients*, ou des nombres à leur gauche; car ceux qui n'en ont point ſont cenſés avoir l'unité pour coëfficient, puiſque b^3 ou b^4 eſt la même choſe que $1b^3$ ou $1b^4$.

Si nous ne faiſons attention qu'aux produits littéraux, nous trouverons que les cellules de chaque rang de gauche à droite contiennent les puiſſances du premier terme a, leſquelles vont en diminuant juſqu'à la derniere cellule où le terme a ne ſe trouve point; & qu'au contraire les puiſſances de b vont en augmentant dans ces mêmes cellules, depuis la ſeconde où b eſt à la premiere puiſſance, juſqu'à la derniere où b ſe trouve élevé à la même puiſſance que a eſt dans la premiere cellule.

Pour ſçavoir comment ſe forment les coëfficients, il n'y a qu'à examiner 1°. que dans le premier rang à gauche qui va de haut en bas, les puiſſances de a qui ſe trouvent dans ſes cellules, n'ont d'autre coëfficient que l'unité. 2°. Que dans le ſecond rang de haut en bas, les coëfficients qui ſe trouvent dans ſes cellules ſont les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. 3°. Que dans le troiſiéme du haut en bas les coëfficients des produits litteraux ſont les ſommes ſucceſſives des coëfficients du rang de haut en bas qui eſt à

gauche, ou qui précéde celui ci. Ainſi les coëfficients du rang précédent étant 1, 2, 3, 4 & 5, on trouve que le coefficient de la premiere cellule du troiſiéme rang eſt 1, que le coëfficient de la ſeconde eſt 3, c'eſt-à-dire la ſomme des coëfficients 1, 2, du rang précédent ; que le coëfficient de la troiſiéme cellule eſt 6, c'eſt-à-dire la ſomme des coëfficients 1, 2, 3, du rang précédent, & ainſi de ſuite. 4°. On trouvera de même que les coëfficients du 4e. rang du haut en bas, ſont les ſommes ſucceſſives des coëfficiens du 3e. rang, & ainſi des autres. De ſorte que pour avoir le coëfficient d'une cellule quelconque de l'un de ces rangs, par exemple le coëfficient 6 de la troiſiéme cellule du troiſiéme rang du haut en bas, on n'a qu'à prendre le coëfficient 3 de la cellule qui lui eſt ſuperieure, & l'ajouter au coëfficient 3 de la cellule qui eſt à gauche de celle-ci, ce qui fera le coëfficient 6 que l'on cherche ; car le coëfficient 3 de la cellule ſuperieure étant la ſomme des coëfficients 1 & 2 du rang précédent, ſi on ajoute à cette ſomme le coëfficient 3 du rang à gauche, la ſomme 6 ſera la ſomme des coëfficients 1, 2, 3, du rang précédent, & par conſéquent elle ſera le coëfficient demandé.

Par le moyen de ceci on peut continuer la table à l'infini, ſans être obligé de faire les multiplications qu'il faudroit faire pour avoir les puiſſances que cette table ne contient pas ; par exemple pour avoir la ſixiéme puiſſance de $a+b$, je fais un ſixiéme rang de gauche à droite, & je mets dans ſes ſix premieres cellules a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a ; & en commençant depuis la ſeconde juſqu'à la ſeptiéme, je mets b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6 ; ainſi j'aurai déja tous les produits litteraux a^6, a^5b, a^4bb, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6, & il ne reſte plus que les coëfficients ; & pour cela je mets dans la ſeconde cellule le coëfficient 6, parce que cette cellule ſe trouvera dans le ſecond rang du haut en bas, qui comprend les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Dans la troiſiéme je mets la ſomme 15 du coëfficient 10 de la cellule de la cinquiéme puiſſance qui ſera au-deſſus de ma troiſiéme, & du coëfficient 5 de la cellule du cinquiéme rang qui eſt à gauche de celle qui a le coëfficient 10, & continuant de la même façon, j'aurai $a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$, qui ſera la ſixiéme puiſſance de $a+b$, & ainſi des autres.

95. Si le ſecond terme b avoit le ſigne $-$ au lieu du ſigne $+$, les puiſſances du binome $a-b$ ſeroient les mêmes que celles du binome $a+b$, à l'exception que leurs termes auroient alternati-

vement le ſigne + & le ſigne —. Ainſi le quarré de $a-b$ ſeroit $aa-2ab+bb$, ſon cube ſeroit $a^3-3aab+3abb-b^3$, & de même des autres.

96. La table des puiſſances que nous venons de donner, nous fait donc voir 1°. *Que le quarré du binome* a + b *contient le quarré* aa *de ſon premier terme* a, *deux produits du premier terme* a *par le ſecond* b, *ou le double du premier terme* a *multiplié par le ſecond* b, *& le quarré* bb *du ſecond.* 2°. *Que le cube de* a + b *contient le cube* a^3 *du premier terme* a, *trois quarrés du premier par le ſecond, trois fois le premier multiplié par le quarré du ſecond & le cube du ſecond.* Et il eſt facile d'examiner de la même façon quels ſont les produits contenus dans les autres puiſſances.

97. Maintenant pour ſçavoir ce qui arriveroit à un multinome de quelque nombre de termes qu'il fût, prenons un trinome $a+b+c$, & concevons que ſes deux premiers termes $a+b$ n'en faſſent qu'un, ce qui pourroit arriver aiſément ſi nous mettions leur valeur en nombre, & que nous fiſſions la ſomme des deux. Ainſi ce trinome n'eſt plus qu'un binome, dont le premier terme eſt $a+b$, & le ſecond eſt c. Donc le quarré de ce binome contient le quarré de ſon premier terme $a+b$, le double de ce terme multiplié par le ſecond, & le quarré du ſecond. Mais le premier terme $a+b$ étant lui-même un binome, ſon quarré contient le quarré de a, le double de a multiplié par b, & le quarré de b. Donc le quarré du trinome $a+b+c$ contient le quarré du premier terme a, le double du premier par le ſecond, le quarré du ſecond, le double des deux premiers par le troiſiéme & le quarré du troiſiéme.

De même ſi nous conſiderons le quadrinome $a+b+c+d$, comme un binome, dont le premier terme eſt $a+b+c$, & le ſecond eſt d, le quarré de ce binome contient le quarré du premier terme $a+b+c$, le double de celui-ci multiplié par le ſecond, & le quarré du ſecond; mais le premier terme $a+b+c$ étant lui-même un trinome, contient le quarré de a, le double de a multiplié par b, le quarré de b, le double de $a+b$ multiplié par c, & le quarré de c. Donc le quarré du quadrinome $a+b+c+d$ contient le quarré du premier terme, le double du premier multiplié par le ſecond, le quarré du ſecond, le double des deux premiers multiplié par le troiſiéme, le quarré du troiſiéme, le double des trois premiers multiplié par le quatriéme, & le quarré du quatriéme; & en faiſant le même raiſonnement à l'égard d'un

multinome de 5 termes, de 6, de 7, &c. on aura la régle générale ou le Théoreme ſuivant.

98. THEOREME. *Le quarré d'un multinome quelconque contient le quarré de ſon premier terme : le double du premier multiplié par le ſecond, le quarre du ſecond : le double des deux premiers multiplié par le troiſiéme, le quarré du troiſiéme : le double des trois premiers multiplié par le quatriéme, le quarré du quatriéme ;* & ainſi de ſuite.

99. Pour trouver les produits que contiennent les cubes des trinomes, quadrinomes, prenons le trinome $a+b+c$, & conſiderons le comme un binome dont le premier terme eſt $a+b$, & le ſecond eſt c, le cube de ce binome contiendra le cube du premier terme $a+b$, trois quarrés de ce premier terme multipliés par le ſecond c, trois quarrés du ſecond multipliés par le premier, & le cube du ſecond (*N.* 94.). Or le premier terme $a+b$ étant lui-même un binome, contient le cube de a, trois quarrés de a multipliés par b, trois quarrés de b multipliés par a, & le cube de b. Donc le cube du trinome $a+b+c$ contient le cube du premier terme : trois quarrés du premier multipliés par le ſecond : trois quarrés du ſecond multipliés par le premier, le cube du ſecond : trois quarrés de la ſomme des deux premiers multipliés par le troiſiéme : trois quarrés du troiſiéme multipliés par la ſomme des deux premiers, & le cube du troiſiéme. Et faiſant les mêmes obſervations ſur un quadrinome, un quinquinome, &c. on aura la regle générale ou le Théoreme ſuivant.

100. THEOREME. *Le cube d'un multinome quelconque contient le cube du premier terme, trois quarrés du premier multipliés par le ſecond, trois quarrés du ſecond multipliés par le premier : le cube du ſecond, trois quarrés de la ſomme des deux premiers, multipliés par le troiſiéme, trois quarrés du troiſiéme multipliés par la ſomme des deux premiers : le cube du troiſiéme, trois quarrés de la ſomme des trois premiers, multipliés par le quatriéme, trois quarrés du quatriéme multipliés par la ſomme des trois premiers : le cube du quatriéme, &c.* ainſi de ſuite.

101. On peut de la même façon trouver quels ſont les termes contenus dans les puiſſances quatriémes, cinquiémes, ſixiémes, &c. des multinomes qui ont plus de deux termes.

De l'Extraction des Racines des grandeurs littérales.

102. *Extraire* la *Racine* d'une grandeur, c'eſt chercher le nombre qui, en ſe multipliant une ou pluſieurs fois, a produit cette

grandeur. La racine d'un quarré, ou la racine quarrée, eſt le nombre qui, en ſe multipliant une fois, a produit le quarré. La racine d'un cube, ou la racine cubique, ou la racine troiſiéme, eſt le nombre qui, en ſe multipliant deux fois ſucceſſivement, a produit le cube : la racine quatriéme eſt le nombre qui, en ſe multipliant trois fois ſucceſſivement, a produit la quatriéme puiſſance, &c.

103. Quand la grandeur dont on veut extraire une racine quelconque, eſt une grandeur incomplexe, on connoît aiſément ſi la racine qu'on cherche peut s'extraire, ou ſi elle ne le peut pas. Par exemple il eſt évident que la racine quarrée de aa eſt a, que la racine quarrée de $aabb$ eſt ab ; que la racine cubique de aaa ou a^3 eſt a, que celle de a^3c^3 eſt ac, & ainſi des autres. Au contraire on voit bien que la racine quarrée ou cubique de ac ne peut s'extraire non plus que celle de a, de bd, &c.

104. Quand on ne peut pas extraire la racine d'une grandeur, on écrit à gauche de cette grandeur le ſigne $\surd$, qu'on nomme le ſigne radical, & l'on met au-deſſus le nombre qui marque le dégré de cette racine : $\sqrt[2]{a}$ ou ſimplement $\surd a$, eſt la racine quarrée de a ; $\sqrt[3]{b}$ eſt la racine cubique ou troiſiéme de b ; $\sqrt[4]{ac}$ eſt la racine quatriéme de ac ; ces ſortes de racines ſe nomment *ſourdes*, ou *irrationnelles*, ou *incommenſurables*, parce qu'on ne peut pas exprimer le rapport qu'elles ont avec quelqu'autre grandeur connuë que ce ſoit.

105. Quand la grandeur ſimple dont on veut extraire une racine quelconque eſt une fraction, on extrait la racine du numérateur, & celle du dénominateur, & l'on en fait une nouvelle fraction, qui eſt la racine cherchée. La racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$ eſt $\frac{a}{b}$, la racine cubique de $\frac{c^3}{d^3}$ eſt $\frac{c}{d}$, celle de $\frac{a^3c^3}{b^3}$ eſt $\frac{ac}{b}$, la racine quatriéme de $\frac{a^4b^4}{c^4b^4}$ eſt $\frac{ab}{cd}$. La racine quarrée de $\frac{ac}{ab}$, eſt $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ab}}$ ou ſimplement $\frac{\surd ac}{\surd ab}$, ou encore $\surd\frac{ac}{ab}$, en faiſant en ſorte que la jambe du ſigne radical embraſſe le numérateur & le dénominateur. La racine cubique de $\frac{abc}{df}$ eſt $\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{df}}$, ou $\surd\frac{abc}{df}$, &c.

106. Les racines des grandeurs complexes ſe tirent par le moyen de la table que nous avons donnée ci-devant. En voici quelques exemples.

Ier. EXEMPLE. Pour extraire la racine quarrée de $cc+2cd+dd$ je tire une ligne ſous cette grandeur, & une à droite pour écrire après elle les termes de la racine que je cherche, après quoi conſultant la table ou le Théorême du nombre 98. je vois que le quarré propoſé contient le quarré de ſon premier terme, le double du premier multiplié par le ſecond, le quarré du ſecond, &c. donc ſi en retranchant de la grandeur propoſée ces différens produits il ne reſte rien, ce ſera une marque que cette grandeur eſt un quarré, & j'en aurai la racine cherchée. Je dis donc le premier quarré en allant de gauche à droite eſt cc dont la racine eſt c; j'écris c au lieu marqué pour la racine, & je l'écris auſſi ſous le quarré cc. Je multiplie la racine c par elle-même, c'eſt à dire par la lettre c que j'ai écrite ſous le quarré cc, & le produit eſt cc, lequel étant retranché de cc ne laiſſe rien; ainſi le quarré propoſé ne contient plus le quarré que je viens de retrancher; c'eſt pourquoi je mets un point ſur le quarré cc pour marquer qu'il a été retranché.

$$\begin{array}{l} \dot{cc}+\dot{2cd}+\dot{dd}\,(c+d \\ \hline c+2c \quad d \end{array}$$

Je double la racine c que je viens de trouver, ce qui fait $2c$, & comme $2c$ multiplié par la ſeconde racine eſt dans le reſte du quarré propoſé, j'écris $2c$ ſous le terme $2cd$, & je diviſe $2cd$ par $2c$, ce qui donne d, lequel doit être la ſeconde racine; car puiſque le terme $2cd$ eſt le produit de $2c$ multiplié par la ſeconde racine, il eſt ſûr par les regles de la multiplication & de la diviſion, qu'en diviſant $2cd$ par le nombre à multiplier $2c$, le quotient doit être le multiplicateur, & par conſéquent doit être d. Je multiplie la racine ou le quotient d par le diviſeur $2c$, ce qui donne $2cd$, de $2cd$ ôtez $2cd$, il ne reſte rien, & je mets un point.

Or le quarré propoſé doit encore contenir le quarré de la ſeconde racine d, ainſi j'écris d ſous le terme dd de la grandeur propoſée, & multipliant d par lui-même ou par la ſeconde racine d, le produit eſt dd, lequel retranché de dd ne laiſſe rien: la racine cherchée eſt donc $c+d$.

II. EXEMPLE. Pour extraire la racine quarrée de $bb+2bc+cc+2bd+2cd+dd$.

Je dis le premier terme à gauche eſt bb dont la racine eſt b que j'écris au lieu deſtiné pour la racine, & ſous la grandeur bb, je multiplie b par b, ce qui donne bb, lequel retran-

$$\begin{array}{l} \dot{bb}+\dot{2bc}+\dot{cc}+\dot{2bd}+\dot{2cd}+\dot{dd}\,(b+c+d \\ \hline b+2b \quad +c \quad +2b \quad +2c \quad +d \end{array}$$

ché de bb ne laiſſe rien, & je mets un point ſur le terme bb.

Je double la racine trouvée b, ce qui fait $2b$ que j'écris ſous le terme $2bc$, & diviſant ce terme par $2b$, la ſeconde racine eſt c que j'écris ; je multiplie $2b$ par c, & le produit eſt $2bc$, lequel retranché de $2bc$ ne laiſſe rien. J'écris c ſous le terme cc, & multipliant c par la racine c, le produit eſt cc, lequel retranché de cc ne laiſſe rien.

Je double les deux premieres racines, ce qui fait $2b+2c$ que j'écris ſous les termes $2bd+2cd$, & diviſant ces termes par $2b+2c$, le quotient d eſt la troiſiéme racine. Je multiplie cette racine par $2b+cd$, ce qui donne $2bd+2cd$, lequel retranché de $2bd+2cd$, ne laiſſe rien ; j'écris d ſous le dernier terme dd, & multipliant d par la troiſiéme racine d, le produit eſt dd, lequel retranché de dd, ne laiſſe rien. Ainſi la racine cherchée eſt $b+c+d$.

III. Exemple. Pour extraire la racine quarrée de $cc-2cd+dd$ je trouve que la premiere racine eſt c dont le quarré étant retranché du terme cc ne laiſſe rien. Je double la premiere racine, ce qui fait $+2c$, & diviſant $-2cd$ par $+2c$, le quotient eſt $-d$. Je multiplie $-d$ par $+2c$, ce qui donne $-2cd$, lequel retranché de $-2cd$ ne laiſſe rien. J'écris $-d$ ſous le terme dd, & multipliant $-d$ par la racine $-d$, le produit eſt $+dd$, lequel retranché de $+dd$ ne laiſſe rien.

$$\begin{array}{r|l} \dot{cc}-2cd+dd & c-d \\ \hline c+2c-d & \end{array}$$

IV. Exemple. Pour extraire la racine cubique de $c^3+3ccd+3cdd+d^3$; je dis, en ſuivant les préceptes du Théorême du nombre 100 : la racine cubique du premier terme c^3 eſt c, & faiſant le cube c^3 de cette racine, je le retranche du terme c^3, & il ne reſte rien ; je fais le quarré cc de cette premiere racine, je le multiplie par 3, ce qui fait $3cc$, & comme la grandeur propoſée doit contenir $3cc$ multiplié par la ſeconde racine, je diviſe $3ccd$ par $3cc$, & le quotient d eſt la ſeconde racine cherchée. Je multiplie la ſeconde racine d par $3cc$, & le produit $3ccd$ étant retranché de $3ccd$ ne laiſſe rien. Je fais le quarré dd de la ſeconde racine d, & je le multiplie par 3 & par c, parce que la grandeur propoſée doit contenir 3 fois ce quarré multiplié par c, & le produit eſt $3cdd$, lequel retranché du terme $3cdd$ ne laiſſe rien ; enfin faiſant le cube d^3 de la ſeconde racine, & le retranchant du terme d^3 il ne reſte rien, & la racine cherchée eſt $c+d$.

$$\begin{array}{r|l} \dot{c^3}+\dot{3ccd}+\dot{3cdd}+\dot{d^3} & c+d \\ \hline c^3+3cc+3dd+d^3 & \end{array}$$

V. Exemple. Pour extraire la racine quatriéme de $c^4 + 4c^3d + 6c^2dd + 4cd^3 + d^4$, je prens le quatriéme rang de gauche à droite de la table des puiſſances, lequel contient la quatriéme puiſſance du binome $a+b$, & je vois que cette quatriéme puiſſance contient la quatriéme puiſſance du premier terme a, 4 fois le cube de a multiplié par le ſecond terme d, ſix fois le quarré du premier terme a multiplié par le quarré du ſecond, quatre fois le cube du ſecond multiplié par le premier, & la quatriéme puiſſance du ſecond. Je dis donc le premier terme c^4 eſt la quatriéme puiſſance de c; ainſi j'écris c au lieu deſtiné pour les racines; j'éleve c à la quatriéme puiſſance c^4, & retranchant c^4 de c^4 il ne reſte rien. Je fais le cube c^3 de la premiere racine c, & le multipliant par 4 j'ai $4c^3$; je diviſe le terme $4c^3d$ par $4c^3$, & le quotient d eſt la ſeconde racine à cauſe que la grandeur propoſée doit contenir $4c^3$ multiplié par la ſeconde racine; je multiplie $4c^3$ par la ſeconde racine d, ce qui donne $4c^3d$ lequel retranché de $4c^3d$ ne laiſſe rien. Je fais le quarré dd de la ſeconde racine d & je le multiplie par 6, & enſuite par le quarré c^2 de la premiere, ce qui fait $6c^2dd$, qui retranché de $6c^2dd$ ne laiſſe rien. Je fais le cube d^3 de la ſeconde racine, je le multiplie par 4 & par c, ce qui donne $4cd^3$, qui retranché de $4cd^3$ ne laiſſe rien; enfin j'éleve la ſeconde racine à ſa quatriéme puiſſance d^4, & d^4 retranché de d^4 ne laiſſe rien, la racine cherchée eſt donc $c+d$.

$$\begin{array}{r|l} c^4+4c^3d+6c^2dd+4cd^3+d^4 & c+d \\ \hline c^4+4c^3+6c^2dd+4cd^3+d^3 & \end{array}$$

VI. Exemple. Pour extraire la racine quarrée de la grandeur $\frac{aa+2ab+bb}{cc}$ qui eſt une fraction. Je tire la racine du numérateur, laquelle eſt $a+b$, & la racine du numerateur, laquelle eſt c, & j'écris $\frac{a+b}{c}$, & ainſi des autres; la raiſon en eſt qu'une fraction qui ſe multiplie elle-même produit ſon quarré; or pour multiplier une fraction par elle-même, on multiplie le numérateur par lui-même, ce qui donne le quarré du numérateur, & l'on multiplie auſſi le dénominateur par lui-même, ce qui donne le quarré du dénominateur; donc pour extraire la racine, il faut extraire la racine du numérateur & celle du dénominateur.

Il faut dire la même choſe de la racine cubique d'une fraction; car une fraction en ſe multipliant deux fois ſucceſſivement produit ſon cube; or pour cuber une fraction on multiplie ſon numerateur

merateur par lui-même deux fois ſucceſſivement, & ſon dénominateur auſſi ; donc pour extraire la racine cubique, il faut extraire la racine cubique du numerateur, & la racine cubique du dénominateur, & il en eſt de même à l'égard des puiſſances plus élevées des fractions.

VII. EXEMPLE. Pour extraire la racine cubique de a^3+b^3, j'écris $\sqrt[3]{a^3+b^3}$, parce que cette racine ne peut pas s'extraire, & j'obſerve que le ſigne radical s'étende ſur tous les termes de la grandeur propoſée ; de même pour extraire la racine quarrée de $\frac{aa+ab+bc}{cc-dd}$, j'écris $\frac{\sqrt{aa+ab+bc}}{\sqrt{cc-dd}}$, ou $\sqrt{\frac{aa+ab+bc}{cc-dd}}$.

107. Ce que nous venons de dire va nous ſervir pour l'extraction des racines des grandeurs numeriques ; mais comme il n'y a guéres que la racine quarrée, & la racine cubique qui ſoient en uſage, nous nous en tiendrons à ces deux-ci, & ce que nous en dirons fera aiſément juger de ce que l'on devroit faire, ſi l'on étoit obligé d'extraire les racines des grandeurs plus élevées.

De l'Extraction de la Racine quarrée des grandeurs numériques.

108. Pour extraire la racine quarrée des grandeurs numeriques, il faut d'abord connoître les quarrés des dix premiers nombres 1, 2, 3, 4, &c. & ces quarrés ſont tels qu'on les voit dans la Table ſuivante.

Racines	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quarrés	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

109. Quand les quantités dont il faut extraire la racine quarrée ſont plus grandes que le plus grand des quarrés contenus dans la Table, on en extrait la racine de la même façon qu'on extrait la racine quarrée des grandeurs littérales ; mais la difficulté eſt de ſçavoir quelle place occupent les produits qu'il faut retrancher de la quantité propoſée. Pour en venir donc à bout, il n'y a qu'à voir de quelle maniere ſe forme un quarré numerique, & en tirer enſuite des régles pour l'extraction de ſa racine.

Soit donc le nombre 36 qu'il faut élever au quarré, je le multiplie par lui-même en écrivant 36 ſous 36, & je dis 6 fois 6 font 36, j'écris 6 ſous les unités, & j'avance 3 ſous les dixaines au lieu de le retenir ; 6 fois 3 font 18, j'écris 8 ſous les dixaines

& j'avance 1 au lieu de le retenir. Je mutiplie 36 par le ſecond caractere du multiplicateur, en diſant : 3 fois 6 font 18, j'écris 8 ſous les dixaines & j'avance 1 ; 3 fois 3 font 9 & j'écris 9 au rang des centaines ; ainſi cette façon de multiplier quoique différente en apparence de la façon ordinaire, n'altére point le produit total ; j'ajoute tous les produits que j'ai trouvés, & la ſomme eſt 1296. Je coupe ce nombre par tranches de deux en deux, & je vois que le quarré 9 du premier caractere 3 de la racine 36 eſt à gauche de la premiere tranche en prenant les tranches de gauche à droite ; que les deux produits 18, 18, du premier caractére 3 multiplié par le ſecond 6, ſont contenus partie à gauche & partie à droite, & enfin que le quarré 36 du ſecond caractere 6, eſt contenu entre les deux tranches.

```
  36
  36
 ----
 |36|
1|8
1|8
 9|
 ----
12|96|
```

Si l'on faiſoit de la même façon le quarré 104329 de 323, on trouveroit qu'en coupant ce quarré par tranches de deux en deux, tels qu'on les voit ici 10|43|29, le quarré du premier caractére 3 de ſa racine ſeroit contenu dans les caractéres 10 qui ſont à gauche de la premiere tranche ; que le double de ce caractére multiplié par le ſecond 2 ſeroit partie à gauche & partie à droite de la premiere tranche ; que le quarré 4 du ſecond caractere 2 ſeroit à gauche de la ſeconde tranche ; que le double des deux premiers caracteres multiplié par le troiſiéme 3 ſeroit partie à gauche & partie à droite de la ſeconde tranche, & enfin que le quarré 9 du troiſiéme caractére ſeroit à gauche de la troiſiéme tranche, & on trouveroit la même choſe ſi le quarré propoſé avoit un plus grand nombres de tranches ; cela poſé, nous allons donner quelques Exemples de l'Extraction de la racine quarrée, mais auparavant il eſt bon de faire l'obſervation ſuivante.

109. *Remarque.* Les nombres quarrés ſont ainſi nommés, parce que ce ſont les ſeuls qu'on puiſſe ranger de façon qu'ils forment une figure quarrée dont chaque côté contient un même nombre d'unités. Le nombre 4 rangé comme on voit ici, contient à chaque côté deux unités ; le nombre 9 en contient 3 à chaque côté ; le nombre 16 en contient 4 à chaque côté, & ainſi des autres.

```
1   II  III  IIII
    II  III  IIII
    II  III  IIII
        III  IIII
```

Ier. EXEMPLE. *On veut faire un Bataillon quarré d'une troupe compoſée de 3844 hommes, combien y aura-t'il d'hommes de front & d'hommes de file, c'eſt-à-dire combien y aura-t'il d'hommes à chaque côté de ce quarré?*

J'écris le nombre 3844 ſous lequel je mene une ligne, & une autre à ſa droite pour y mettre la racine cherchée. Je coupe ce nombre par tranches de deux en deux caracteres, & je dis le plus grand quarré contenu dans les caracteres 38 qui ſont à gauche de la premiere tranche eſt 36 dont la racine eſt 6; j'écris 6 au lieu deſtiné pour la racine, & 6 ſous 38. Je multiplie la racine 6 par elle-même, ce qui donne 36, & 36 retranché de 38 laiſſe 2, c'eſt pourquoi je mene une ligne ſous le 6 que j'ai mis au-deſſous du nombre propoſé, & j'écris le reſte 2.

```
38|44(62
 6
---
2.44
 122
---
 000
```

J'abbaiſſe les deux autres caracteres 4 & 4 du nombre propoſé leſquels ſe trouvent entre la premiere & la ſeconde tranche, & doublant la premiere racine 6, ce qui fait 12; j'écris 12 ſous 244, en ſorte que ſon dernier caractere 2 ſoit à droite de la premiere tranche & l'autre à gauche, & comme les caracteres 24 du nombre propoſé doivent contenir ce double 12 multiplié par la ſeconde racine; je diviſe 24 par 12 & le quotient 2 eſt la ſeconde racine que j'écris en ſon lieu; je multiplie 12 par la racine 2, ce qui fait 24, lequel retranché de 24 ne laiſſe rien.

J'écris la racine 2 ſous le dernier caractere 4, & multipliant 2 par 2, le produit eſt 4, lequel ôté de 4 ne laiſſe rien, donc la racine eſt 62, & par conſéquent il y aura 62 de front & 62 de file.

110. Lorſqu'en diviſant ce qui reſte de la grandeur propoſée par le double de la premiere racine ou des deux premieres, ou des trois premieres, &c. on trouve un quotient dont le quarré ne peut pas être contenu dans les caracteres de la grandeur propoſée deſquels on doit le retrancher, il faut diminuer ce quotient ou cette racine d'autant d'unités qu'il en faut pour faire que ce quarré puiſſe être retranché, c'eſt ce que nous allons voir dans l'Exemple ſuivant.

II. EXEMPLE. Soit le nombre propoſé 4831204, je le coupe par tranches à la maniere accoutumée, & je vois qu'il y aura quatre racines. Je dis donc le plus grand quarré contenu dans le

caractére à gauche, eſt 4 dont la racine eſt 2, & retranchant le quarré 4 de la racine, du caractere 4 il ne reſte rien. J'abbaiſſe les deux caracteres 83, & doublant la premiere racine, ce qui fait 4, je l'écris ſous 83, c'eſt-à-dire ſous 8 qui eſt immédiatement à droite de la premiere tranche; je diviſe 8 par 4, ce qui donne 2, mais comme après avoir retranché de 8 le produit de la racine 2 par 4, il ne reſteroit plus que 3 qui ne peut pas contenir le quarré 4 de ce quotient 2, je ne mets que 1 au lieu de 2, ainſi 1 fois 4 eſt 4 qui retranché de 8 laiſſe 4, & écrivant la racine 1 ſous le caractere 3, j'ai 1 fois 1 eſt 1 qui retranché de 3 laiſſe 2.

```
4|83|12|04(2198
2
---
 83
 41
---
 42.12
  4 29
-------
 3 51.04
   43 88
---------
    0000
```

J'abbaiſſe les deux caracteres 12 qui ſont entre la ſeconde & la troiſiéme tranche, & doublant les deux premieres racines 21. ce qui fait 42; j'écris 42 ſous 4212, de façon que ſon dernier terme 2 ſoit immédiatement à droite de la ſeconde tranche, de laquelle je marque la place par un point à meſure que j'abbaiſſe les termes du quarré propoſé; or ce double 42 multiplié par la troiſiéme racine, eſt contenu dans les termes 421 du quarré propoſé, diviſant donc 421 par 42 diſpoſé comme il eſt, je trouve 9 pour la troiſiéme racine; car dans 42 le nombre 4 eſt 9 fois, & il reſte beaucoup plus qu'il ne faut pour faire que 2 ſoit contenu auſſi 9 fois, & que le quarré de 9 ſoit contenu dans le reſte joint au dernier caractere 2 de 4212; j'écris donc 9 ſous ce dernier caractere, & je dis 9 fois 9 font 81, lequel ne peut ſe retrancher de 2, mais en empruntant j'ai 82, & de 82 ôtez 81 il reſte 1; 9 fois 2 font 18, & 8 d'emprunté font 26, lequel ne peut être retranché de 1, mais j'emprunte 3, ce qui fait 31, & de 31 ôtez 26 il reſte 5; 9 fois 4 font 36 & 3 font 39, & de 42 ôtez 39, il reſte 3.

J'abbaiſſe les deux derniers caracteres 04 du quarré propoſé, je double les trois premieres racines, ce qui donne 438 que j'écris de façon que ſon dernier caractere ſoit immédiatement à droite de la troiſiéme tranche, & diviſant 3510 par 438 diſpoſé comme il eſt, je trouve 8 pour la troiſiéme racine; j'écris donc 8 à la racine, & ſous le dernier caractere 4 du quarré, après quoi multiplant 4388 par la racine 8, & retranchant le produit du nombre 35104, de même que dans l'opération précédente,

il ne reſte rien, & la racine cherchée eſt 2198.

III. EXEMPLE. Pour extraire la racine quarrée de la fraction $\frac{121}{144}$, j'extrais la racine du numerateur 121 à la façon ordinaire, & cette racine eſt 11 ; j'extrais de même la racine 12 du dénominateur 144, & j'ai $\frac{11}{12}$ qui eſt la racine de la fraction donnée. J'ai donné la démonſtration de ceci dans le ſixiéme exemple de l'extraction des racines des grandeurs littérales (*N.* 101.)

111. Lorſqu'après avoir fait toutes les opérations néceſſaires pour extraire la racine quarrée d'un nombre, on trouve un reſte, cela marque que le nombre donné n'eſt pas un quarré parfait, & que par conſéquent on ne ſçauroit en extraire la racine ; ainſi on marque ce nombre avec le ſigne radical. Soit par exemple 126, j'en extrais ſa racine, & je trouve 11 avec un reſte 5, ce nombre n'eſt donc pas un nombre quarré, c'eſt pourquoi j'exprime ſa racine en écrivant $\sqrt{126}$, nous ferons bientôt voir que ces racines ne peuvent s'exprimer ni par un nombre entier, ni par un nombre rompu, ni par un nombre compoſé d'un entier & d'une fraction, & que cependant on peut approcher de ſa véritable valeur toujours de plus en plus près ſans pouvoir jamais y atteindre. En attendant voici quelques Theorêmes auſquels il eſt bon de faire attention.

112. THEOREME. *Si l'on ajoute à un nombre entier un autre nombre entier, ſi on lui retranche un nombre entier, ou ſi on le multiplie par un autre nombre entier, la ſomme ou le reſte, ou le produit ſera un nombre entier ; mais ſi on le diviſe par un nombre entier, le quotient n'eſt pas toujours un nombre entier.*

Un nombre entier eſt une ſomme exacte d'unités ſans fraction ; ſi l'on ajoute donc deux pareilles ſommes, le total ne peut être qu'un amas d'unités ſans fraction, & ſi d'une ſomme exacte d'unités on ôte une autre ſomme exacte d'unités, mais moindre, le reſte doit être encore une ſomme d'unités ſans fraction, de même comme en multipliant un nombre entier par un autre nombre entier, on prend le premier autant de fois que l'unité eſt contenuë dans le ſecond, & que ce ſecond contient l'unité exactement, il eſt clair qu'on prend la ſomme exacte d'unités du premier un certain nombre de fois ſans fraction, & que par conſéquent le produit doit être ſans fraction. Au contraire quand on diviſe un nombre entier par un autre nombre entier, il peut ſe faire que le diviſeur ne ſoit pas contenu exactement un certain nombre de fois dans le dividende, ce qui donne un reſte qui eſt une fraction.

113. THEOREME. *Si on ajoute à un nombre entier une fraction, ou ſi on lui retranche une fraction, la ſomme ou le reſte ne ſera pas un nombre entier, mais ſi on multiplie ou diviſe un nombre entier par une fraction, le produit ou le quotient peuvent être un nombre entier.*

Si la fraction eſt moindre que l'unité, il eſt clair qu'en ajoutant cette fraction à un nombre entier, la ſomme ſera compoſée d'une ſomme exacte d'unités & d'une fraction, & que ſi on la retranche d'un nombre entier, le reſte ſera une ſomme d'unités moins une partie d'unité, & par conſéquent le reſte ou la ſomme ne ſeront pas des nombres entiers qui contiennent exactement l'unité, mais ſi l'on multiplie ou ſi l'on diviſe un entier par une fraction, il pourra ſe faire que le produit ou le quotient ſoient des nombres entiers. Par exemple, ſi l'on multiplie le nombre entier 3 par $\frac{2}{3}$, le produit $\frac{6}{3}$ ſera un entier qui vaudra 2, & au contraire multipliant 3 par $\frac{2}{4}$, le produit $\frac{6}{4}$ ne ſera pas un entier. De même ſi on diviſe 2 par $\frac{2}{3}$, ou ce qui revient au même, $\frac{6}{3}$ par $\frac{2}{3}$, le quotient 3 ſera un nombre entier, & au contraire ſi l'on diviſe 3 par $\frac{2}{3}$, le quotient $4\frac{1}{2}$ ne ſera pas un nombre entier.

114. THEOREME. *Si une fraction eſt réduite à ſes moindres termes, ſon quarré, ſon cube, &c. ſeront des fractions réduites à leurs moindres termes.*

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ réduite à ſes moindres termes, ſon quarré eſt $\frac{aa}{bb}$, ſi l'on veut que cette fraction ou quarré $\frac{aa}{bb}$ ne ſoit pas réduite à ſes moindres termes, on pourra donc trouver un nombre qui diviſera exactement le numerateur aa & le dénominateur bb. Suppoſons que les deux quotients ſoient xx, yy, en ſorte que la fraction $\frac{xx}{yy}$ ſoit égale à la fraction $\frac{aa}{bb}$ réduite à ſes moindres termes, la racine quarrée de cette fraction ſera donc $\frac{x}{y}$, & cette racine ſera égale à la racine $\frac{a}{b}$ de la fraction $\frac{aa}{bb}$; or à cauſe que les quarrés xx, yy ſont moindres que les quarrés aa, bb, les racines x, y ſeront auſſi moindres que les racines a, b, & par conſéquent la fraction $\frac{a}{b}$ ſera exprimée en termes plus grands que ceux de ſon égale $\frac{x}{y}$; donc cette fraction $\frac{a}{b}$ n'eſt pas réduite à ſes moindres termes, comme on le ſuppoſoit, puiſqu'elle pourroit être exprimée par $\frac{x}{y}$, donc, &c.

115. Nous pourrions ajouter ici grand nombre de Theorême ſur cette matiere; mais les 3 ou 4 ſuivans ſuffiront pour donner tous les éclairciſſemens néceſſaires.

116. THEOREME. *Si deux fractions réduites à leurs moindres termes n'ont pas un même dénominateur, elles ne peuvent être égales.*

Soient les fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ réduites à leurs moindres termes, & dont les dénominateurs ſont différens, ſi l'on veut que ces deux fractions ſoient égales, le numerateur a ſera auſſi grand par rapport à ſon dénominateur b, que le numerateur c par rapport à ſon dénominateur d; c'eſt pourquoi ſi d eſt plus grand que b, le numerateur c ſera plus grand que a, & la fraction $\frac{c}{d}$ ſera exprimée par des termes plus grands que ceux de ſon égale $\frac{a}{b}$, donc cette fraction $\frac{c}{d}$ n'aura pas été réduite à ſes moindres termes comme on le ſuppoſoit, puiſqu'elle pourroit être exprimée par $\frac{a}{b}$; que ſi au contraire d eſt moindre que b, le numerateur c ſera auſſi moindre que le numerateur a, & la fraction $\frac{a}{b}$ étant exprimée par des termes plus grands que ceux de ſon égale $\frac{c}{d}$, n'aura pas été réduite à ſes moindres termes, ce qui eſt encore contre la ſuppoſition, donc, &c.

117. THEOREME. *Si deux fractions qui ont même dénominateur ſont enſemble égales à un entier, & que l'une des deux ſoit réduite à ſes moindres termes, l'autre l'eſt auſſi.*

Soit les fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$ qui ont même dénominateur, & dont la premiere $\frac{a}{b}$ eſt réduite à ſes moindres termes, la ſomme des deux numerateurs $a+c$ eſt égale ou à b, ou à $2b$, ou à $3b$, &c. & par conſéquent cette ſomme eſt un entier, ſi l'on veut que la ſeconde fraction $\frac{c}{b}$ ne ſoit pas réduite à ſes moindres termes, nous trouverons un nombre que je nomme x, lequel diviſant exactement le numérateur & le dénominateur de cette fraction, la réduira à ſes moindres termes; ſi l'on ſuppoſe donc $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{b}{b}$, c'eſt-à-dire $a+c=b$, le nombre x qui diviſe exactement b, diviſera exactement la quantité $a+c$, & comme ce nombre diviſe exactement la partie c de cette quantité, il diviſera exactement

l'autre partie a ; donc on aura un nombre x qui pourra diviſer exactement les termes de la fraction $\frac{a}{b}$, & par conſéquent cette fraction n'aura pas été réduite à ſes moindres termes, ce qui eſt contre la ſuppoſition, & ce ſeroit la même choſe ſi on ſuppoſoit $a+c=2b$; car le nombre x qui diviſeroit exactement b, diviſeroit auſſi exactement $2b$ ou $a+c$, &c.

118. THEOREME. *Si deux fractions réduites à leurs moindres termes, ont le même dénominateur, leur ſomme peut être égale à un entier, mais ſi leurs dénominateurs ſont differens, leur ſomme eſt toujours une fraction plus grande ou moindre que l'unité.*

Soient les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ réduites à leurs moindres termes, & qui ont le même dénominateur, il peut aiſément ſe faire que la ſomme des numerateurs a, c, ſoit égale à b ou à $2b$, &c. par exemple dans les fractions $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, qui ſont réduites à leurs moindres termes, la ſomme $2+3$ des numerateurs eſt égale à 5, & par conſéquent ces deux fractions font $\frac{5}{5}$, ou un entier; de même dans les fractions $\frac{8}{7}$, & $\frac{6}{7}$ réduites à leurs moindres termes, la ſomme $8+6$ des numerateurs eſt double du dénominateur 7, & les deux fractions valent $\frac{14}{7}$, ou deux entiers, & ainſi des autres.

Maintenant ſoient les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ réduites à leurs moindres termes, & dont les dénominateurs ſont différens; je cherche la quantité qu'il faut ajouter au numerateur a pour le rendre égal à ſon dénominateur, & faiſant la fraction $\frac{h}{b}$ la ſomme $\frac{a}{b}+\frac{h}{b}$ ſera égale à $\frac{b}{b}$, & par conſéquent un entier, & à cauſe que la fraction $\frac{a}{b}$ eſt réduite à ſes moindres termes, la fraction $\frac{h}{b}$ le ſera auſſi (*N.* 117.) Si l'on veut donc que les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ priſes enſemble vaillent un entier, je les réduis au même dénominateur, ce qui donne $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$, partant il faut que $ad+cb$ ſoit égal à bd, je multiplie les termes de la fraction $\frac{h}{b}$ par d, ce qui donne $\frac{hd}{bd}$; ainſi à cauſe que les deux $\frac{a}{b}+\frac{h}{b}$ valent un entier, les deux $\frac{ad}{bd}+\frac{hd}{bd}$ qui ſont les mêmes, valent auſſi un entier,

ou

ou 1, or par la ſuppoſition qu'on fait, les deux $\frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}$ valent auſſi 1; donc $\frac{ad}{bd} + \frac{hd}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}$, & retranchant $\frac{ad}{bd}$ de part & d'autre, nous aurons $\frac{hd}{bd} = \frac{cd}{bd}$; mais $\frac{hd}{bd}$ eſt la même que $\frac{h}{b}$, & $\frac{cb}{bd}$ la même que $\frac{c}{d}$, donc les deux fractions $\frac{h}{b}$ & $\frac{c}{d}$ réduites à leurs moindres termes, & qui ont des dénominateurs inégaux, ſont égales, ce qui eſt impoſſible (*N.* 116.) donc il eſt impoſſible auſſi que les deux $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ vaillent enſemble l'unité, ou un entier.

Que ſi on prétend que les deux fractions vaillent deux entiers, ou trois, ou quatre, &c. je cherche ce qui manque au numerateur a de la fraction $\frac{a}{b}$, pour être égal à $2b$, $3b$, &c. & faiſant h égal à cette quantité, je forme la fraction $\frac{h}{b}$; ainſi les deux enſemble $\frac{a}{b} + \frac{h}{b}$ valent ou $\frac{2b}{b}$, ou $\frac{3b}{b}$, &c. c'eſt-à-dire, ou trois unités, ou quatre, ou cinq, &c. & continuant le même raiſonnement, & les mêmes opérations que ci-deſſus, je ferai voir aiſément que les deux $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ne peuvent valoir ni deux unités, ni trois, ni quatre, &c. ni aucun nombre entier, & que par conſéquent leur ſomme eſt une fraction plus ou moins grande que l'unité.

119. THEOREME. *Si l'on multiplie une fraction par elle-même, le produit eſt une fraction, & jamais un entier.*

Si la fraction eſt moindre que l'unité, je la réduis à ſes moindres termes, & ſuppoſant qu'elle ſoit exprimée par $\frac{a}{b}$ ſon quarré eſt $\frac{aa}{bb}$; or à cauſe que a eſt moindre que b, & que pour faire le quarré on a multiplié le numerateur de la fraction $\frac{a}{b}$ par a, & le dénominateur par b plus grand que a, le dénominateur bb du quarré $\frac{aa}{bb}$ eſt plus grand par rapport à ſon numerateur aa, que le dénominateur b de la fraction $\frac{a}{b}$ par rapport à ſon nuumérateur a, & par conſéquent $\frac{aa}{bb}$ eſt moindre que la fraction $\frac{a}{b}$;

mais $\frac{a}{b}$ eſt moindre que l'unité; donc à plus forte raiſon $\frac{aa}{bb}$ eſt moindre que l'unité.

Si la fraction eſt plus grande que l'unité, elle contiendra un ou pluſieurs entiers, plus une fraction moindre que l'unité; ſuppoſant donc que l'entier ou les entiers qu'elle renferme ſoient exprimés par m, & que la fraction reſtante reduite à ſes moindres termes ſoit $\frac{a}{b}$, cette fraction ſera $m + \frac{a}{b}$, & ſon quarré $mm + \frac{2ma}{b} + \frac{aa}{bb}$; or dans ce quarré le premier terme mm eſt un entier, le ſecond $\frac{2ma}{b}$ étant le produit de la fraction $\frac{a}{b}$ par l'entier $2m$, eſt ou entier ou une fraction (*N.* 113.), & le dernier eſt une fraction, puiſqu'il eſt le quarré de la fraction $\frac{a}{b}$ moindre que l'unité; donc ſi les deux premiers termes ſont des entiers leur ſomme ſera un entier (*N.* 112.) & ajoutant à cet entier la fraction $\frac{aa}{bb}$, la ſomme ne ſera pas un entier (*N.* 113.); que ſi le ſecond terme $\frac{2ma}{b}$ eſt une fraction, cette fraction ou ſera réduite à ſes moindres termes, ou ne le ſera pas; ſi elle eſt réduite à ſes moindres termes, il eſt clair que ſon dénominateur ne ſera pas le même que le dénominateur bb du troiſiéme terme $\frac{aa}{bb}$, qui par la ſuppoſition eſt auſſi une fraction réduite à ſes moindres termes (*N.* 114.) ainſi les deux termes $\frac{2ma}{b}$, $\frac{aa}{bb}$ formeront enſemble une fraction plus grande, ou moindre que l'unité (118); mais ſi le ſecond terme $\frac{2ma}{b}$ n'eſt pas réduit à ſes moindres termes, je le réduits, & il eſt clair que ſon dénominateur ſera moindre que b, & par conſéquent moindre que le dénominateur bb du troiſiéme terme $\frac{aa}{bb}$; donc le ſecond & le troiſiéme terme n'ayant pas le même dénominateur, formeront encore enſemble une fraction plus grande ou moindre que l'unité (*N.* 18.); & par conſéquent ces deux termes joints au premier mm, ne feront pas non plus un entier ſans fraction.

120. THEOREME. *Si la racine quarrée d'un nombre entier n'eſt pas un nombre entier, elle ne pourra s'exprimer ni par une fraction,*

ni par un nombre composé d'entier & de fraction.

DEMONSTRATION. Si cette racine pouvoit s'exprimer par une fraction, il s'ensuivroit que le produit de cette fraction par elle-même seroit un nombre entier; ce qui est impossible (*N.* 119.), & si elle pouvoit s'exprimer par un entier & fraction, il s'ensuivroit encore qu'un entier & fraction multiplié par lui-même, seroit un nombre entier, ce qui est aussi impossible (*N.* 119.); donc, &c.

121. COROLLAIRE. Il suit delà que la racine d'un nombre entier qu'on ne peut tirer exactement, ne peut s'exprimer autrement que par le signe radical, puisqu'on ne peut l'exprimer ni par un nombre entier, ni par une fraction, ni par un entier & fraction; c'est l'une des choses que j'avois promis de démontrer. (*N.* 111.)

122. THEOREME. *Si les racines de deux quarrés ne different entr'elle que de l'unité, le plus grand des deux quarrés surpasse le petit de deux fois la racine du petit, plus l'unité.*

DEMONSTRATION. Soit la racine du premier quarré a, celle du second sera donc $a+1$, le quarré de la premiere sera aa, & le quarré de la seconde sera $aa+2a+1$; or si de ce second quarré je retranche le premier quarré aa, il est visible que le reste sera $2a+1$; mais ce reste est le double de la premiere racine a, plus l'unité; donc, &c.

$$\begin{array}{r} a+1 \\ a+1 \\ \hline aa+a+1 \\ +a \\ \hline aa+2a+1 \quad \textit{Quarré.} \\ aa \\ \hline 2a+1 \quad \textit{Reste ou Différence.} \end{array}$$

123. QUESTION. *Avec* 4001 *hommes, on veut faire un Bataillon quarré, & l'on demande au cas qu'il y ait des hommes de trop, combien il faudroit en ajouter ou en retrancher pour faire que le quarré soit parfait, & qu'il ne reste rien.*

SOLUTION. J'extrais la racine quarrée du nombre 4001, & je trouve 63 avec un reste 32, ce qui me fait voir que ce quarré

aura 63 hommes de front & de file, mais qu'il en reſtera 32 ; ſi l'on veut donc employer ces 32, il faut en ajouter un certain nombre, lequel joint au nombre 4001 faſſe un quarré dont la racine ſurpaſſe la racine 63 d'une unité ; or le quarré dont la racine eſt 64, ſurpaſſe le quarré dont la racine eſt 63 de deux fois 63 plus l'unité, c'eſt-à-dire de 126+1, ou de 127 ; donc ſi 4001 étoit exactement le quarré de 63, il faudroit lui ajouter 127 hommes pour avoir le quarré de 64, mais comme 4001 en contient déja 32 de plus, je ne dois lui ajouter que 127 moins 32, c'eſt-à-dire 95 hommes, & la ſomme eſt 4096, dont la racine eſt effectivement 64.

```
40|01(63      127
 6            32
---          ---
 401          95
 123        4001
---        ----
  32        4096

40|96(64
 6
---
 496
 124
---
 000
```

Que ſi on vouloit ſeulement le quarré de 63, il eſt clair qu'en retranchant 32 hommes de 4001, le reſte 3969 ſeroit le quarré de 63.

124. COROLLAIRE. Il ſuit du Theorême précédent que ſi après avoir extrait la racine d'un nombre, il reſte quelque choſe ; ce reſte eſt moindre que le double de la racine trouvée, plus l'unité ; & par conſéquent ce reſte ajouté à la racine trouvée ne peut pas l'augmenter de l'unité ; car, par exemple, ſi après avoir extrait la racine de 4001 qui eſt 63 avec un reſte 32, ce reſte 32 ſe trouvoit égal au double de 63 plus 1, c'eſt-à-dire à 127, le nombre 4001 diminué de 127 ſeroit le quarré de 63 ; or en ajoutant au quarré deux fois ſa racine 63 plus l'unité, c'eſt-à-dire 127, on le feroit devenir le quarré de 64 ; donc 4001 ſeroit exactement le quarré de 64, & par conſéquent en tirant ſa racine, on trouveroit 64, & non pas 63 avec un reſte.

De l'Extraction de la Racine quarrée des grandeurs numeriques par approximation.

125. Quand un nombre entier n'eſt pas un quarré parfait, ſa racine ne peut s'exprimer ni par un nombre entier, ni par une fraction, ni par un entier & fraction (*N.* 120.) ; or tout ce qu'on peut faire dans ces occaſions, c'eſt d'operer de façon que l'on approche ſi près de la veritable racine, que le reſte ſoit moindre qu'une quantité donnée quelque petite qu'elle ſoit, & c'eſt ce

qu'on appelle extraire la racine par approximation. Par exemple si l'on propoſe d'extraire cette racine, en ſorte que ce qui reſtera ſoit moindre qu'un dixiéme d'unité, ou qu'un centiéme, ou qu'un dix-milliéme, &c. la maniere de ſatisfaire à cette queſtion s'appelle extraire la racine quarrée par approximation, cette extraction eſt fondée ſur le Theorême ſuivant.

126. THEOREME. *Si l'on prend l'unité, & qu'à ſa droite on mette un zero, ou deux zeros, ou trois zeros, &c. ce qui donnera les nombres* 10, 100, 1000, 10000, *&c. les quarrés de ces nombres contiendront encore l'unité, plus un nombre de zeros double du nombre de zeros que leurs racines contiennent.*

La Démonſtration de ceci étant tirée de la nature de la multiplication, on la trouvera bientôt ſi l'on multiplie chacun des nombres 10, 100, 1000, &c. par lui-même; car on verra que le quarré de 10 qui eſt 100, contient l'unité plus deux zeros, au lieu que 10 ne contient que l'unité & un zero; que le quarré de 100 qui eſt 10000 contient l'unité plus quatre zeros, au lieu que 100 ne contient que l'unité & deux zeros, & ainſi des autres, cela poſé.

EXEMPLE. Pour extraire la racine de 3 qui n'eſt pas un quarré parfait, je réduis le nombre 3 en une fraction dont le dénominateur ſoit 100, c'eſt-à-dire, je multiplie 3 par 100, ce qui fait 300, & je le diviſe par 100, ce qui fait $\frac{300}{100}$ égale à 3 (*N.* 37.) j'extrais la racine de cette fraction, c'eſt-à-dire j'extrais d'une part la racine du numerateur & de l'autre la racine du dénominateur pour faire de ces deux racines une nouvelle fraction qui ſera la racine cherchée (*N.* 104.); or la racine du dénominateur 100 eſt 10 par le Theorême précédent; donc il ne s'agit plus que de tirer la racine du numerateur 300; j'extrais cette racine à la façon ordinaire & je trouve 17; ainſi la racine de la fraction eſt $\frac{17}{10}$, ou $1\frac{7}{10}$, & il reſte 11 qui eſt moindre qu'une unité de la racine (*N.* 124.) c'eſt-à-dire moindre qu'un dixiéme, & par conſéquent j'ai tiré la racine de 3, & ce qui reſte eſt moindre qu'un dixiéme.

```
3|00(17
1    10
---
2.00
 27
---
 11
```

Si je veux que ce qui reſte ſoit moindre qu'un centiéme, & que par conſéquent la racine trouvée approche davantage de la véritable; je multiplie 3 non pas par 100, mais par 10000, & le diviſant par 10000 j'ai la fraction $\frac{30000}{10000}$ qui eſt égale à 3; or la racine du dénominateur eſt 100 par le Theorême précedent, ainſi je n'ai plus qu'à extraire la racine du numérateur;

& cette racine étant extraite à la façon ordinaire eſt 173, & par conſéquent la racine de la fraction eſt $\frac{173}{100}$, ou $1\frac{73}{100}$ avec un reſte 71 qui eſt moindre qu'un centiéme.

3|00|00 (173
1 — 100
2.00
27
11.00
343
71

Si je veux en approcher davantage, j'ajoute encore deux zeros au numerateur & au dénominateur de la fraction $\frac{30000}{10000}$, ce qui fait $\frac{3000000}{1000000}$; or la racine du dénominateur 1000000 eſt 1000, ainſi extrayant la racine du numerateur qui eſt 1732, je trouve que la racine cherchée eſt $\frac{1732}{1000}$, ou $1\frac{732}{1000}$ avec un reſte 276 qui eſt moindre qu'un milliéme.

Et continuant toujours de la même façon en ajoutant toujours deux zeros au numerateur & au dénominateur, j'approcherois toujours de plus en plus de la véritable valeur de la fraction, ſans pouvoir jamais y atteindre, parce qu'il me reſtera toujours un reſte, à cauſe que la racine de 3 ne pouvant s'extraire en nombre entier, ne ſçauroit s'extraire non plus en nombre rompu ou en nombre compoſé d'entier & de fraction.

3|00|00|00 (1732
1 — 1000
2.00
27
11.00
343
71.00
3462
276

127. La regle eſt donc d'ajouter au nombre dont on veut extraire la racine par approximation, ou deux zeros, ou quatre, ou ſix, &c. toujours en nombre pair, & d'en extraire la racine ſous laquelle on mettra l'unité avec la moitié du nombre de zeros qu'on a ajouté au nombre propoſé, ce qui donnera une fraction qui ſera la racine cherchée, & plus le nombre de zeros ajoutés ſera grand, plus auſſi on approchera de la véritable valeur.

De l'Extraction de la racine cubique des quantités numeriques.

128. Pour extraire la racine cubique d'un nombre, il faut d'abord ſe rendre familiers les cubes des dix premiers nombres que l'on voit dans cette Table.

Racines cubiq.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Enſuite ſi le cube propoſé eſt plus grand que les cubes de cette Table, on en extrait la racine cubique à peu près de même

qu'on extrait celle des grandeurs littérales ; mais la difficulté consiſte à trouver les places qu'occupent les différens produits contenus dans le cube propoſé, & c'eſt ce que nous allons voir, en examinant de quelle façon ſe forme un cube.

Soit donc le nombre 54 qu'il faut élever au cube, je le multiplie d'abord par lui-même, en écrivant chaque produit à la place qu'il doit occuper ſans rien retenir, ce qui me donne les quatre produits que le quarré de 54 contient ; ainſi la ſomme de ces quatre produits donneroit le quarré de 54, de même que ſi j'avois multiplié à la façon ordinaire, & par conſéquent en multipliant ces quatre produits encore par 54, le produit total ſera le cube.

J'écris donc 54 par-deſſous, & je multiplie chacun des quatre produits d'abord par 4, & enſuite par 5, ce qui me donne huit produits, leſquels ajoutés enſemble font le cube 157464 de 54.

Je coupe ce cube par tranches de trois en trois caracteres de droite à gauche, & je vois que le cube 125 du premier caractere 5, ſe trouve à gauche de la premiere tranche, en allant de gauche à droite ; que les trois produits 100, 100, 100, ſont partie à gauche, & partie à droite de la premiere tranche ; que les trois produits 80, 80, 80, ſont à droite de la premiere tranche, & qu'enfin le cube 64 du ſecond caractere 4 de la racine eſt à gauche de la ſeconde tranche.

	54	
	54	
	16	
	20	
	20	
	25	
	54	
	64	
	80	
	80	
100		
	80	
100		
100		
125		
157	464	*Cube*

Or les trois produits 100, 100, 100, ſont chacun le produit du quarré 25 du premier caractere 5 de la racine multiplié par le ſecond caractere 4, & les trois produits 80, 80, 80, ſont chacun le produit du quarré 16 du ſecond caractere 4 de la racine multiplié par le premier caractere 5 ; donc le cube de 54 coupé par tranches contient à gauche de la premiere tranche le cube du premier caractere 5, enſuite trois quarrés de ce premier caractere 5 multipliés par le ſecond, partie à gauche & partie à droite de la premiere tranche, puis trois quarrés du ſecond caractere 4 multipliés par le premier caractere à droite de la premiere tranche, & enfin le cube du ſecond caractere à gauche de la ſeconde tranche.

Que ſi le cube avoit un plus grand nombre de tranches, ce

qui ne pourroit ſe faire que ſa racine n'eut un plus grand nombre de caractéres, on trouveroit de même que les cubes du premier, du ſecond, du troiſiéme, &c. ſeroient toujours à gauche des tranches premiere, ſeconde, troiſiéme, &c. & que les produits que le cube contiendroient ſeroient toujours partie à gauche & partie à droite de ces tranches; cela poſé

Ier. Exemple. Soit le nombre 804357, dont on demande la racine cubique, je mene une ligne ſous ce nombre & une autre à droite pour écrire la racine à côté; je coupe ce nombre par tranches de trois en trois caractéres en allant de droite à gauche, après quoi je dis: le plus grand cube contenu dans les trois premiers caractéres 804 qui ſont à gauche de la premiere tranche eſt 729, ce que je trouve par le moyen de la table des cubes des dix premiers nombres; or la racine de 729 eſt 9 que j'écris au lieu deſtiné, & mettant le cube 729 de cette racine ſous 804, je le retranche de 804, & le reſte eſt 75.

```
804357(93
729
75.357      729
243         243
            27
75357       75357
00000
```

J'abbaiſſe les caracteres 357 du cube, & faiſant le quarré 81 du premier caractére 9 de la racine, je le multiplie par 3, ce qui donne 243; or 243, ou le triple du quarré de la premiere racine multiplié par la ſeconde eſt dans 753, j'écris donc 243 ſous ce nombre, en ſorte que ſon dernier caractere 3 ſoit à droite de la premiere tranche dont je marque la place par un point à meſure que j'abbaiſſe les caracteres 357 compris entre la premiere & la ſeconde tranche; c'eſt pourquoi je diviſe 753 par 243, & le quotient 3 étant le nombre qui multiplie 243 dans 753, eſt par conſéquent la ſeconde racine.

Je multiplie 243 qui eſt la ſomme des trois quarrés de la premiere racine par la ſeconde racine 3, & le produit eſt 729 que j'écris à part; je fais le quarré 9 de la ſeconde racine, & le multipliant par 3 pour en avoir le triple, & enſuite par la premiere racine 9, ce qui donne 243, j'écris 243 ſous 729 en avançant d'un rang vers la droite, parce que le cube propoſé contient ce produit 243 en avançant d'un rang; enfin je fais le cube 27 de la ſeconde racine, & je l'écris ſous le produit 243 en avançant d'un rang à droite, parce que le cube propoſé contient le cube 27 de cette façon, & faiſant la ſomme des trois produits, laquelle eſt

eſt 75357, je l'écris ſous le reſte 75357, & retranchant la ſomme 75357 du reſte 75357, il ne reſte rien, ainſi la racine cherchée eſt 93, puiſqu'en retranchant du cube propoſé le cube du premier caractere, le triple du quarré de ce premier caractere multiplié par le ſecond, le triple du quarré du ſecond multiplié par le premier, & enfin le cube du ſecond, il n'eſt rien reſté.

II. EXEMPLE. Soit le nombre propoſé 80621568 dont on demande la racine cubique, je le coupe par tranches, & je trouve que la racine aura trois caracteres, puiſqu'il y a trois tranches.

Je dis donc le plus grand cube contenu dans les caracteres 80 qui ſont à gauche de la premiere tranche eſt 64, dont la racine cubique eſt 4, ce que je trouve par la table des cubes des dix premiers nombres; j'écris donc 4 au lieu deſtiné pour la racine, & 64 ſous 80; je retranche 64 de 80, & le reſte eſt 16.

```
80|621|568(432          144
64                       108
-----                     27
16.621                  -----
 48                     15507
15 507
-------
 1 114.568              11094
   5547                   516
 1 114 568                  8
-------                 -------
 0 000 000              1114568
```

J'abbaiſſe les trois caracteres 621 qui ſont entre la premiere & la ſeconde tranche, je fais le quarré du premier caractere, & le multipliant par 3, le produit eſt 48, & comme 48 multiplié par la ſeconde racine eſt dans les trois caracteres 166, je diviſe 166 par 48, & le quotient 3 eſt la ſeconde racine; je multiplie 48 par la ſeconde racine 3, ce qui donne le produit 144 que j'écris à part; je fais le quarré de la ſeconde racine 3, je le multiplie par 3, & enſuite par la premiere racine 4, ce qui donne 108 que j'écris à part ſous 144, en avançant d'un rang à droite; enfin je fais le cube 27 de la conde racine, & je l'écris à part ſous 108 en avançant d'un rang à droite; je fais la ſomme 15507 des produits que j'ai écrit à part, & l'écrivant ſous le reſte 16621 de la premiere opération, je retranche 15507 de 16621, & le reſte eſt 1114.

J'abbaiſſe les trois caracteres 568 qui ſont entre la ſeconde & la troiſiéme tranche, & faiſant le quarré des deux premieres racines 43, je le multiplie par 3, ce qui fait 5547; or ce produit multiplié par la troiſiéme racine eſt dans 11145, j'écris donc 5547 ſous 11145, & diviſant 11145 par 5547, le quotient 2 eſt la troiſiéme racine; je multiplie 5547 par la troiſiéme racine 2, & le produit eſt 11094 que j'écris à part; je fais le quarré de la troiſiéme racine 2, je le multiplie par 3, & enſuite par la ſomme

43 des deux premieres, le produit eſt 516 que j'écris à part ſous 11094 en avançant d'un rang à droite ; enfin je fais le cube 8 de la troiſiéme racine, & je l'écris à part ſous 516 en avançant d'un rang à droite ; je fais la ſomme 1114568 des trois produits mis à part, & retranchant cette ſomme du reſte 1114568 de la ſeconde opération, il ne reſte rien ; ainſi la racine cherchée eſt 432.

129. Il faut obſerver que ſi après avoir pris le triple du quarré de la premiere racine, & diviſé le reſte par ce triple, on trouvoit pour la ſeconde racine un nombre qui fut de telle nature qu'en achevant l'opération juſqu'à la ſeconde tranche, la ſomme des trois produits mis à part fut plus grande que ce qui ſeroit reſté après avoir retranché le premier cube, il faudroit diminuer la ſeconde racine d'une unité, ou de deux, ou de trois, juſqu'à ce que la ſouſtraction de la ſomme des trois produits put ſe faire, & la même choſe doit être obſervée à l'égard des opérations ſuivantes, s'il s'en trouve encore à faire.

IV. EXEMPLE. Pour extraire la racine cubique de la fraction $\frac{1331}{1728}$, j'extrais la racine cubique 11 du numerateur, & la racine cubique 12 du dénominateur, & j'écris $\frac{11}{12}$ pour la racine cherchée, & ainſi des autres. La démonſtration de ceci ſe trouve dans le ſixiéme exemple de l'extraction des racines des grandeurs littérales.

De l'Extraction de la racine cubique des grandeurs numeriques par approximation.

130. L'approximation de la racine cubique des nombres ſe fait à peu près comme celle de la racine quarrée, & dépend du Théorême ſuivant.

131. THEOREME. *Si l'on prend les nombres* 10, 100, 1000, &c. *qui ont tous l'unité jointe à un zero, à deux, à trois, &c. les cubes de ces nombres auront encore l'unité avec un nombre de zeros triple du nombre de zeros que leur racine contient.*

Il eſt aiſé de ſe convaincre de ceci, en faiſant les cubes des nombres propoſés, car on trouvera que le cube de 10 eſt 1000, lequel contient trois zeros, au lieu que ſa racine n'en contient qu'un, que le cube de 100 eſt 1000000, lequel contient ſix zeros, tandis que ſa racine n'en contient que trois, & ainſi des autres ; cela poſé

Soit le nombre 9 dont on demande la racine cubique, j'ajoute trois zeros ou ſix, ou neuf, & ainſi de ſuite, en augmentant toujours de trois, ce qui eſt la même choſe que ſi je réduiſois le nombre 9 en une fraction dont le dénominateur fut ou 1000, ou 1000000, ce qui donneroit ou $\frac{9000}{1000}$, ou $\frac{9000000}{1000000}$, &c. or la racine cubique du dénominateur eſt 10 quand le dénominateur eſt 1000, elle eſt 100 quand le dénominateur eſt 1000000, &c. par le Theorême précédent; donc en tirant la racine cubique du numérateur, j'aurois des dixiémes à la racine, lorſque la fraction ſeroit $\frac{9000}{1000}$, des centiémes lorſque la fraction ſeroit $\frac{9000000}{1000000}$, &c. & j'aurois toujours un reſte qui ſeroit moindre qu'une unité de la racine, c'eſt-à-dire, qui ne ſçauroit augmenter la racine d'une unité. Les opérations de ceci ſont faciles à faire, c'eſt pourquoi je me diſpenſe de les donner pour être plus court; mais voici un Theorême par le moyen duquel nous ferons voir que ce qui reſte de l'extraction, ne peut augmenter la racine d'une unité.

132. THEOREME. *Si deux nombres ne different que de l'unité, le cube du plus grand ſurpaſſe le cube du moindre de trois fois le quarré de la racine du moindre, plus trois fois cette racine, plus l'unité.*

DEMONSTRATION. Je nomme le plus petit nombre a, & par conſéquent le ſecond ſera $a+1$; je fais le cube de $a+1$, & j'ai $a^3+3aa+3a+1$; je retranche de ce cube le cube a^3 du petit nombre, & le reſte $3aa+3a+1$ eſt l'excès du grand ſur le petit; or cet excès contient trois quarrés de la racine a du petit, plus trois fois cette racine, plus l'unité; donc, &c.

$$\begin{array}{l}
a+1 \\
a+1 \\
\hline
aa+a+1 \\
\quad +a \\
\hline
aa+2a+1 \quad \textit{Quarré} \\
a+1 \\
\hline
a^3+2aa+a \\
\quad +aa+2a+1 \\
\hline
a^3+3aa+3a+1 \quad \textit{Cube du grand.} \\
a^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textit{Cube du petit.} \\
\hline
3aa+3a+1 \quad \textit{Différence.}
\end{array}$$

133. Pour faire donc voir que ce qui reſte après l'extraction d'une racine cubique ne ſçauroit augmenter cette racine d'une unité, prenons le nombre 9, & tirons-en la racine ainſi que je viens de l'enſeigner, c'eſt-à-dire multiplions 9 par 1000, & diviſons-le par 1000, ce qui donnera la fraction $\frac{9000}{1000}$ égale à 9; or la racine cubique du dénominateur eſt 10; tirant donc la racine

cubique du numérateur, laquelle eſt 20, nous aurons pour la racine approchée $\frac{20}{10}$, ou 2, avec un reſte 1000; ainſi le numérateur 9000 diminué de ce reſte, c'eſt-à-dire 8000 ſeroit exactement le cube du numerateur 20 de la racine; or ſi l'on veut que le reſte 1000 puiſſe donner une unité de plus à la racine, c'eſt-à-dire que cette racine puiſſe être 21, au lieu de 20, il faudra néceſſairement que ce reſte ſoit égal à trois fois le quarré de la racine 20, plus trois fois cette racine, plus l'unité: mais ſi ce reſte 1000 étoit égal à la ſomme de ces trois quantités, ce reſte ajouté au cube 8000 de 20 ſeroit exactement le cube de 21, & par conſéquent après avoir tiré la racine de 9000, on auroit 21 à la racine, & il ne reſteroit rien.

9|000	(20
8	10
1.000	
12	
0000	
1000	

134. Et il ne faut pas dire que ſi on réduiſoit le nombre 9 en une fraction plus grande, par exemple en $\frac{9000000}{1000000}$, ou $\frac{9000000000}{1000000000}$, &c. il pourroit arriver qu'après l'extraction de la racine il ne reſteroit rien; car ſi cela étoit, on pourroit trouver la racine exacte de 9, puiſque la fraction dont on auroit tiré la racine ſeroit égale à 9, & cette racine ſeroit ou un nombre entier, ou une fraction moindre que l'unité, ou enfin un entier & fraction; or cette racine ne peut pas être un nombre entier, puiſqu'il n'y a point de nombre entier qui en ſe multipliant deux fois ſucceſſivement lui-même produiſe 9, & que d'ailleurs ſi cette racine étoit un nombre entier, on la trouveroit par les regles ordinaires ſans être obligé de réduire le nombre 9 en fraction; elle ne peut pas être non plus une fraction moindre que l'unité, car une fraction moindre que l'unité produit une fraction encore moindre qu'elle, (*N.* 119.) & ce produit multiplié par la même fraction produit une autre fraction encore moindre que lui (*N.* 119.); enfin la racine ne peut pas être un entier & fraction, parce qu'un entier & fraction multiplié par lui-même produit un entier & fraction (*N.* 119.), & que ce produit multiplié par l'entier & fraction qui l'a produit, doit encore produire un entier & fraction dont la racine ne peut pas être exacte, & par conſéquent on doit toujours trouver un reſte.

135. Comme il ſe rencontre plus de nombres qui ne ſont pas quarrés que des nombres quarrés, il eſt bon de ſe former à ces ſortes d'approximation.

136. On trouve dans quelques Livres d'Arithmetique des approximations qui ne ſont appuyées ſur aucun fondement & dont il faut ſe défier.

Du Calcul des grandeurs Radicales.

137. Les grandeurs *radicales* ſont les mêmes que celles que nous avons nommées *ſourdes*, ou *irrationnelles*, ou *incommenſurables* (*N.* 104.), le nombre ou la lettre qui eſt ſous le ſigne eſt la puiſſance dont on veut extraire la racine, & le ſigne radical avec le nombre qu'on écrit au-deſſus marque de quel dégré eſt la racine qu'on veut extraire. $\surd a$, ou $\sqrt[2]{a}$, marque qu'on veut extraire la racine quarrée de la grandeur a; $\sqrt[3]{b}$ marque qu'on veut tirer la racine cubique de la grandeur b conſiderée comme un cube, & ainſi des autres.

138. Quoique les grandeurs radicales ſoient incommenſurables en elles-mêmes, de façon qu'on ne peut pas exprimer le rapport qu'elles ont avec quelque autre grandeur connuë; cependant il peut ſe faire qu'elles ſoient *commenſurables entr'elles.* Par exemple on ne peut pas exprimer ce que c'eſt que $\surd 3$ par rapport à aucun nombre entier ou rompu, ou compoſé d'entier & de fraction, cependant on connoît aiſément que $\surd 3$ eſt le tiers de $3\surd 3$, le quart de $4\surd 3$, &c. & la même choſe arrivera toutes les fois que les grandeurs qui ſont ſous le ſigne radical ſeront les mêmes, & que le ſigne radical ſera du même dégré; car ſi l'une ou l'autre de ces deux conditions manquoient, les grandeurs radicales n'auroient pas plus de rapport entre elles qu'elles n'en ont avec des entiers ou des fractions, ou des entiers & fractions; ainſi le rapport de $\surd 2$ à $\surd 3$ ne peut s'exprimer quoique les racines ſoient du même genre, & la raiſon en eſt que les grandeurs qui ſont ſous le ſigne ſont différentes: de même $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[4]{2}$ n'ont point un rapport qu'on puiſſe exprimer, parce que les dégrés 3 & 4 de leurs racines ſont différens, quoique le nombre qui eſt ſous la racine ſoit le même de part & d'autre.

139. Quand les dégrés des ſignes radicaux ſont les mêmes, & que les grandeurs qui ſont ſous le ſigne ſont auſſi les mêmes, les grandeurs radicales ſe nomment *communicantes* ou *commenſurables entr'elles.*

140. On peut faire toutes les operations de l'Arithmétique & de l'Algebre ſur les grandeurs radicales de même que ſur les grandeurs qui ne le ſont pas, moyennant certaines préparations qui dépendent des deux Théorêmes ſuivans.

141. THEOREME. *Si l'on multiplie deux quarrés l'un par l'autre, le produit ſera un nouveau quarré dont la racine ſera égale au produit*

des racines quarrées des deux quarrés, la même choſe doit s'entendre de deux cubes multipliés l'un par l'autre, de deux puiſſances, quatriémes, cinquiémes, &c.

Soient les deux quarrés aa & bb, je les multiplie l'un par l'autre, & le produit eſt $aabb$, dont la racine quarrée ab eſt égale au produit des racines a, b, des deux quarrés. De même ſoient les deux cubes a^3, b^3, le produit de l'un par l'autre eſt a^3b^3 dont la racine cubique ab eſt égale au produit des deux racines a, b, des deux cubes, & ainſi des autres.

142. THEOREME. *La racine quarrée d'une grandeur eſt égale à la racine quatriéme du quarré de cette grandeur ; à la racine ſixiéme de ſon cube, à la racine huitiéme de ſa quatriéme puiſſance, & ainſi de ſuite, en augmentant l'expoſant de la racine de deux unités, à meſure que les puiſſances de la grandeur donnée augmentent d'une unité.*

De même la racine cubique d'une grandeur eſt égale à la racine ſixiéme du quarré de cette grandeur, à la racine neuviéme de ſon cube, &c. en augmentant l'expoſant de la racine de trois unités, à meſure que les puiſſances de la grandeur donnée augmentent de l'unité, & il faut dire la même choſe des racines plus élevées en augmentant de quatre unités de 5, 6, &c. les expoſans des racines à meſure que les puiſſances de la grandeur donnée augmentent de l'unité.

Prenons les puiſſances ſucceſſives de la grandeur a, leſquelles ſont a, aa, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, &c. la grandeur a eſt certainement la racine quarrée de aa, la racine cubique de a^3, la racine quatriéme de a^4, & ainſi de ſuite ; or le quarré de aa eſt a^4, & par conſéquent la racine quarrée de la grandeur aa eſt la même que la racine quatriéme de a^4 quarré de aa. De même le cube de aa eſt a^6, ſa quatriéme puiſſance eſt a^8, ſa cinquiéme puiſſance eſt a^{10}, &c. & par conſéquent la racine quarrée de aa eſt la racine ſixiéme du cube de aa, la racine huitiéme de ſa quatriéme puiſſance, la racine dixiéme de ſa cinquiéme puiſſance, &c.

De même le quarré de a^3 eſt a^6, ſon cube eſt a^9, ſa quatriéme puiſſance eſt a^{12}, &c. donc la racine cubique de a^3 laquelle eſt a, eſt égale à la racine ſixiéme du quarré de a^3, à la racine neuviéme de ſon cube, à la racine douziéme de ſa quatriéme puiſſance, &c.

On trouvera auſſi que a qui eſt la racine quatriéme de a^4 eſt la racine huitiéme du quarré de a^4, la racine douziéme de ſon cube, &c. en augmentant toujours l'expoſant de la racine de 4,

à meſure que l'expoſant des puiſſances de a^4 augmenté de l'unité, & de même des autres puiſſances. Tout ceci eſt extrêmement facile, & s'il y a quelque choſe qui puiſſe faire de la peine, ce n'eſt uniquement que l'énoncé qu'il faut ſe rendre familier.

Changer une grandeur non radicale en une autre qui ſoit radicale & dont l'expoſant ſoit donné.

143. Soit la grandeur radicale a qu'il faut changer en une autre qui ait le ſigne $\sqrt[2]{}$, ou ſimplement $\sqrt{}$, car l'un & l'autre ſont la même choſe; je fais le quarré de a lequel eſt aa, & j'écris $\sqrt[2]{aa}$, ou $\sqrt{aa}$; car cette expreſſion $\sqrt{aa}$, ſignifie la racine quarrée du quarré aa, laquelle eſt a, & par conſéquent $a = \sqrt{aa}$.

Si le ſigne radical donné avoit été $\sqrt[3]{}$, j'aurois élevé la grandeur a à ſa troiſiéme puiſſance a^3, & j'aurois écrit $\sqrt[3]{a^3}$; car $\sqrt[3]{a^3}$ ſignifie la racine cubique de a^3, mais cette racine eſt a, donc $a = \sqrt[3]{a^3}$, & ainſi des autres.

La regle eſt donc d'élever la grandeur donnée à la puiſſance marquée par le dégré de la racine, & d'écrire cette puiſſance ſous le ſigne radical, en marquant au-deſſus le dégré de la racine, & cela s'appelle *faire paſſer une grandeur ſous le ſigne radical.*

Pour changer $a\sqrt{b}$ en une autre grandeur où tout ſe trouve ſous le ſigne, je fais le quarré de a qui eſt aa, & j'écris $\sqrt{aab}$; car a eſt la même choſe que $\sqrt{aa}$, & a multiplié par $\sqrt{b}$ eſt la même choſe que $\sqrt{aa}$ multiplié par $\sqrt{b}$, c'eſt-à-dire la racine du quarré aa multipliée par la racine du quarré b; mais quand deux racines quarrées ſe multiplient, elles produiſent un nombre qui eſt la racine du quarré que produiroient les deux quarrés des deux racines (*N.* 141.), & le produit des deux quarrés ſetoit aab; donc la racine produite par les deux racines $\sqrt{aa}$, $\sqrt{b}$ doit être $\sqrt{aab}$, & ainſi des autres.

Tirer une grandeur hors du ſigne radical.

144. Soit la grandeur $\sqrt{4}$ qu'il faut tirer hors du ſigne radical, je dis la racine quarrée de 4 eſt 2, ainſi j'écris 2 au lieu de $\sqrt{4}$; de même au lieu de $\sqrt[3]{a^3}$, j'écris a; au lieu de $\sqrt[2]{a^4b^4}$, j'écris ab, & ainſi des autres, ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

Mais ſi la grandeur qui eſt ſous le ſigne n'eſt pas une puiſſance

parfaite du dégré marqué par la racine, j'examine ſi elle n'eſt pas le produit de quelque puiſſance de ce dégré multipliée par une autre grandeur qui ne ſoit pas élevée à ce dégré, & ſi cela eſt, je laiſſe ſous le ſigne la grandeur qui n'eſt pas du même dégré, & tirant la racine de l'autre, je l'écris hors du ſigne.

Dans $\surd aab$ je vois que le quarré aa eſt multiplié par b qui n'eſt pas un quarré, je laiſſe b ſous le ſigne, & tirant la racine a du quarré aa, j'écris $a\surd b$, au lieu de $\surd aab$.

De même dans $\surd 18$, la grandeur 18 n'eſt pas un quarré, mais je vois que 18 eſt le produit du quarré 9 par 2 qui n'eſt pas un quarré; je laiſſe 2 ſous le ſigne, & tirant la racine 3 du quarré 9 j'écris $3\surd 2$ au lieu de $\surd 18$.

Dans $\surd a^3c$ la grandeur a^3 eſt un cube, & la grandeur c ne l'eſt pas, je laiſſe c ſous le ſigne, & tirant la racine cubique de a^3 qui eſt a, j'écris $a\sqrt[3]{c}$, au lieu de $\sqrt[3]{a^3c}$.

Dans $\sqrt[3]{54}$ la grandeur 54 n'eſt pas un cube, mais je vois que 54 eſt le produit de 27 par 2; or 27 eſt un cube, & 2 ne l'eſt pas, je laiſſe 2 ſous le ſigne, & tirant la racine cubique du cube 27, j'écris $3\sqrt[3]{2}$ au lieu de $\sqrt[3]{54}$, &c.

La raiſon de ceci eſt évidente, car dans $\surd aab$, je puis regarder la grandeur aab comme étant le produit du quarré aa par le quarré b; mais deux quarrés qui ſe multiplient produiſent un autre quarré dont la racine eſt égale au produit des racines quarrées des deux quarrés qui ſe ſont multipliés (*N.* 141.), donc $\surd aab$ eſt le produit des racines des quarrés aa, b, c'eſt-à-dire le produit de $\surd aa$ multiplié par $\surd b$; mais $\surd aa$ eſt la même choſe que a; donc $\surd aa$ multiplié par $\surd b$, ou $\surd aab$ eſt la même choſe que $a\surd b$, & on démontrera la même choſe dans tous les autres cas.

145. Quand on tire les grandeurs hors du ſigne, cela s'appelle *réduire les radicaux à leurs expoſans ou à leurs moindres termes.*

146. Il arrive quelquefois qu'en réduiſant deux grandeurs qui ont le même ſigne à leurs moindres termes, on rend ces grandeurs commenſurables entr'elles, au lieu qu'elles ne l'étoient pas auparavant: par exemple, ſi on réduit les grandeurs $\surd 8$ & $\surd 18$ à leurs moindres termes, on trouvera $2\surd 2$, & $3\surd 2$ qui ſont des grandeurs commenſurables entr'elles.

Réduire

Réduire à un même ſigne deux ou pluſieurs grandeurs Radicales qui ont différens ſignes.

147. Pour réduire à un même ſigne les deux grandeurs $\sqrt[2]{a}$, & $\sqrt[6]{b}$, il s'agit de faire devenir 6 l'expoſant 2 de $\sqrt[2]{a}$, ce qui peut ſe faire en le prenant trois fois ; or $\sqrt[2]{a}$ étant la racine quarrée de a eſt égal à la racine quatriéme du quarré de a, & à la racine ſixiéme de ſon cube, (*N.* 142.) donc élevant a au cube, ce qui fait a^3, j'écris $\sqrt[6]{a^3}$, qui eſt la même choſe que $\sqrt[2]{a}$, ainſi j'ai $\sqrt[6]{a^3}$ & $\sqrt[6]{b}$ qui ont le même ſigne.

Pour réduire au même ſigne les deux grandeurs $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{3}$, l'expoſant 2 de $\sqrt[2]{2}$ eſt contenu préciſément quatre fois dans l'autre expoſant, ainſi il faut le prendre quatre fois pour avoir l'expoſant 8 ; or $\sqrt[2]{2}$ étant la racine quarrée de 2, eſt égal à la racine quatriéme du quarré de 2, ou à la racine ſixiéme du cube de 2, ou enfin à la racine huitiéme de la quatriéme puiſſance de 2 ; élevant donc 2 à ſa quatriéme puiſſance 16, j'écris $\sqrt[8]{16}$, au lieu de $\sqrt[2]{2}$, & j'ai les deux grandeurs $\sqrt[8]{16}$ & $\sqrt[8]{3}$ qui ont le même ſigne, &c.

148. Si le moindre des deux expoſans n'étoit pas exactement contenu dans le plus grand, on multiplieroit l'un par l'autre, & le produit ſeroit l'expoſant de la racine de l'une & l'autre grandeur.

Pour réduire au même ſigne $\sqrt[3]{a}$, & $\sqrt[5]{b}$, je multiplie les expoſans 3 & 5 l'un par l'autre, ce qui donne 15 qui eſt l'expoſant que la racine de l'une & l'autre grandeur doit avoir ; or $\sqrt[3]{a}$ étant la racine cubique de a, eſt par conſéquent la racine ſixiéme du quarré de a, la racine neuviéme du cube de a, la racine douziéme de ſa 4e. puiſſance, & la racine quinziéme de ſa 5e. puiſſance ; ainſi élevant a à la cinquiéme puiſſance a^5, j'écris $\sqrt[15]{a^5}$ au lieu de $\sqrt[3]{a}$; de même $\sqrt[5]{b}$ étant la racine cinquiéme de b, eſt par conſéquent la racine dixiéme du quarré de b, & la racine quinziéme de ſon cube ; donc élevant b au cube, ce qui donne b^3, j'écris $\sqrt[15]{b^3}$ au lieu de $\sqrt[5]{b}$, & j'ai $\sqrt[15]{a^5}$, & $\sqrt[15]{b^3}$ qui eſt le même ſigne.

Pour réduire au même ſigne les trois grandeurs $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, & $\sqrt[4]{c}$, je multiplie les trois expoſans 2, 3, 4, les uns par les autres, ce qui donne 24, mais comme 12 peut être diviſé éxactement par 2, par 3, & par 4, je prens 12 pour l'expoſant commun des racines; or $\sqrt[2]{a}$ étant la racine quarrée de a eſt auſſi la racine quatriéme de ſon quarré, la racine ſixiéme de ſon cube, la racine huitiéme de ſa quatriéme puiſſance, la racine dixiéme de ſa cinquiéme puiſſance, & la racine douziéme de ſa ſixiéme puiſſance; ainſi élevant a à la ſixiéme puiſſance ce qui donne a^6, j'écris $\sqrt[12]{a^6}$ au lieu de $\sqrt[2]{a}$, & faiſant le même raiſonnement à l'égard des deux autres, je trouve $\sqrt[12]{b^4}$, & $\sqrt[12]{c^3}$, & ainſi des autres.

Ajouter les grandeurs Radicales.

149. Quand les grandeurs radicales ſont communicantes, ou commenſurables entr'elles, on ajoute enſemble les grandeurs qui ſont hors le ſigne, ainſi pour ajouter $2\sqrt{3}$, avec $4\sqrt{3}$, on ajoute les deux grandeurs 2 & 4 qui ſont hors le ſigne, ce qui fait 6, & l'on écrit $6\sqrt{3}$. Pour ajouter $3\sqrt{5}$ avec $4\sqrt{5}$, on écrit $7\sqrt{5}$, & de même des autres.

Mais ſi ces grandeurs ne ſont pas communicantes, on les réduit au même ſigne, & enſuite à leur expoſans, & ſi par ce moyen elles deviennent commenſurables entr'elles, on les ajoute comme il vient d'être dit, mais ſi elles ne le ſont pas, on les ajoute en mettant entr'elles le ſigne +.

Pour ajouter $\sqrt[3]{81}$ & $\sqrt[3]{192}$, je trouve que la grandeur 81 du premier eſt le produit du cube 27 par 3; je laiſſe 3 ſous le ſigne, & tirant la racine cubique de 27 qui eſt 3, j'écris $3\sqrt[3]{3}$, au lieu de $\sqrt[3]{81}$; je vois de même que la grandeur 192 de la ſeconde eſt le produit du cube 64 par 3, je laiſſe 3 ſous le ſigne, & tirant la racine cubique de 64 qui eſt 4, j'écris $4\sqrt[3]{3}$, cela fait j'ajoute les grandeurs 3 & 4 qui ſont ſous le ſigne, ce qui fait 7, & j'écris $7\sqrt[3]{3}$.

Pour ajouter enſemble $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{4}$, je multiplie les deux expoſans, ce qui donne l'expoſant commun 6, enſuite opérant comme il a été dit (*N.* 147.) j'ai $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{16}$, & comme je ne puis pas

réduire ces grandeurs à des moindres termes, je les ajoute enſemble en écrivant $\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{16}$, mais le plus court dans ces occaſions eſt d'écrire $\sqrt{2}+\sqrt{4}$, dès qu'on voit qu'on ne ſçauroit les rendre communicantes.

Souſtraire les grandeurs Radicales.

150. Si les grandeurs ſont communicantes, on ſouſtrait la grandeur qui eſt hors du ſigne de la petite, de la grandeur qui eſt hors du ſigne de la grande, & le reſte écrit avec le ſigne & la grandeur qui eſt par deſſous eſt la Souſtraction demandée.

Pour ſouſtraire $2\sqrt{3}$ de $6\sqrt{3}$, on retranche 2 de 6, ce qui fait 4, & l'on écrit $4\sqrt{3}$, & ainſi des autres.

Mais ſi ces grandeurs ne ſont pas communicantes, on tâche de les rendre telles par les moyens ci-deſſus, & ſi elles le deviennent, on ſouſtrait l'une de l'autre ainſi qu'on vient de voir, mais ſi elles ne peuvent le devenir, on fait la ſouſtraction en employant le ſigne —.

Pour ſouſtraire $\sqrt{4}$ de $\sqrt{2}$, on les réduit au même ſigne, ce qui donne $\sqrt[4]{16}$ & $\sqrt[4]{8}$, & l'on écrit $\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{16}$, ou ſimplement $\sqrt{2}-\sqrt{4}$.

Multiplier les grandeurs Radicales.

151. Avant de multiplier les grandeurs propoſées, il faut avoir ſoin de les réduire à leurs moindres expreſſions, & ſur tout de leur donner un même ſigne, parce qu'il n'y a que les racines d'un même dégré qui produiſent une racine d'un même dégré. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$ en ſe multipliant elles-mêmes produiſent $\sqrt[3]{10}$, c'eſt-à-dire la racine du cube qui ſeroit le produit des cubes 2 & 5 (*N.* 141.), mais $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5}$ ne produiſent ni $\sqrt{10}$ ni $\sqrt[3]{10}$.

Ayant donc fait les préparations dont nous venons de parler, on multiplie les grandeurs qui ſont hors du ſigne par elles-mêmes, & celles qui ſont ſous le ſigne auſſi, & l'on écrit les deux produits en mettant entre deux le ſigne radical.

Pour multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, on écrit $\sqrt{ab}$, & pour multiplier $a\sqrt[3]{c}$ par $b\sqrt[3]{d}$, on écrit $ab\sqrt[3]{cd}$. De même $3\sqrt{2}$ par $4\sqrt{6}$ donne $12\sqrt{12}$, ou bien en réduiſant $\sqrt{12}$ à ſes moindres termes, ce qui fait $2\sqrt{3}$, à cauſe que 12 eſt le produit du quarré 4 par le nombre 3 qui n'eſt pas un quarré, & l'on écrit $12\times 2\sqrt{3}$, ou $24\sqrt{3}$, & ainſi des autres.

Pour multiplier $a+c\sqrt{d}$ par $a+b\sqrt{c}$, on écrit ces deux nombres l'un ſous l'autre, les entiers ſous les entiers & les radicaux ſous les radicaux, & on multiplie à la façon ordinaire, ainſi a par a donne aa; a par $c\sqrt{d}$ donne $ac\sqrt{d}$; a par $b\sqrt{c}$ donne $ab\sqrt{c}$, & $c\sqrt{d}$ par $b\sqrt{c}$ donne $cb\sqrt{dc}$.

$$\begin{array}{l} a+c\sqrt{d} \\ a+b\sqrt{c} \\ \hline aa+ac\sqrt{d}+ab\sqrt{c}+bc\sqrt{dc} \end{array}$$

Pour multiplier $a+b\sqrt{d}$ par $a-b\sqrt{d}$, on fait la multiplication de même que dans l'exemple précédent, & on trouve $aa-bb\sqrt{dd}$; mais $\sqrt{dd}$ eſt la même choſe que d, donc $-bb\sqrt{dd}$ eſt la même choſe que $-bb\times d$, ou $-bbd$, & par conſéquent le produit eſt $aa-bbd$.

$$\begin{array}{l} a+b\sqrt{d} \\ a-b\sqrt{d} \\ \hline aa+ab\sqrt{d}-bb\sqrt{dd} \\ \quad -ab\sqrt{d} \\ \hline aa \quad -bb\sqrt{dd} \\ \text{ou } aa \quad -bbd \end{array}$$

Ceci fait voir que la multiplication fait quelquefois diſparoître les grandeurs radicales.

Diviſer les grandeurs Radicales.

152. Avant de diviſer on doit avoir ſoin de faire les mêmes préparations que pour la multiplication, après quoi on diviſe les grandeurs qui ſont hors du ſigne par celles qui ſont hors du ſigne, & celles qui ſont ſous le ſigne par celles qui ſont ſous le ſigne, & l'on écrit les deux quotients.

$\sqrt{ab}$ diviſé par $\sqrt{b}$ donne $\sqrt{a}$; car multipliant le quotient $\sqrt{a}$ par le diviſeur $\sqrt{b}$, on retrouve le dividende $\sqrt{ab}$. De même $cb\sqrt{a^2d}$ diviſé par $c\sqrt{ad}$ donne $b\sqrt{a}$, & ainſi des autres.

Que ſi la diviſion ne peut pas ſe faire, on écrit le diviſeur ſous le dividende; par exemple pour diviſer $a\sqrt{c}$ par $b\sqrt{d}$, on écrit $\frac{a\sqrt{c}}{a\sqrt{d}}$, &c.

Pour diviſer la grandeur complexe $aa+ac\sqrt{d}+ab\sqrt{c}+bc\sqrt{dc}$ par la grandeur complexe $a+c\sqrt{d}$, on écrit le diviſeur ſous le dividende, & l'on fait la diviſion à l'ordinaire; ainſi aa diviſé par a donne a, & multipliant le quotient a par les termes du diviſeur, j'ai a par a donne aa lequel retranché de aa ne laiſſe rien; a par $c\sqrt{d}$ donne $ac\sqrt{d}$ qui retranché de $ac\sqrt{d}$ ne laiſſe rien.

$$\begin{array}{l} aa+ac\sqrt{d}+ab\sqrt{c}+bc\sqrt{dc} \;(a+b\sqrt{c} \\ \overline{a+c\sqrt{d}} \\ \hline \quad a+c\sqrt{d} \\ \hline \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

J'écris le diviſeur ſous les autres caracteres du dividende, & je trouve que $ab\sqrt{c}$ diviſé par a donne au quotient $b\sqrt{c}$, & multi-

pliant ce quotient par le diviſeur, & faiſant enſuite la Souſtraction il ne reſte rien; ainſi le quotient eſt $a+b\sqrt{c}$, & c'eſt la preuve de la premiere multiplication compoſée (*N.* 151.)

Pour diviſer la grandeur complexe $aa-bb\sqrt{d}$ par $a-b\sqrt{d}$, je vois que dans le ſecond terme $bb\sqrt{d}$ du dividende, la grandeur d eſt la même choſe que $\sqrt{dd}$, & que par conſéquent $bb\sqrt{d}$ eſt la même choſe que $bb\sqrt{dd}$, ainſi j'écris $aa-bb\sqrt{dd}$ pour le dividende, & enſuite le diviſeur par deſſous; aa diviſé par a donne le quotient a, je multiplie a par a, ce qui donne aa qui retranché de aa ne laiſſe rien; je multiplie a par $-b\sqrt{d}$, ce qui donne $-ab\sqrt{d}$, & comme il n'y a point de produit de cet eſpece dans le dividende, je ſuppoſe que ce dividende contienne $-ab\sqrt{d}+ab\sqrt{d}$, ce qui ne l'augmente ni ne le diminue; donc $-ab\sqrt{d}$ retranché de $-ab\sqrt{d}$ ne laiſſe rien. J'écris $+ab\sqrt{d}$ par deſſous, & abbaiſſant le terme $-bb\sqrt{dd}$, j'écris le diviſeur par deſſous. $ab\sqrt{d}$ diviſé par a donne au quotient $b\sqrt{d}$, & multipliant ce quotient par le diviſeur, puis faiſant la Souſtraction, il ne reſte rien, le quotient eſt donc $a+b\sqrt{d}$, & c'eſt la preuve de la ſeconde multiplication (*N.* 151.).

$$\begin{array}{l|l} aa-bb\sqrt{dd} & a+b\sqrt{d} \\ \hline a-b\sqrt{d} & \\ \hline +ab\sqrt{d}-bb\sqrt{dd} & \\ a-b\sqrt{d} & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Que ſi en opérant comme on vient de dire, la diviſion n'étoit pas exacte, on ſe contenteroit d'écrire le dividende ſous le diviſeur comme une fraction.

Du Calcul des Expoſans.

153. Le *Calcul des Expoſans* eſt la maniere de multiplier une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance de la même grandeur, de diviſer l'une par l'autre, d'élever une puiſſance de cette grandeur à une autre puiſſance, ou d'en extraire la racine en ne ſe ſervant que des expoſans, en voici les régles.

154. Soit la grandeur a ou a^1, dont les puiſſances ſont a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, &c. ſi l'on veut multiplier la puiſſance a^2 par la puiſſance a^3, on ajoute l'expoſant 2 à l'expoſant 3, & la ſomme 5 eſt l'expoſant de la puiſſance qui ſera le produit des deux, ainſi cette puiſſance ſera a^5; car la puiſſance à multiplier a^2 eſt la même choſe que aa, & le multiplicateur a^3 eſt la même choſe que aaa; mais pour multiplier aa par aaa, il faut écrire a^5, donc le produit a^2 par a^3 eſt effectivement la puiſſance a^5 dont l'expoſant 5 eſt la ſomme des expoſans 2 & 3. De même pour mul-

tiplier a^3 par a^4, on ajoute l'expoſant 3 à l'expoſant 4, ce qui fait 7, & l'on a a^7 pour le produit; car a^3 par a^4 eſt la même choſe que *aaa* par *aaaa*, ce qui donne *aaaaaaa*, ou a^7.

155. Pour diviſer une puiſſance de la grandeur *a* par une autre puiſſance de la même grandeur, il faut retrancher l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende, & le reſte eſt l'expoſant du quotient.

Pour diviſer a^6 par a^2, on retranche l'expoſant 2 de l'expoſant 6, ce qui donne l'expoſant 4, & l'on a a^4 pour le quotient; car a^6 eſt la même choſe que *aaaaaa*, & a^2 eſt la même choſe que *aa*; mais pour diviſer *aaaaaa* par *aa*, on écrit *aaaa* qui eſt la même choſe que a^4, donc le quotient de a^6 diviſé par a^2 eſt a^4, dont l'expoſant 4 eſt le reſte de la Souſtraction des deux expoſans.

156. Pour élever une puiſſance donnée de *a* à une autre puiſſance dont l'expoſant ſoit donné, on multiplie l'expoſant de la puiſſance donnée par l'expoſant donné, & le produit eſt l'expoſant de la puiſſance cherchée.

Si l'on veut donc élever la puiſſance a^3 au quarré, on multiplie l'expoſant 3 par l'expoſant 2 du quarré ou de la ſeconde puiſſance, ce qui fait 6, & a^6 eſt le quarré de a^3; car a^3 étant la même choſe que *aaa*, ſi l'on multiplie *aaa* par lui-même, on aura *aaaaaa* qui eſt la même choſe que a^6. De même pour élever la puiſſance a^2 à ſa quatriéme puiſſance, on multiplie 2 par l'expoſant 4 de la quatriéme puiſſance, ce qui fait 8, & l'on écrit a^8 pour le produit; car *aa* multiplié par lui-même donne ſa ſeconde puiſſance *aaaa*, & celle-ci multipliée par *aa* donne la troiſiéme puiſſance *aaaaaa* de *aa*, & enfin cette troiſiéme multipliée par *aa* donne *aaaaaaaa*, ou a^8 qui eſt la quatriéme puiſſance de *aa* ou de a^2.

157. Pour extraire la racine d'une puiſſance de la grandeur *a*, on diviſe l'expoſant de la puiſſance par l'expoſant de la racine, & le quotient eſt l'expoſant de la racine cherchée.

Si l'on veut donc extraire la racine ſeconde de a^6, on diviſe 6 par 2 ce qui donne 3, & l'on a a^3 pour la racine cherchée; car ſi pour élever a^3 à la ſeconde puiſſance, il faut par la régle précédente multiplier l'expoſant 3 par l'expoſant 2 de la puiſſance à laquelle on veut élever a^3, ce qui donne l'expoſant 6 de la ſeconde puiſſance a^6 de a^3, il eſt clair que pour tirer la racine quarrée il faudra diviſer 6 par 2 pour avoir a^3 qui eſt la racine quarrée de a^6.

158. Ces régles nous font voir que lorſqu'on veut opérer par

les expoſans, ce que l'on devroit faire par la multiplication & la diviſion, on le fait par l'addition & la ſouſtraction, & ce que l'on devroit faire par l'élévation des puiſſances ou par l'extraction des racines, on le fait par la multiplication & la diviſion.

159. Il ſuit delà que ſi on diviſe a par a, c'eſt-à-dire a^1 par a^1, on aura a^{1-1}, ou a^0 (*N.* 155.), or a diviſé par a donne 1 au quotient, donc a^0 eſt égal à 1, ce qu'il faut bien remarquer.

160. Il ſuit encore que ſi l'on diviſe a^0 par a^1, on aura a^{0-1}, & ſi l'on diviſe a^0 par a^2, on aura a^{0-2}, c'eſt-à-dire a^{-2}, de même en diviſant a^0 par a^3, on auroit a^{0-3}, ou a^{-3}, & ainſi de ſuite, ce qui donneroit les puiſſances négatives de a qui ſeroient a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c. de ſorte que a^0 ſeroit entre les puiſſances poſitives de a, & les négatives, comme on le voit ici.

$a^{-\infty}$, &c. $a^{-5}. a^{-4}. a^{-3}. a^{-2}. a^{-1}. a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5$, &c. a^{∞}.

La grandeur a^{∞}, que l'on voit ici ſignifie la grandeur a élevée à une puiſſance infinie, laquelle par conſéquent ſeroit une puiſſance infiniment grande, & la puiſſance $a^{-\infty}$ ſignifie a^0 diviſé par a^{∞}, ce qui donne la puiſſance négative $a^{0-\infty}$, laquelle ſeroit une puiſſance infiniment petite; car a^0 étant égal à 1, il eſt clair que 1 diviſé par une grandeur infinie a^{∞} donneroit un quotient infiniment petit.

161. Les puiſſances négatives peuvent s'exprimer de façon que leurs expoſans deviennent poſitifs; car a^0 étant la même choſe que 1, ſi l'on diviſe à l'ordinaire 1 par a^1, on aura $\frac{1}{a^1}$, qui ſera égal à a^{-1}. De même ſi l'on diviſe 1 par a^2, on aura $\frac{1}{a^2}$ égal à a^{-2}, & ainſi des autres, de ſorte que les puiſſances négatives a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c. ſe changeront en celles-ci $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, &c. dont les expoſans ſont devenus poſitifs, ce qui ſe fait comme on voit en faiſant paſſer chaque puiſſance négative au dénominateur d'une fraction dont le numerateur eſt 1, & en mettant à ce dénominateur un expoſant poſitif au lieu du négatif qu'il avoit auparavant.

162. De même que les puiſſances négatives de a peuvent devenir poſitives en paſſant au dénominateur d'une fraction dont le numérateur ſoit 1; de même auſſi les puiſſances poſitives peuvent devenir négatives, en paſſant au dénominateur d'une fraction dont l'expoſant ſoit 1; ainſi les puiſſances a^1, a^2, a^3, a^4, &c.

peuvent ſe changer en celles-ci qui ſont les mêmes $\frac{1}{a^{-1}}$, $\frac{1}{a^{-2}}$, $\frac{1}{a^{-3}}$, &c. ce que je prouve ainſi : ſi je diviſe a^0 par la puiſſance négative a^{-1}, en me ſervant du calcul des expoſans, je dois retrancher l'expoſant négatif de a^{-1} de l'expoſant 0 de a^0 (*N.* 155.); mais retrancher -1, c'eſt donner 1, donc le reſte de la ſouſtraction doit être $0+1$, ou 1, & par conſéquent le quotient de la diviſion doit être a^1; or a^0 étant égal à 1, il eſt clair qu'en diviſant 1 par a^{-1}, le quotient eſt $\frac{1}{a^{-1}}$, donc le quotient précédent a^1 eſt égal au quotient $\frac{1}{a^{-1}}$, & on prouveta de même que a^2 eſt égal à $\frac{1}{a^{-2}}$, &c.

163. Ce que je viens de dire ſuppoſe que les puiſſances poſitives ou négatives n'aient point d'autres coëfficiens que l'unité, mais ſi elles en avoient d'autres, ces coëfficiens devroient reſter au numerateur, tandis que les puiſſances paſſeroient au dénominateur ; ainſi pour rendre poſitive $2a^{-1}$, on laiſſeroit le coëfficient au numerateur, & l'on écriroit $\frac{2}{a^1}$, car $2a^{-1}$ eſt la même choſe que $2\times a^{-1}$; or a^{-1} eſt le même que $\frac{1}{a^1}$, donc $2\times a^{-1}$ eſt encore le même que $2\times\frac{1}{a^1}$, ou $\frac{2}{a^1}$. De même pour rendre négative la puiſſance $2a^2$, on écriroit $\frac{2}{a^{-2}}$ à cauſe que $2a^2$ eſt égal à $2\times a^2$, & a^2 égal à $\frac{1}{a^{-2}}$, & par conſéquent $2\times a^2$ eſt égal à $\frac{2}{a^{-2}}$, &c.

164. Il ſuit encore des régles que nous avons données, que ſi l'on veut la racine quarrée de a ou ſa racine cubique, ou ſa racine quatriéme, &c. il faut écrire $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, &c. & que par conſéquent on peut ſe paſſer des ſignes radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, &c. De même pour tirer la racine cinquiéme de a^4, on écrira $a^{\frac{4}{5}}$; pour marquer la racine ſeptiéme de a^2, on écrira $a^{\frac{2}{7}}$, &c.

165. Ce calcul eſt commode non-ſeulement pour débarraſſer des ſignes radicaux, mais encore parce qu'on peut multiplier des puiſſances de differente eſpece les unes par les autres ; car pour multiplier $a^{\frac{1}{2}}$ par $a^{\frac{1}{3}}$, on écrira $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, ou bien en réduiſant les deux fractions en même dénomination & en les ajoutant enſemble on aura $a^{\frac{5}{6}}$ qui ſignifie que ces deux racines multipliées l'une par l'autre

l'autre donnent la racine ſixiéme de la puiſſance 5 de la grandeur a, &c.

Du Calcul des expoſans des puiſſances des multinomes.

166. Il arrive quelquefois qu'au lieu de faire les puiſſances d'un multinome, on ſe contente d'écrire ce multinome avec une ligne par deſſus qui couvre tous les termes, & à droite de cette ligne on met un nombre qui marque à quelle puiſſance on veut faire entendre que le multinome doit être élevé: ainſi au lieu des puiſſances du binomes $a+b$, on écrit $\overline{a+b}^{1}$ pour marquer la 1re. puiſſance ou le binome lui-même; $\overline{a+b}^{2}$ pour marquer qu'il faut l'élever au quarré; $\overline{a+b}^{3}$ pour marquer qu'il faut en faire le cube; $\overline{a+b}^{4}$ pour ſignifier qu'on doit l'élever à la quatriéme puiſſance, & de même des autres.

167. Si l'on exprime donc les puiſſances d'un multinome ainſi que nous venons de le dire, il eſt viſible qu'on peut appliquer à ces puiſſances les regles du calcul des expoſans; par exemple pour multiplier la puiſſance $\overline{a+b}^{2}$ du binome $a+b$ par la puiſſance $\overline{a+b}^{3}$ du même binome, on doit écrire $\overline{a+b}^{5}$, en ajoutant les deux expoſans enſemble. Pour diviſer la puiſſance $\overline{a+b}^{6}$ par la puiſſance $\overline{a+b}^{3}$, on écrira $\overline{a+b}^{3}$, en retranchant de l'expoſant 6 l'expoſant 3. Pour élever la puiſſance $\overline{a+b}^{3}$ à ſon quarré, on écrira $\overline{a+b}^{6}$, en multipliant l'expoſant 3 de la puiſſance par l'expoſant 2 de celle à laquelle on veut l'élever. Pour extraire la racine quarrée de la puiſſance $\overline{a+b}^{6}$, on écrira $\overline{a+b}^{3}$, en diviſant l'expoſant 6 par l'expoſant 2 de la racine.

De même ſi on diviſe $\overline{a+b}^{1}$ par lui-même, on aura $\overline{a+b}^{0}=1$, & ſi on diviſe $\overline{a+b}^{0}$ par $\overline{a+b}^{1}$, on aura la puiſſance négative $\overline{a+b}^{-1}$, & ſi on diviſe $\overline{a+b}^{0}$ par $\overline{a+b}^{2}$, on aura la puiſſance négative $\overline{a+b}^{-2}$, &c.

Pour rendre poſitive la puiſſance négative $\overline{a+b}^{-2}$, on écrira

$\frac{1}{\overline{a+b}^{2}}$, & au lieu de $3\times\overline{a+b}^{-3}$, on écrira $\frac{3}{\overline{a+b}^{3}}$, mais il faut prendre garde que le coëfficient 3 doit être hors de la ligne écrite ſur le multinome, car alors l'expreſſion ſignifie 3 multiplié par la puiſſance négative $\overline{a+b}^{-3}$ de $a+b$, au lieu que ſi le chiffre étoit ſous la ligne en cette ſorte $\overline{3a+b}^{-3}$, cela ſignifieroit la puiſſance négative $\overline{3a+b}^{-3}$ du binome $3a+b$, & pour rendre cette puiſſance poſitive on écriroit $\frac{1}{\overline{3a+b}^{3}}$, & il faut bien obſerver ceci; c'eſt pour cette raiſon que pour marquer que le coëfficient eſt hors du ſigne, on met toujours le ſigne × entre le coëfficient & la grandeur qui eſt ſous le ſigne.

Pour rendre négative la puiſſance $\overline{a+b}^{2}$, on écrit $\frac{1}{\overline{a+b}^{-2}}$, & pour rendre négative $4\times\overline{a+b}^{3}$, on écrit $\frac{4}{\overline{a+b}^{-3}}$, &c.

Pour exprimer la racine troiſiéme de $\overline{a+b}^{1}$, on écrit $\overline{a+b}^{\frac{1}{3}}$. De même la racine quatriéme de $\overline{a+b}^{3}$ ſe marque ainſi $\overline{a+b}^{\frac{3}{4}}$.

Si l'on veut comprendre aiſément la raiſon de tout ceci, il n'y a qu'à prendre une grandeur x égale à $\overline{a+b}$, & alors les puiſſances de $a+b$ ſeront x, x^2, x^3, x^4, x^5, &c. ſur leſquelles on pourra opérer par le calcul des expoſans, mais après toutes ces opérations on pourra mettre $a+b$ au lieu de x, & on retrouvera ce qui vient d'être dit.

168. Voilà tout ce qu'il y a de plus eſſentiel à ſçavoir touchant les opérations de l'Algébre. Voyons à preſent quel eſt l'uſage que l'Analyſe en fait pour la ſolution des problêmes numeriques. Nous verrons dans la ſuite comment on applique ce même calcul aux problêmes de la Geometrie.

CHAPITRE VI.

De l'Analyſe.

169. ON parvient à la découverte de la vérité par deux ſortes de voyes ou de Méthodes, dont l'une s'appelle *Synthèſe*, & l'autre *Analyſe*.

170. La *Synthèſe*, autrement dite Méthode de *compoſition*, commence par les principes les plus ſimples, & s'éleve par dégrés juſqu'à ce qu'elle parvienne à la connoiſſance de ce qui fait l'objet de ſa recherche.

171. L'*Analyſe* au contraire ſuppoſe la choſe faite, & deſcend peu à peu en examinant toutes les conſéquences qui ſuivent de cette ſuppoſition, juſqu'à ce qu'elle ait trouvé d'une maniere claire & évidente la verité qu'elle cherchoit.

172. On voit par-là que la ſynthèſe & l'analyſe différent entre elles, en ce que l'une commence par le détail, & finit par la compoſition, au lieu que l'autre deſcend de la compoſition au détail.

173. Les Anciens employoient la ſynthèſe & l'analyſe de même que nous, mais comme les expreſſions dont ils ſe ſervoient étoient particulieres & uniquement propres pour chaque queſtion qu'ils vouloient réſoudre, il étoit rare qu'ils tiraſſent de leur analyſe les conſéquences générales que nous découvrons aujourd'hui par le moyen des expreſſions & des caracteres dont M. Deſcartes nous a appris de faire uſage.

174. Quoique la ſynthèſe & l'analyſe paroiſſent ſi différentes l'une de l'autre, cependant leurs principes ſont les mêmes, & ces principes que je vais rapporter ici ſont ſi ſimples, qu'on aura peine à croire en les liſant, qu'ils ayent pû conduire à la découverte de tant de belles vérités.

Principes ou Axiomes.

175. Le tout eſt plus grand que ſa partie, & il eſt égal à ſes parties priſes enſemble.

176. Si une grandeur eſt parfaitement égale à une autre, on peut prendre indifféremment l'une pour l'autre. Si $a = b$ on peut prendre a au lieu de b, & b au lieu de a.

177. Si deux grandeurs ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite & qu'on ne peut aſſigner, ces deux grandeurs peuvent être dites égales.

178. Il eſt impoſſible qu'une choſe ſoit en même tems d'une façon & qu'elle ne le ſoit pas.

179. Si deux grandeurs ſont égales chacune à une troiſiéme, ces deux grandeurs ſont égales. Si $a=b$, & $c=b$; donc $a=c$.

180. Si à deux grandeurs égales on ajoute ou on retranche des grandeurs égales les ſommes ou les reſtes ſeront encore des grandeurs égales, & ſi on leur ajoute ou ſi on leur retranche des grandeurs inégales, les ſommes ou les reſtes ſeront inégaux.

181. Si on multiplie ou ſi l'on diviſe deux grandeurs égales par des grandeurs égales, les produits ou les quotients ſeront égaux, & ſi on les multiplie, ou ſi on les diviſe par des grandeurs inégales, les produits ou les quotients ſeront inégaux.

182. Si deux grandeurs ſont égales, leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, &c. ſeront egaux, de même que leur double, leur triple, leur quadruple, &c. de même encore que leur quarrés, leur cubes, leur troiſiémes puiſſances, &c. ou leurs racines ſeconde, troiſiéme, quatriéme, &c.

De la Nature des Problêmes, & de la façon de les réſoudre par l'Analyſe.

183. Dans les Problêmes ou les queſtions qu'on propoſe à réſoudre, il y a toujours des quantités connuës & des quantités inconnuës; ſi tout étoit connu, ce ne ſeroit plus une queſtion, & ſi tout étoit inconnu, ce ſeroit de la magie qu'on propoſeroit. Il n'y a que des Sorciers ou des Devins qui puiſſent parvenir à la découverte d'une verité, ſans aucune connoiſſance préliminaire, & les Mathematiciens ne ſe piquent pas d'être Sorciers ou Devins; or ces Problêmes peuvent être de deux eſpeces, les uns ſe nomment *déterminés*, parce qu'ils ne ſont ſuſceptibles que d'une ſolution, ou du moins d'un très-petit nombre, & les autres ſe nomment *indéterminés*, parce qu'on peut les réſoudre d'une infinité de façons.

184. Pour réſoudre les Problêmes déterminés, voici comme on fait 1°. On marque les grandeurs inconnuës par les dernieres lettres de l'Alphabet x, y, z, & les connuës par les premieres a, b, c, d, &c. 2°. On exprime toutes les conditions du Pro-

blême, c'eſt-à-dire, on fait autant d'équations particulieres que le Problême propoſé renferme de conditions, car chaque condition d'un Problême eſt une équation comme on verra dans la ſuite. 3°. S'il y a pluſieurs inconnuës, on prend la valeur de l'une de ces inconnuës par le moyen des équations qu'on a formées, & l'on ſubſtitue la valeur de cette inconnue dans une autre équation, ce qui fait diſparoître cette inconnue ; on fait la même choſe à l'égard d'une autre inconnue s'il en reſte plus d'une. 4°. Quand il ne reſte plus qu'une inconnue, ſuppoſé que cela ſe puiſſe, le Problême eſt déterminé, & en ce cas comme cette inconnue ſe trouve dans l'un des membres & ſouvent même dans tous les deux mêlée avec des quantités connues, on fait en ſorte que cette quantité inconnue ſe trouve toute ſeule dans un membre de l'équation, & que dans l'autre membre il n'y ait que des quantités connues, & alors le Problême eſt réſolu, puiſque la quantité inconnue ſe trouvant égale à une ou pluſieurs quantités connues, devient elle-même connue. Toute la difficulté conſiſte à faire en ſorte que la quantité inconnue puiſſe reſter ſeule dans un membre ce que l'on appellé *dégager l'inconnuë*, & nous dirons bientôt de qu'elle maniere cela ſe fait.

Que ſi on ne peut pas parvenir à faire qu'il ne reſte qu'une ſeule inconnue, ou ſi au contraire il n'en reſte plus du tout, le Problême eſt indéterminé, & l'on en trouvera la ſolution par les voyes que nous enſeignerons dans la ſuite ; or pour faire mieux comprendre ce que nous venons de dire touchant les Problêmes déterminés & indéterminés, nous allons donner un exemple de chacun d'eux.

PROBLEME DETERMINE'. *On veut couper le nombre 24 en deux parties dont l'une ſoit triple de l'autre, quelles ſont ces parties?*

Je nomme a le nombre 24, la premiere partie x, & la ſeconde y, à cauſe que ces parties ſont inconnues : or le Problême renferme deux conditions, la premiere eſt que l'un des nombres inconnus ſoit triple de l'autre, & par la ſeconde on veut que les deux nombres pris enſemble ſoient égaux à 24. Pour remplir la premiere condition, je dis $x = 3y$, & pour remplir la ſeconde, je dis $x + y = a$, mais x étant égal à $3y$, je puis mettre $3y$ au lieu de x dans l'équation $x + y = a$ (*N.* 176.) & par conſéquent $3y + y = a$; je corrige l'expreſſion, & j'ai $4y = a$; ainſi le Problême eſt déterminé, puiſqu'il ne reſte qu'une inconnue ; or cette inconnue n'étant pas ſeule dans le premier membre de l'équa-

tion, puiſqu'elle eſt multipliée par 4, je la dégage en diſant : $4y$ eſt égal à a, donc en diviſant ces deux grandeurs par 4, les quotients ſeront égaux (*N.* 180.) & la grandeur y ſera ſeule dans le premier membre, à cauſe que la diviſion par 4 détruira ce qu'avoit fait la multiplication par 4; ainſi j'aurai $y = \frac{1}{4}a$, ou $y = \frac{a}{4}$, & le Problême ſera réſolu; car mettant 24 au lieu de a, j'aurai $y = \frac{24}{4}$, ou $y = 6$, & $3y$ ou $x = 3 \times 6$, ou $x = 18$. Les deux nombres cherchés ſont donc 6 & 18 dont la ſomme fait 24, & dont l'un des deux à ſçavoir 18 eſt triple de l'autre 6.

PROBLEME INDETERMINÉ. *Deux hommes ont partagé une ſomme d'écus, & la part de l'un eſt triple de la part de l'autre; quelles ſont ces deux parts ?*

Je nomme x la plus grande part, y la moindre, & z la ſomme des deux; or par l'une des conditions du Problême, j'ai $x = 3y$, & par la ſeconde j'ai $x + y = z$, mettant donc $3y$ au lieu de x dans cette derniere équation, j'ai $3y + y = z$, ou $4y = z$, & comme toutes les conditions du Problême ſont remplies, il ne m'eſt pas poſſible de faire qu'il ne reſte qu'une ſeule inconnue, & par conſéquent le Problême eſt indéterminé, c'eſt-à-dire ſuſceptible d'une infinité de ſolutions, & en effet ſi je veux le réſoudre je n'ai qu'à prendre pour y un nombre tel que je voudrai, par exemple 2, & multiplier enſuite ce nombre par 4, ce qui donnera $8 = 4y$, & par conſéquent $8 = z$, c'eſt-à-dire la ſomme cherchée ſera 8, & x étant égal à $3y$ ſera 3×2 ou 6; ainſi les deux parts ſeront 6 & 2 dont la ſomme eſt 8, & dont la premiere eſt le triple de la ſeconde.

Ce qui fait que ce Problême eſt indéterminé, au lieu que le précédent on nous avoit donné une condition de plus, ſçavoir que la ſomme des deux étoit égale à 24, ce qui fait que les deux portions étoient déterminées par elles-mêmes, & qu'il ne nous étoit pas permis d'en déterminer une à notre gré; mais cette condition ne ſe trouvant pas dans le ſecond Problême, il a fallu néceſſairement déterminer l'une des grandeurs pour avoir une ſomme déterminée, parce qu'il n'y a point de nombre tel qu'il ſoit qui ajouté avec ſon triple ne faſſe une ſomme totale; d'où il ſuit qu'en prenant pour l'une des grandeurs tantôt 2, tantôt 3, tantôt 4, &c. on aura autant de différentes ſolutions du Problême.

Le peu de connoiſſance de ce que nous venons de dire touchant les Problêmes indéterminés eſt la cauſe de l'erreur de bien

des gens, qui en vous propoſant de ſemblales Problêmes, s'imaginent qu'on ne ſçait pas les réſoudre lorſqu'on ne leur donne pas préciſément la ſolution qu'ils ont penſé. Par exemple ſi après avoir répondu à quelqu'un qui m'auroit propoſé le Problême indéterminé dont je viens de parler, que la premiere part étoit 6, la ſeconde 2, & la ſomme des deux 8, ce quelqu'un s'aviſoit de me dire que ma ſolution ne vaut rien, parce qu'il auroit penſé 9 pour la premiere part & 3 pour la ſeconde, ce qui fait la ſomme 12, il ſe tromperoit en ce qu'il ne s'appercevroit pas que le Problême étant ſuſceptible de pluſieurs ſolutions, la mienne ſeroit auſſi bonne que la ſienne, & que parmi une infinité de nombres qui peuvent ſatisfaire à la queſtion, je ne puis trouver ceux qu'il a choiſi plutôt que d'autres que par un pur hazard.

Maniere de dégager une inconnuë qui ſe trouve ſeule dans une Equation.

186. On dégage une inconnuë, ou par l'addition ou par la ſouſtraction, ou par la multiplication, ou par la diviſion, ou par l'élévation à quelque puiſſance, ou par l'extraction de quelque racine, & quelquefois par deux ou pluſieurs de ces opérations; c'eſt ce que nous verrons dans les regles ſuivantes.

187. On dégage une inconnuë par *addition*, lorſque cette inconnuë ne ſe trouvant que dans un ſeul membre d'une équation, y eſt jointe avec une grandeur connuë négative; car alors ajoutant à l'un & à l'autre membre la quantité connuë avec le ſigne +, on trouve que l'inconnuë reſte ſeule dans le membre où elle étoit. Pour dégager l'inconnuë x dans l'équation $x-a=b$, on ajoute a à l'un & à l'autre membre, ce qui n'altere pas l'égalité des deux membres (*N.* 180.) & l'on a $x-a+a=b+a$, & comme dans le premier membre les grandeurs $-a$, $+a$, ſe détruiſent par des ſignes contraires, l'équation ſe réduit à celle-ci $x=b+a$ dans laquelle la grandeur x ſe trouvant ſeule de ſon côté, eſt par conſéquent égale à la ſomme $b+a$ des grandeurs connuës b, a.

188. On dégage une inconnuë par *ſouſtraction*, lorſque cette inconnuë ne ſe trouvant que dans un ſeul membre y eſt jointe à une grandeur connuë poſitive, l'inconnuë x ſe trouve ſeule de ſon côté. Pour dégager x dans l'équation $x+a=b$, on retranche a de part & d'autre, ce qui donne $x+a-a=b-a$; or dans le premier membre $+a-a$ ſe détruiſent, donc il reſte $x=b-a$.

189. *Remarque.* On voit par ces deux régles que ſi dans une

équation on fait paſſer une grandeur d'un membre à l'autre en changeant ſon ſigne, il y aura toujours égalité entre ſes deux membres, car dans l'équation $x - a = b$, en donnant a de part & d'autre, nous avons eu l'équation $x = b + a$, dans laquelle la grandeur a a paſſé dans le ſecond membre avec le ſigne $+$, au lieu qu'elle étoit dans le premier avec le ſigne $-$; de même en retranchant de l'un & l'autre membre $x + a = b$ la grandeur a, nous avons eu $x = b - a$, & dans cette équation la grandeur a a paſſé dans le ſecond membre avec le ſigne $-$, au lieu qu'elle étoit dans le premier avec le ſigne $+$.

190. On dégage l'inconnuë par *multiplication*, lorſque cette inconnuë ne ſe trouvant que dans un des membres de l'équation y eſt diviſée par une ou pluſieurs grandeurs connuës ; & alors on multiplie l'un & l'autre membre par le diviſeur, & la grandeur inconnue reſte ſeule de ſon côté. Pour dégager x dans l'équation $\frac{x}{a} = b$, on multiplie de part & d'autre par a, ce qui donne $\frac{ax}{a} = ab$, & en corrigeant l'expreſſion, on a $x = ab$. De même pour dégager x dans l'équation $\frac{x}{a+b} = c$, on multiplie l'un & l'autre membre par $a + b$, & l'on a $\frac{ax+bx}{a+b} = ac + bc$, & en corrigeant l'expreſſion on a $x = ac + bc$.

191. On dégage l'inconnuë par *diviſion*, lorſque cette inconnuë étant dans un ſeul membre, s'y trouve multipliée par une ou par pluſieurs grandeurs, car en ce cas on diviſe l'un & l'autre membre par le multiplicateur. Dans l'équation $ax = b$ on diviſe les deux membres par a, & l'on trouve $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$, ou $x = \frac{b}{a}$. De même dans l'équation $ax + bx = c$; on diviſe l'un & l'autre membre par $a + b$, parce que le premier terme ax du premier membre eſt x multiplié par a, & le ſecond eſt x multiplié par b, ce qui eſt la même choſe que x multiplié par $a + b$, & l'on trouve $\frac{ax+bx}{a+b} = \frac{c}{a+b}$, ou $x = \frac{c}{a+b}$.

192. *Remarque.* Il faut bien prendre garde à ces expreſſions complexes qui dans chacun de leurs termes contiennent une même grandeur ; car ces expreſſions marquent que cette grandeur a été multipliée par toutes les autres ; par exemple, l'expreſſion $ax + bx + cx + dx$ qui contient la grandeur x dans tous ſes termes, marque que cette grandeur x a été multipliée par $a + b + c + d$, & par conſéquent ſi on diviſoit cette expreſſion par

$a+b+c+d$, le quotient ſeroit la grandeur x toute ſeule. De même l'expreſſion $aax+cdx-bbx$ marque que la grandeur x a été multipliée par $aa+cd-bb$, & que par conſéquent ſi on diviſoit par $aa+cd-bb$, on auroit x au quotient. De même encore l'expreſſion $ax+bx-cx+x$, marque que la grandeur x a été multiplié par $a+b-c+1$; car le coëfficient du dernier terme x eſt 1, puiſque x eſt la même choſe que $1x$; ſi l'on diviſoit donc par $a+b-c+1$, on auroit pour quotient x.

193. On dégage l'inconnuë par l'élévation à quelque puiſſance, lorſque cette inconnuë n'étant que dans un membre de l'équation s'y trouve ſous un ſigne radical, car alors l'on éleve l'un & l'autre membre à la puiſſance qui a le même expoſant que la racine. Pour dégager x dans l'équation $\surd x = a$, on éleve l'un & l'autre membre au quarré, & l'on a $x = a^2$ (*N.* 182.) car $\surd x$ par $\surd x$ donne x, puiſque la racine en ſe multipliant elle-même produit le quarré. De même pour dégager x dans $\sqrt[3]{x} = b$, on éleve l'un & l'autre membre au cube, & l'on a $x = b^3$; car $\sqrt[3]{x}$ par $\sqrt[3]{x}$ donne $\sqrt[3]{xx}$, & $\sqrt[3]{xx}$ par $\sqrt[3]{x}$ donne $\sqrt[3]{x^3}$, ou x.

194. On dégage l'inconnuë par l'extraction d'une racine, lorſque cette inconnuë eſt élevée à quelque puiſſance dans le membre où elle ſe trouve, & en ce cas on extrait de l'un & l'autre membre la racine du même dégré que la puiſſance. Pour dégager x dans $x^3 = a^3$, on tire la racine cubique de part & d'autre, & l'on trouve $x = a$; de même pour dégager x dans $x^4 = abcc$, on tire la racine quatriéme de part & d'autre, & l'on a $x = \sqrt[4]{abcc}$, & ainſi des autres.

195. Enfin on dégage l'inconuë en employant deux ou pluſieurs de ces regles, ainſi que nous l'allons montrer par quelques exemples.

Pour dégager l'inconnuë dans $ax = bx+cd$, on fait paſſer la quantité bx du ſecond membre dans le premier, en retranchant bx de part & d'autre, ou ce qui revient au même, en changeant le ſigne $+$ en $-$, & l'on trouve $ax-bx = cd$, enſuite on diviſe par $a-b$, & l'on trouve $x = \frac{cd}{a-b}$.

Pour dégager l'inconnuë dans $dx = x+ab$, on fait paſſer la quantité x, ou $1x$ du ſecond membre dans le premier, ce qui donne $dx-1x = ab$, & diviſant de part & d'autre par $d-1$, on trouve $x = \frac{ab}{d-1}$.

Dans $ax+dx+cb=af$, on fait paſſer cb du premier dans le ſecond membre, ce qui donne $ax+dx=af-cb$, & diviſant enſuite de part & d'autre par $a+d$, on trouve $x=\frac{af-cb}{a+d}$.

Dans $\frac{a\sqrt{x}+d\sqrt{x}}{a+b}=c$, on multiplie de part & d'autre par $a+b$, ce qui donne $a\sqrt{x}+d\sqrt{x}=ac+bc$, enſuite on diviſe par $a+d$, & le quotient eſt $\sqrt{x}=\frac{ac+bc}{a+d}$, & enfin on éleve tout au quarré, ce qui donne $x=\frac{aacc+2accb+bbcc}{aa+2ad+dd}$.

Dans $\frac{a\sqrt{x}}{b}-\frac{d\sqrt{x}}{c}=f$, on réduit les deux fractions du premier membre au même dénominateur, & l'on a $\frac{ac\sqrt{x}-db\sqrt{x}}{bc}=f$, on multiplie de part & d'autre par bc, & le produit eſt $ac\sqrt{x}-db\sqrt{x}=fbc$, on diviſe tout par $ac-db$, & le quotient eſt $\sqrt{x}=\frac{fbc}{ac-db}$, enfin on éleve tout au quarré, & l'on trouve $x=\frac{ffbbcc}{aacc-2acdb+ddbb}$, & ainſi des autres.

Exemples des Problêmes déterminés.

196. Ier. EXEMPLE. *Trois Officiers ont reçu chacun une gratification; celle du ſecond eſt double de celle du premier plus 6 livres, & celle du troiſiéme eſt triple de celle du premier moins 2 livres, & la ſomme totale eſt 304 livres.*

Je nomme a la ſomme totale, & x la gratification du premier, parce qu'elle m'eſt inconnuë ; or par la premiere condition du Problême, la gratification du ſecond eſt $2x+6$, & celle du troiſiéme eſt $3x-2$ par la ſeconde condition, mais par la troiſiéme les trois gratifications priſes enſemble ſont égales à la grandeur a, donc j'ai cette équation $x+2x+6+3x-2=a$, & corrigeant l'expreſſion j'ai $6x+4=a$, je fais paſſer 4 du premier membre dans le ſecond, ce qui donne $6x=a-4$; enfin diviſant par 6, je trouve $x=\frac{a-4}{6}$, & mettant la valeur de a, j'ai $x=\frac{304-4}{6}=\frac{300}{6}=50$; ainſi la gratification du premier eſt 50, & mettant cette valeur dans les expreſſions $2x+6$, & $3x-2$ de la ſeconde & de la troiſiéme, je trouve $2x+6=2\times 50+6=100+6=106$ ſeconde gratification, & $3x-2=3\times 50-2=150-2=148$ troiſiéme gratification, & les trois nombres 50, 106 & 148 ſont en effet la ſomme 304.

II. EXEMPLE. *Deux Bombardiers revenant de leurs Batteries, l'un dit à l'autre, ſi tu avois tiré cinq coups de moins, & moi cinq coups de plus, j'aurois tiré deux fois plus de bombes que toi, & ſi tu avois tiré trois coups de plus, & moi trois de moins, j'aurois tiré autant que toi; on demande quel eſt le nombre de coups que chacun d'eux a tiré?*

Je nomme x le nombre de coups que le premier a tiré, & y celui du ſecond; or par la premiere condition du Problême, le nombre du premier augmenté de cinq eſt double du ſecond diminué de cinq; ainſi $x+5$ eſt double de $y-5$, & par conſéquent multpliant $y-5$ par 2, ce qui fait $2y-10$, nous avons $x+5=2y-10$ premiere équation.

Par la ſeconde condition du Problême, le nombre du premier diminué de 3 eſt égal au nombre du ſecond augmenté de trois; donc $x-3=y+3$, ſeconde équation.

$x+5=2y-10$ ....1ere. Equation.
$x-3=y+3$ .... 2e. Equation.

$x=2y-15$ ....1ere valeur de x.
$x=y+6$ ... 2e. valeur.

$2y-15=y+6$
$y-15=6$
$y=21$

$x=21+6=27$.

Je dégage x dans la premiere équation, ce qui donne $x=2y-15$. Je dégage de même x dans la ſeconde, & j'ai $x=y+6$; ainſi j'ai deux valeurs de x, & par conſéquent ces deux valeurs ſont égales entr'elles.

Je fais une équation de ces deux valeurs de x, ce qui donne $2y-15=y+6$. Je fais paſſer y du ſecond membre dans le premier, & j'ai $y-15=6$, & faiſant paſſer 15 du premier membre dans le ſecond, je trouve $y=21$.

Je mets cette valeur de y dans la valeur $y+6$ de x, & j'ai $x=21+6=27$; ainſi le premier a tiré 27 coups & l'autre 21, & en effet ſi j'ajoute 5 au premier, ce qui fait 32, & que je retranche 5 au ſecond ce qui fait 16, on voit que 32 eſt double de 16, & ſi je retranche 3 du premier, ce qui fera 24, & que j'ajoute 3 au ſecond, ce qui fait auſſi 24; il eſt clair que les deux nombres ſeront égaux.

198. III. EXEMPLE. *Trois hommes ont dépensé une somme d'argent, le premier & le second ont dépensé à eux deux cinq livres plus que le troisiéme, le premier & le troisiéme en ont dépensé à eux deux 15 de plus que le second, & le second & le troisiéme en ont dépensé à eux deux 25 de plus que le premier ; quelle est la somme totale & la dépense de chacun en particulier ?*

Je nomme a l'excès des deux premiers sur le troisiéme, b l'excès 15 du premier & du troisiéme sur le second, c l'excès 25 des deux derniers sur le premier, x la dépense du premier, y celle du second, & z celle du troisiéme.

Par la premiere condition, si le troisiéme avoit dépensé 5 livres de plus, sa dépense auroit été égale à la dépense du premier, & à celle du second prises ensemble ; donc j'ai cette premiere équation $x+y=z+a$, & faisant le même raisonnement à l'égard des deux autres conditions du Problême, je trouve que la seconde donne l'équation $x+z=y+b$, & que la troisiéme donne celle-ci $z+y=x+c$.

$x+y=z+a$ .... 1ere. Equation.
$x+z=y+b$ .... 2e. Equation.
$z+y=x+c$ .... 3e. Equation.

$2x+2y+2z=a+b+c+z+y+x.$
$x+y+z=a+b+c.$
$x+y+z=S.$ .... Dépense totale.

$x=S-y-z.$
$x=S-x-c.$
$2x=S-c.$
$x=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}c.$ .... Dépense du premier.

$y=S-x-z.$
$y=S-y-b.$
$2y=S-b$
$y=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}b.$ ..... Dépense du second.

$z=S-x-y.$
$z=S-z-a.$
$2z=S-a.$
$z=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}a.$ .. Dépense du troisiéme.

J'ajoute ensemble ces trois équations en faisant d'une part la somme des trois premiers membres, & de l'autre la somme des trois seconds membres, ce qui donne $2x+2y+2z=a+b+c+z+y+x$, & faisant passer $z+y+z$ du second membre dans le premier j'ai $x+y+z=a+b+c$, ce qui me fait voir que les trois dépenses ensemble, c'est-à-dire la dépense totale est égale à la somme des trois excès $a+b+c$.

Pour abréger, je suppose $a+b+c=S$, & par consequent l'équation de la dépense totale est $x+y+z=S$; or pour trou-

ver la dépenſe du premier, je dégage x dans cette équation, en faiſant paſſer $y+z$ dans le ſecond membre, ce qui donne $x = S-y-z$; mais par la troiſiéme équation des trois premieres, j'ai $z+y=x+c$, donc $-z-y=-x-c$; mettant donc $-x-c$ au lieu de $-z-y$ dans l'équation $x=S-y-z$, j'ai $x=S-x-c$; & faiſant paſſer x du ſecond membre dans le premier, je trouve $2x=S-c$, & diviſant tout par 2, j'ai enfin $x=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}c$ qui eſt la dépenſe du premier.

Pour trouver celle du ſecond je prens encore l'équation $x+y+z=S$ de la dépenſe totale; j'en dégage l'inconnuë y, ce qui donne $y=S-x-z$; mais par la ſeconde équation des trois premieres, j'ai $x+z=y+b$, ou $-x-z=-y-b$, mettant donc $-y-b$ au lieu de $-x-z$ dans l'équation $y=S-x-z$, j'ai $y=S-y-b$; & faiſant paſſer y du ſecond membre dans le premier, je trouve $2y=S-b$, & diviſant tout par 2, j'ai $y=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}b$ dépenſe du ſecond.

Pour trouver celle du troiſiéme, je prens encore l'équation $x+y+z=S$ de la dépenſe totale, je dégage z, ce qui donne $z=S-x-y$; mais par la premiere équation des trois premieres j'ai $x+y=z+a$, ou $-x-y=-z-a$, mettant donc la veleur $-z-a$ de $-x-y$ dans l'équation $z=S-x-y$, j'ai $z=\frac{1}{2}S-z-a$; & faiſant paſſer z du ſecond membre dans le premier, je trouve $2z=S-a$; & le tout diviſé par 2, donne $z=S-\frac{1}{2}a$ dépenſe du troiſiéme.

Je mets les valeurs des lettres a, b, c, dans l'équation de la ſomme totale, & dans celles des dépenſes particulieres, & je trouve que la dépenſe totale eſt 45, que celle du premier eſt $22\frac{1}{2}-12\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 10; que celle du ſecond eſt $22\frac{1}{2}-7\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 15, & que celle du troiſiéme eſt $22\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 20, & il eſt aiſé de voir que ces trois nombres 10, 15, 20 rempliſſent les conditions du Problême, car la ſomme 25 des deux premiers ſurpaſſe le troiſiéme de 5, la ſomme 30 du premier & du troiſiéme ſurpaſſe le ſecond de 15, & la ſomme 35 des deux derniers ſurpaſſe le premier de 25, ce qui étoit propoſé.

199. IV. EXEMPLE. *Deux Soldats ont tué* 80 *hommes dans une Bataille, & l'un des deux en a tué* 20 *plus que l'autre; combien chacun en a-t'il tué?*

Je nomme a la ſomme 80, d la différence 20, x le nombre d'hommes que le premier a tué, que je ſuppoſe être le plus grand, & z le nombre d'hommes qui ont été tués par l'autre; donc x

$+z=a$, & ſi du plus grand je retranche le moindre, ce qui fait $x-z$, ce reſte ſera égal à la différence d, & par conſéquent $x-z=d$.

J'ai donc deux équations $x+z=a$, & $x-z=d$, je dégage x dans la premiere, ce qui donne $x=a-z$, premiere valeur de x.

$x+z=a$ ..... 1ere. Equation.
$x=a-z$ ... 1ere. valeur de x.
$x-z=d$ ..... 2e. Equation.
$x=d+z$ .... 2e. valeur de x.

$a-z=d+z$.
$a-d=2z$.
$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=z$.
$x=d+z=d+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}d$.

Je dégage de même x dans la ſeconde équation, & j'ai $x=d+z$ ſeconde valeur de x.

Je fais une équation de ces deux valeurs de x, ce qui donne $a-z=d+z$, & faiſant paſſer z du premier membre dans le ſecond, & d du ſecond dans le premier, j'ai $a-d=2z$, & diviſant tout par 2, je trouve $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=z$, c'eſt-à-dire le plus petit nombre eſt égal à la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence.

Je mets cette valeur de z dans la ſeconde valeur de x, qui eſt $x=d+z$, & je trouve $x=d+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}d$, c'eſt-à-dire le plus grand nombre eſt égal à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence.

Mettant donc les valeurs de a & de b, je trouve $z=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=40-10=30$, & $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=40+10=50$, & ces deux nombres 30 & 50 font enſemble 80, & la différence du grand au petit eſt 20, ce qui étoit propoſé.

Or comme les lettres a & b peuvent ſignifier tel autre nombre que l'on voudra, il eſt viſible que la ſolution que l'on vient de trouver eſt générale, & que par conſéquent on en peut tirer la régle ou le Théorême ſuivant.

200. THEOREME tiré de l'Exemple précédent. *La ſomme de deux grandeurs étant connuë, & leur différence auſſi, la moitié de la ſomme plus la moitié de la différence eſt égale à la plus grande, & la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence eſt égale à la moindre.*

201. Il eſt clair que ſi dans la ſolution des Problêmes on met toujours les lettres a, b, c, &c. au lieu des grandeurs connuës, les ſolutions que l'on trouvera ſeront toujours des Théorêmes généraux pour ces ſortes de cas, comme on vient de le voir, &

voilà quel eſt l'avantage de l'analyſe d'aujourd'hui ſur celle des Anciens, qui faute d'avoir des expreſſions générales pour marquer les grandeurs connuës & les inconnuës, ne trouvoient jamais que des ſolutions particulieres pour les cas particuliers qu'ils avoient à réſoudre, ce qui les obligeoit de recommencer de nouveau lorſque les grandeurs compriſes dans un Problême n'étoient pas préciſément les mêmes qui ſe trouvoient compriſes dans un autre Problême de même eſpece. De plus, il arrive ſouvent qu'un Théorême découvert par notre méthode, nous conduit avec facilité à la découverte d'une infinité de Problêmes qui ne ſeroient pas aiſés à réſoudre ſans ce ſecours, c'eſt ce qu'on va voir dans l'exemple ſuivant où nous allons mettre en uſage le Théorême précédent.

202. EXEMPLE. *Deux Joüeurs ont gagné une ſomme d'écus, le gain du premier multiplié par le gain du ſecond fait 96, & ſi l'on fait les quarrés des deux gains, ces deux quarrés ajoutés enſemble feront 208; quel eſt le gain de chacun d'eux?*

Comme je ne connois ni la ſomme gagnée, ni la différence des deux gains, je nomme la ſomme gagnée $2x$, & la différence des deux gains $2z$, & je me ſers de ces expreſſions afin de pouvoir prendre la moitié de la ſomme & la moitié de la différence ſans fraction. Je nomme auſſi le produit 96 des deux gains a, & la ſomme 208 des quarrés b.

Par le Théorême précédent le gain du premier eſt $x+z$, & celui du ſecond eſt $x-z$; or par la pre-

$x+z$. Gain du premier.
$x-z$. Gain du ſecond.

$xx+xz-zz.$
$\quad -xz$

$xx \quad -zz$. Produit des deux gains.
$xx-zz=a$ 1ere. Equation.
$xx+2xz+zz$. Quarré du premier gain.
$xx-2xz+zz$. Quarré du ſecond.

$2xx \quad +2zz=b$ 2e. Equation.
$xx=a+zz$ 1re. valeur de xx.
$xx=\frac{b}{2}-zz.$ 2e. valeur de xx.

$a+zz=\frac{1}{2}b-zz.$
$2zz=\frac{1}{2}b-a.$
$zz=\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a.$
$z=\sqrt{\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a}$. Gain du premier.
$xx=a+\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a=\frac{b}{4}+\frac{1}{2}a.$
$x=\sqrt{\frac{b}{4}+\frac{1}{2}a}$. Gain du ſecond.

miere condition du Problême, le produit de ces deux gains multipliés l'un par l'autre eſt égal à $96 = a$; faiſant donc ce produit j'ai $xx - zz = a$.

Je fais les quarrés des deux gains, & les ajoutant enſemble, la ſomme eſt $2xx + 2zz$, laquelle eſt égale à $208 = b$ par la ſeconde condition du Problême.

Je prens dans la premiere équation la valeur de xx en faiſant paſſer zz dans le ſecond membre, & j'ai $xx = a + zz$. Je prens de même la valeur de xx dans la ſeconde équation, en faiſant d'abord paſſer $2zz$ dans le ſecond membre, ce qui donne $2xx = b - 2zz$, & diviſant enſuite le tout par 2, ce qui donne $xx = \frac{b}{2} - zz$.

Je fais une équation de ces deux valeurs de xx, & j'ai $a + zz = \frac{1}{2}b - zz$; je fais paſſer zz du ſecond membre dans le premier, & a du premier dans le ſecond, & je trouve $2zz = \frac{1}{2}b - a$, & diviſant tout par 2, j'ai $zz = \frac{b}{4} - \frac{1}{2}a$; enfin tirant la racine quarrée de part & d'autre, je trouve $z = \sqrt{\frac{b}{4} - \frac{1}{2}a}$.

Je mets la valeur $\frac{b}{4} - \frac{1}{2}a$ de zz dans la premiere valeur de xx qui eſt $xx = a + zz$, & j'ai $xx = a + \frac{b}{4} - \frac{1}{2}a$, & corrigeant l'expreſſion, je trouve $xx = \frac{b}{4} + \frac{1}{2}a$, & tirant la racine quarrée de part & d'autre, j'ai $x = \sqrt{\frac{b}{4} + \frac{1}{2}a}$.

Je mets les valeurs de a & b dans les valeurs trouvées de x & z; & je trouve $z = \sqrt{\frac{208}{4} - \frac{96}{2}} = \sqrt{52 - 48} = \sqrt{4} = 2$, & $x = \sqrt{\frac{208}{4} + \frac{96}{2}} = \sqrt{52 + 48} = \sqrt{100} = 10$; donc le premier gain $x + z = 10 + 2 = 12$, & le ſecond $x - z = 10 - 2 = 8$, & il eſt clair que ces deux gains 12 & 8 multipliés l'un par l'autre font 96, & que leurs quarrés 144 & 64 ajoutés enſemble font 108, ce qui étoit propoſé.

203. On trouvera grand nombre d'autres exemples de Problêmes déterminés dans les Chapitres ſuivans; c'eſt pourquoi je n'en dirai pas davantage pour le preſent de peur d'être trop long. Ceux qui voudront s'inſtruire plus à fond de tout ceci peuvent conſulter les Elemens de Mathematique du Pere Lami, ceux du Pere Preſtet, notre *Arithmétique des Géometres*, & l'Analyſe démontrée du Pere Reynaud.

Des

Des Equations compoſées qui ne contiennent qu'une inconnuë.

204. On nomme Equations *compoſées* toutes les équations où l'inconnuë ſe trouve élevée à différens dégrés dans deux ou pluſieurs termes. $xx+ax=bc$ eſt une équation compoſée, parce que l'inconnuë eſt au ſecond dégré dans un terme & au premier dans une autre. De même $x^3+ax+bx=abb$ eſt une équation compoſée, & ainſi des autres.

205. Toute équation compoſée prend le nom du plus haut dégré où l'inconnuë ſe trouve dans quelqu'un de ſes termes. L'équation $xx+ax=bc$ eſt du ſecond dégré, parce que le plus haut dégré où l'inconnuë x ſe trouve eſt le ſecond; l'équation $x^3+ax^2+bx=abb$ eſt du troiſiéme dégré, &c.

206. Il n'eſt pas poſſible dans les Equations compoſées de faire que l'inconnuë ſe trouve ſeule dans un membre de l'Equation & au premier dégré, en n'employant que les moyens dont nous nous ſommes ſervis pour les Equations ſimples. Qu'on faſſe paſſer d'un membre à l'autre, qu'on multiplie, qu'on diviſe, qu'on éleve à des puiſſances plus élevées, ou qu'on tire des racines tant qu'on voudra, on n'y parviendra jamais ainſi qu'on pourra voir ſi on veut en faire l'expérience; c'eſt pourquoi il a fallu néceſſairement chercher d'autres Méthodes pour réſoudre ces Equations.

207. Une Equation compoſée eſt dite *ordonnée* quand elle commence par le plus haut dégré de l'inconnuë, & que les autres dégrés vont par ordre dans les termes ſuivans. $x^4+bx^3+ccx^2-d^3x=fgg$ eſt une équation ordonnée, & elle ceſſeroit de l'être ſi l'on dérangeoit quelqu'un de ſes termes; mais ſi quelqu'un de ſes termes manquoit comme dans $x^4+aax^2+bccx=fgg$, où le ſecond terme qui devroit contenir x^3 manque, elle ne ceſſeroit pas d'être ordonnée pourvû que les autres termes fuſſent écrits ſelon leurs rangs.

208. Il arrive ſouvent qu'après avoir ordonné une équation, on fait paſſer dans le premier membre toutes les grandeurs qui ſont dans le ſecond, & alors le ſecond membre devient égal à zero, ce que l'on fait pour pouvoir réſoudre plus aiſément l'équation; ainſi au lieu de $z^3+azz+bbz=ccd$, on écrit $z^3+azz+bbz-ccd=0$.

209. La précaution commune dont on ſe ſert dans les différentes Méthodes que l'on employe pour réſoudre les équations compoſées eſt de faire en ſorte que la plus haute puiſſance de

l'inconnuë ne ſoit ni multipliée ni diviſée par quelqu'autre grandeur ; c'eſt pourquoi ſi l'équation eſt $axx + 2bx = dd$, on diviſe tout par a afin d'avoir l'équation $xx + \frac{2bx}{a} = \frac{dd}{a}$ dans laquelle la puiſſance xx n'eſt ni multipliée ni diviſée par aucune autre grandeur ; de même ſi l'équation eſt $\frac{xx}{a} + 2bx = dd$, on multiplie tout par a pour avoir l'équation $xx + 2abx = add$, & ainſi des autres.

210. On nomme grandeur *imaginaire*, une grandeur qui eſt impoſſible, par exemple la grandeur $\sqrt{-a}$ eſt imaginaire, parce qu'il n'eſt pas poſſible de trouver une grandeur réelle commenſurable ou incommanſurable qui puiſſe produire le quarré $-a$; car la racine de ce quarré auroit ou le ſigne $+$, ou le ſigne $-$; or ſi elle avoit le ſigne $+$, elle produiroit $+a$ au lieu de $-a$, en ſe multipliant elle-même, puiſque $+$ par $+$ donne $+$, & ſi elle avoit le ſigne $-$ elle produiroit auſſi $+a$ au lieu de $-a$, puiſque $-$ par $-$ donne $+$; ainſi toutes les fois que ſous le ſigne radical $\sqrt{}$, ou $\sqrt[2]{}$, il ſe trouve une grandeur négative, cette racine eſt imaginaire. On doit dire la même choſe de tous les ſignes radicaux dont l'expoſant eſt un nombre pair, & dont la grandeur qui eſt ſous le ſigne eſt une grandeur négative. Par exemple $\sqrt[4]{-a}$ eſt une grandeur imaginaire ; car ſi $-a$ étoit une quatriéme puiſſance poſſible, ſa racine auroit ſans doute ou le ſigne $+$, ou le ſigne $-$: ſi elle avoit le ſigne $+$, il eſt ſûr qu'en ſe multipliant trois fois ſucceſſivement, elle donneroit $+a$ au lieu de $-a$ pour ſa quatriéme puiſſance, & ſi elle avoit le ſigne $-$, elle donneroit d'abord pour le produit de ſa premiere multiplication le ſigne $+$, à cauſe que $-$ par $-$ donne $+$; ainſi ſon quarré autoit le ſigne $+$, or ce quarré multiplié par ſa racine donneroit $-$ au produit, puiſque $+$ par $-$ donne $-$, & par conſéquent le cube de la racine auroit le ſigne $-$; enfin ce cube multiplié par la racine donneroit $+$ au produit ; ainſi la quatriéme puiſſance de la racine ſeroit $+a$ au lieu de $-a$: mais ſi le ſigne radical avoit un expoſant impair, & que la grandeur qui eſt ſous le ſigne eut le ſigne $-$, cette racine ſeroit fauſſe mais ne ſeroit pas impoſſible ; car nous venons de voir qu'une racine négative élevée au cube donne un cube négatif, & il eſt aiſé de prouver que ſi on l'élevoit à la cinquiéme puiſſance, à la ſeptiéme, &c. ces puiſſances ſeroient des grandeurs négatives, mais non pas imaginaires.

211. Dans toutes les Equations compoſées l'inconnuë a autant de valeurs que l'équation a de dégrés, ce que nous expliquerons bientôt en examinant les formations de ces équations, & ces valeurs ſont ou toutes poſitives, ou tontes négatives, ou les unes réelles & les autres négatives, commenſurables ou incommenſurables, ou enfin les unes négatives ou poſitives, & les autres imaginaires, & dans tous ces cas le Problême peut toujours être bien propoſé, puiſqu'il y a toujours quelque valeur de x qui eſt une grandeur poſſible, mais ſi x n'avoit que des valeurs imaginaires, le Problême renfermeroit une manifeſte contradiction. Il arrive ſouvent que parmi les différentes valeurs de x, il s'en trouve ou quelques unes d'égales ou que quelquefois toutes le ſont.

De la Formation des Equations compoſées.

212. Je ſuppoſe d'une part $x=a$, & de l'autre $x=b$, & dans ces deux égalités je fais paſſer dans le premier membre la grandeur qui eſt dans le ſecond, ce qui me donne $x-a=0$, & $x-b=0$. Je multiplie ces deux équations l'une par l'autre, c'eſt-à-dire le premier membre de l'une par le premier membre de l'autre, & le ſecond par le ſecond ce qui me donne l'équation A qu'on voit ici, dont les deux produiſans ſont $x-a=0$, & $x-b=0$; ainſi pour décompoſer cette équation il eſt viſible qu'il faut retrouver les deux produiſans $x-a=0$, & $x-b=0$, par le moyen deſquels on trouvera aiſément que les valeurs de x étant a & b, cette inconnuë a par conſéquent autant de valeurs que l'équation a de dégrés.

$$\begin{array}{l} x-a=0 \\ x-b=0 \\ \hline \text{A.}\quad xx-ax+ab=0. \\ \qquad -bx \end{array}$$

213. Les produiſans d'une équation compoſée ſe nomment *racines* de l'équation, ſoit qu'ils ſoient égaux ou qu'ils ne le ſoient pas; ainſi quand on dit *tirer* les racines d'une équation, c'eſt trouver les différentes grandeurs qui l'ont produite.

214. Il faut obſerver que ſi dans une équation compoſée il ſe trouve pluſieurs termes dans leſquels l'inconnuë ſoit à un même dégré, ces termes n'en font qu'un, & on les écrit les uns ſous les autres; dans l'équation A, les termes $-ax-bx$ ne font qu'un ſeul terme.

215. Si j'avois ſuppoſé $x=a$, & $x=-b$, & qu'après avoir fait paſſer les termes des ſeconds membres dans les premiers, ce

qui auroit donné $x - a = 0$, & $x + b = 0$, j'euſſe enſuite multiplié ces deux équations l'une par l'autre, il eſt viſible que l'équation compoſée qui en ſeroit provenuë, auroit eu pour produiſans $x - a = 0$ qui eſt une grandeur poſitive, puiſqu'elle donne $x = a$, & $x + b = 0$ qui eſt une grandeur négative. De même ſi j'avois fait $x = -a$, & $x = -b$, l'équation compoſée qui en ſeroit provenuë auroit eu deux racines négatives ; enfin ſi j'avois ſuppoſé $x = \sqrt{-b}$, & $x = a$, l'équation compoſée auroit eu une racine imaginaire & une poſitive, ce qui peut ſe combiner de pluſieurs autres façons.

216. Maintenant je ſuppoſe $x = a$, $x = b$, $x = c$, & en tranſpoſant j'ai $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, & multipliant ces équations les unes par les autres, le produit eſt l'équation B du troiſiéme dégré, dont les racines ſont $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, & par conſéquent cette équation a autant de racines qu'elle a de dégrés ; & il eſt évident que ces racines peuvent varier ſelon que je ſuppoſerai x égal à des grandeurs les unes négatives, les autres poſitives, & les autres imaginaires.

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx - ax + ab = 0 \\ \quad - bx \\ \hline x - c = 0 \\ \hline \text{B.}\quad x^3 - ax^2 + abx - abc = 0. \\ \quad - bx^2 + acx \\ \quad - cx^2 + cbx \end{array}$$

Suppoſons encore $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, & $x - d = 0$, je multiplie ces 4 équations les unes par les autres, le produit eſt l'équation D du quatriéme dégré dont les racines ſont $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, & $x - d = 0$.

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx - ax + ab \\ \quad - bx \\ \hline x - c = 0 \\ \hline x^3 - ax^2 + abx - abc = 0. \\ \quad - bx^2 + acx \\ \quad - cx^2 + cbx \\ \hline x - d = 0 \\ \hline \text{D.}\quad x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0. \\ \quad - bx^3 + acx^2 - abdx \\ \quad - cx^3 + cbx^2 - acdx \\ \quad - dx^3 + adx^2 - cbdx \\ \quad + bdx^2 \\ \quad + cdx^2 \end{array}$$

217. Ce qu'il faut obſerver dans la formation de ces équa-

tions, c'eſt 1°. Que le coëfficient du ſecond terme eſt toujours égal à la ſomme des racines de l'équation ; ainſi dans l'équation A, le coëfficient du ſecond terme $-ax-bx$ eſt la ſomme $a+b$ des racines a, b de l'équation. De même dans l'équation B le coëfficient du ſecond terme $-ax^2-bx^2+cx^2$ eſt la ſomme $a+b+c$ des trois racines a, b, c, & on peut obſerver la même choſe dans l'équation D & dans les équations des dégrés plus élevés. 2°. Que dans les équations qui ont plus de trois termes comme l'équation B & l'équation D, le coëfficient du troiſiéme terme comprend les produits des racines multipliées deux à deux de toutes les façons qu'elles peuvent ſe multiplier. Par exemple dans l'équation B dont les trois racines ſont a, b, c, le coëfficient $ab+ac+cb$ du troiſiéme terme comprend les produits des trois racines multipliées deux à deux, & la même choſe peut s'obſerver dans l'équation D. 3°. Que dans les équations qui ont plus de quatre termes comme l'équation D, le coëfficient du quatriéme terme contient les produits abc, abd, acd, cbd, des quatre racines multipliées trois à trois, & on trouveroit de même que ſi l'équation avoit plus de cinq termes, le coëfficient du cinquiéme terme contiendroit les produits des racines multipliées quatre à quatre, & ainſi de ſuite. 4°. Enfin, que dans toutes les équations, le dernier terme eſt une quantité toute connuë, qui eſt le produit de toutes les racines, ainſi dans l'équation A, le dernier rerme ab eſt le produir des deux racines a, b ; dans l'équation B, le dernier terme abc eſt le produit des trois racines a, b, c, & de même des autres.

218. Or delà il ſuit que ſi le ſecond terme manque dans une équation, il faut néceſſairement qu'il y ait des racines poſitives & des négatives qui s'entredétruiſent, & qui par conſéquent rendent le ſecond terme égal à zero. De même, ſi le troiſiéme terme manque dans celles qui ont plus de trois termes, il faut qu'il y ait des produits des racines négatifs, & d'aurres poſitifs qui s'entredétruiſent, & la même choſe doit ſe dire des autres équations plus élevées où il manqueroit quelqnes termes.

219. M. Deſcartes a obſervé 1°. que ſi toutes les racines d'une équation ſont poſitives les termes de l'équarion onr alternativement le ſigne + & le ſigne —, comme on voir aux trois équations ci-deſſus A, B, D. 2°. Que ſi elles ſont toutes négatives tous les termes auront le ſigne +, ce qui eſt évident, puiſque tous les produiſans auront le ſigne +. 3°. Enfin, que s'il s'en trouve

de négatives & de poſitives, tous les termes de l'équation n'auront pas alternativement le ſigné + & le ſigne —, mais que cette alternative ſera interrompuë autant de fois qu'il y a de racines négatives, & delà on peut connoître aiſément combien il y a de racines poſitives & de négatives dans une équation.

Ce que M. Deſcartes aſſure ici peut ſe démontrer aiſément ſi l'on veut ſe donner la peine de mettre dans les produiſans des chiffres au lieu des grandeurs connuës. Suppoſons, par exemple $x-2=0$, $x-3=0$, $x+4=0$, le produit de ces trois équations ſera une équation du troiſiéme dégré dans laquelle l'expreſſion étant corrigée, on aura $x^3-1xx-14x+24=0$; or l'ordre alternatif des ſignes eſt ici interrompu une fois; donc il y a une racine négative & les deux autres ſont poſitives, & en effet $x+4=0$ eſt négative, puiſqu'elle donne $x=-4$, & les deux autres $x-2=0$, $x-3=0$, ſont poſitives, à cauſe qu'elles donnent $x=2$, & $x=3$, & on trouvera la même choſe dans tous les autres cas.

$$\begin{array}{l} x-2=0 \\ x-3=0 \\ \hline xx-2x+6=0. \\ \quad -3x \\ \hline x+4=0 \\ \hline x^3-2xx+6x+24=0. \\ \quad -3xx-8x \\ \quad +4xx-12x \\ \hline x^3-1xx-14x+24=0. \end{array}$$

De la Réſolution des Equations du ſecond dégré.

220. Quand le ſecond terme d'une équation du ſecond dégré manque, la réſolution en eſt facile, puiſqu'il n'y a qu'à faire paſſer la grandeur connuë dans le ſecond membre, ſuppoſé qu'elle n'y ſoit pas, & enſuite extraire la racine quarrée de part & d'autre; ainſi pour réſoudre l'équation $xx-bb=0$, on fait paſſer bb dans le ſecond membre, ce qui donne $xx=bb$, & tirant la racine quarrée on a $x=b$; que ſi l'équation étoit $xx+bb=0$, ou $xx=-bb$, les deux racines ſeroient imaginaires, parce qu'il n'y a point de grandeur poſitive ou négative qui puiſſe être la racine du quarré $-bb$.

221. Quand l'équation a tous ſes termes on la réſout en ſe rappellant que le quarré de tout binome $x+b$ contient dans ſon premier terme, le quarré du premier terme x du binome, deux fois le premier terme x multiplié par le ſecond, ou ce qui revient au même, deux fois le ſecond, ou le double du ſecond multiplié par le premier, & enfin le quarré du ſecond (*N.* 97.)

d'où il ſuit que ſi l'on a les deux premiers termes d'un tel quarré on pourra aiſément trouver le troiſiéme. Par exemple, ſi on a les deux premiers termes $xx+2ax$ d'un quarré, on verra ſans peine que le ſecond terme $2ax$ eſt le produit du premier terme x de la racine multiplié par le double du ſecond terme, & par conſéquent prenant la moitié du coëfficient $2a$, laquelle eſt a, on fera ſon quarré aa, & ce quarré étant ajouté aux deux termes $xx+2ax+aa$ qui ſera un quarré parfait, cela poſé

Soit l'équation $xx-2ax+bb=0$, je fais paſſer bb dans le ſecond membre, & j'ai $xx-2ax=-bb$, je vois que le premier membre ſeroit un quarré parfait ſi j'y ajoutois le quarré de la moitié de ſon coëfficient; or cette moitié eſt a, & ſon quarré eſt aa, c'eſt pourquoi j'ajoute aa à l'un & l'autre membre pour conſerver l'égalité, & je trouve $xx-2ax+aa=aa-bb$. Je tire la racine quarrée de part & d'autre, mais comme la racine quarrée du premier membre eſt ou $x-a$, ou $a-x$; car l'une & l'autre de ces racines multipliée par elle-même donne le premier membre $xx-2ax+aa$; j'ai donc $x-a=\sqrt{aa-bb}$, ou $a-x=\sqrt{aa-bb}$; c'eſt pourquoi ſi dans la premiere de ces deux équations je fais paſſer a du premier membre dans le ſecond, j'aurai $x=a+\sqrt{aa-bb}$ qui ſera l'une des racines de l'équation propoſée $xx-2ax=-bb$, & ſi dans l'autre équation $a-x=\sqrt{aa-bb}$, je fais paſſer x du premier membre dans le ſecond, & $\sqrt{aa-bb}$ du ſecond dans le premier, j'aurai $a-\sqrt{aa-bb}=x$, qui ſera la ſeconde racine de l'équation propoſée.

222. Ier. EXEMPLE. *Deux hommes ont un certain nombre d'écus, le premier en a* 10, *& ſi l'on multiplie la part du premier par celle du ſecond, & qu'on retranche le produit de la ſomme des quarrés des deux parts, le reſte eſt* 84; *quelle eſt la part de chacun d'eux ?*

Je nomme a la part 10 du premier, b le reſte 84, & x la part du ſecond; donc la ſomme des quarrés des deux parts eſt $xx+aa$, & le produit de la premiere par la ſeconde eſt ax; retranchant donc ax de $xx+aa$, le reſte eſt $xx-ax+aa$, lequel eſt égal à b; ainſi j'ai l'équation $xx-ax+aa=b$; je fais paſſer aa dans le ſecond membre, ce qui donne $xx-ax=b-aa$; j'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{1}{4}aa$ de la moitié du coëfficient a, afin de rendre le premier membre un quarré parfait, enfin extrayant la racine quarrée de part & d'autre, je trouve

$x - \frac{1}{2}a$, ou $\frac{1}{2}a - x = \sqrt{b - \frac{1}{4}aa}$, & dégageant x dans l'un & l'autre de ces deux expreſſions, je trouve pour la premiere racine $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{b - \frac{1}{4}aa}$, & pour la ſeconde $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{b - \frac{1}{4}aa}$, & mettant les valeurs des lettres connues, les deux racines ſont $x = 8$, & $x = 2$, ces deux racines ſont poſitives, ainſi l'équation a deux ſolutions réelles & poſitives. En effet ſi je ſuppoſe que le ſecond ait 8 écus, cette part multipliée par celle du premier qui eſt 10 donnera le produit 80 lequel étant retranché de la ſomme 164 des quarrés des deux parts, le reſte eſt 84 ainſi qu'il étoit propoſé, & ſi je ſuppoſe que la part du premier ſoit égale à 2, le produit de 2 par 10 ſera 20, lequel retranché de la ſomme 104 des quarrés donnera 84 de même qu'auparavant.

$$xx - ax + aa = b$$
$$xx - ax = b - aa$$
$$xx - ax + \tfrac{1}{4}aa = b - \tfrac{1}{4}aa$$
$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{b - \tfrac{1}{4}aa}$$
$$x = \begin{cases} \frac{1}{2}a + \sqrt{b - \frac{1}{4}aa} \\ \frac{1}{2}a - \sqrt{b - \frac{1}{4}aa} \end{cases}$$
$$x = 5 + \sqrt{84 - 75} = 5 + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$$
$$x = 5 - \sqrt{84 - 75} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

Si dans l'équation $xx - ax + aa = b$ nous avions fait paſſer b dans le premier membre, nous aurions eu $xx - ax + aa - b = 0$, & comme b eſt moindre que aa, le dernier terme auroit eu le ſigne +, ainſi l'ordre alternatif des ſignes ſe trouvant dans cette équation, cela nous auroit fait juger que les deux racines étoient poſitives, ce que nous venons de vérifier.

223. II. EXEMPLE. *On a envoyé trois petits Détachemens, le premier eſt de 10 hommes, le ſecond en a 2 plus que le troiſiéme, & ſi l'on fait les quarrés des nombres d'hommes de chaque Détachement, le quarré du premier ſera égale à la ſomme des quarrés des deux autres; combien y a-t'il d'hommes dans le ſecond & le troiſiéme Détachement?*

Je nomme a le nombre d'hommes du premier Détachement, b la différence 2 du ſecond au troiſiéme, & x le troiſiéme; donc par la premiere condition j'ai $x + b$ pour le nombre du ſecond Détachement; je fais les quarrés aa, xx, $xx + 2bx + bb$ de ces trois nombres, & par la ſeconde condition la ſomme des deux derniers

derniers eſt égale au premier, ce qui donne $2xx + 2bx + bb = aa$.

$$2xx + 2bx + bb = aa$$
$$xx + bx + \frac{bb}{2} = \frac{aa}{2}$$
$$xx + bx = \frac{aa}{2} - \frac{bb}{2}$$
$$xx + bx + \frac{bb}{4} = \frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}$$
$$\left.\begin{matrix} x + \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} + x \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$$
$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}, \text{ premiere racine.}$$
$$x = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}, \text{ ſeconde racine.}$$
$$x + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} = 0$$
$$x + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} = 0$$

$$xx + \frac{bx}{2} - x\sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} + \frac{bx}{2} + \frac{bb}{4} - \frac{b}{2}\sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} + x\sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} + \frac{b}{2}\sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} - \frac{aa}{2} + \frac{bb}{4}$$

$$xx + bx + \frac{2bb}{4} - \frac{aa}{2} = 0$$

ou $xx + bx + \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} = 0$

Je diviſe tout par 2 pour dégager le premier terme de l'inconnuë de ſon coëfficient, puis je fais paſſer $\frac{bb}{2}$ dans le ſecond membre; enfin j'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{bb}{4}$ de la moitié du coëfficient b du ſecond terme, ce qui fait que dans le ſecond membre il ſe trouve $-\frac{bb}{4}$ au lieu de $\frac{bb}{2}$, car $\frac{bb}{4}$ qu'il faut ajouter avec $-\frac{bb}{2}$ qu'il y avoit déja, étant réduits au même dénominateur, en multipliant par 2 le numérateur & le dénominateur de la fraction $-\frac{bb}{2}$, on a $\frac{bb}{4} - \frac{2bb}{4}$, ce qui fait $-\frac{bb}{4}$.

J'ai donc $xx+bx+\frac{bb}{4}=\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}$, & tirant la racine quarrée de part & d'autre, j'ai $x+\frac{1}{2}b$, ou $\frac{1}{2}b+x=\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$, & de quelque façon que je dégage x, je trouve $x=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$, ce qui ſemble faire voir que l'équation n'a qu'une racine, cependant elle en a deux ; car la ſeconde eſt $x=-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$.

Et pour s'en convaincre on n'a qu'à tout faire paſſer dans le premier membre dans l'une & dans l'autre de ces expreſſions, & l'on aura $x+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}=0$ pour la premiere, & $x+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}=0$ pour la ſeconde, & multipliant ces deux racines l'une par l'autre, le produit ſera $xx+bx+\frac{bb}{4}-\frac{aa}{2}=0$ qui eſt préciſément l'équation $xx+bx+\frac{bb}{2}=\frac{aa}{2}$ de notre Problême, puiſqu'il n'y a qu'à faire paſſer $\frac{aa}{2}$ dans le premier membre de celle-ci pour la rendre parfaitement égale au produit des deux racines.

Je mets les valeurs des lettres a, b, c, dans les deux racines, & j'ai $x=-1+\sqrt{50-1}=-1+\sqrt{49}=-1+7=6$ valeur poſitive de x, & $x=-1-7=-8$ valeur négative de x ; ainſi quoique l'équation ait deux racines, il n'y en a qu'une qui puiſſe réſoudre le Problême, ſçavoir la poſitive 6 ; le troiſiéme Détachement a donc 6 hommes, & par conſépuent le ſecond en a 8, & il eſt aiſé de vérifier ſi les trois nombres 10, 8, & 6 rempliſſent toutes les conditions du Problême.

Si dans l'équation $xx+bx+\frac{bb}{2}=\frac{aa}{2}$ on avoit fait paſſer la grandeur $\frac{aa}{2}$ du ſecond membre dans le premier, on auroit eu $xx+bx+\frac{bb}{2}-\frac{aa}{2}=0$, & à cauſe de la grandeur a plus grande que la grandeur b, le dernier terme auroit eu le ſigne $-$; c'eſt pourquoi l'ordre alternatif des ſignes $+$ & $-$ auroit été interrompu une fois, & cela nous fait juger ſelon la regle de M.

Deſcartes, qu'il y auroit eu une racine négative dans l'équation, ce que nous avons trouvé être véritable.

Je ne donne pas un plus grand nombre d'exemples de peur d'être trop long, mais je ſuis bien aiſe de faire obſerver que ſi dans les racines des deux exemples précédens, la grandeur qui eſt ſous le ſigne radical avoit été une grandeur négative, les deux expreſſions des racines auroient été imaginaires, & que par conſéquent les Problêmes propoſés auroient renfermé une contradiction manifeſte.

De la Réſolution des Equations du 3e, 4e, 5e, dégré, &c.

224. On donne différentes Méthodes pour réſoudre ces ſortes d'équations, mais comme la plûpart de ces Méthodes ſont extrêmement compliquées, & qu'elles demandent grand nombre de préparations longues, ennuyeuſes & embarraſſantes, j'ai cru devoir m'en tenir ici à la plus ſimple de toutes, qui conſiſte à faire en ſorte que le plus haut dégré de l'inconnuë ſe trouve ſans aucun coëfficient, ainſi que nous l'avons enſeigné ci-deſſus, (*N.* 209.), & enſuite à diviſer l'équation par l'inconnuë x, moins ou plus quelqu'un des diviſeurs du dernier terme de l'équation, lequel eſt toujours une grandeur entierement connuë qui contient le produit de toutes les racines (*N.* 217.) car puiſque l'équation ſe forme par la multiplication de pluſieurs différentes grandeurs de x, leſquelles en paſſant dans le premier membre donnent les produiſans $x-a=0$, ou $x+a=0$, &c. (*N.* 212. 213.) il eſt clair qu'en diviſant par quelqu'une des équations produiſantes, le diviſeur doit être exact, & ſi cela n'eſt pas, ce ſera une marque, ou que l'équation aura été produite par des incommenſurables, ou par des incommenſurables & des imaginaires, &c.

225. Il ſuit delà que pour pouvoir réſoudre une équation compoſée du troiſiéme, quatriéme, cinquiéme dégré, &c. il faut néceſſairement ſçavoir trouver tous les diviſeurs de ſon dernier terme tout connu, & c'eſt ce que nous allons enſeigner dans le Problême ſuivant.

226. PROBLEME. *Trouver tous les diviſeurs d'un nombre propoſé.*

Soit le nombre propoſé 4320, je prens les nombres ſimples 2, 3, 5, 7, &c. entendant par le nom de nombres ſimples ceux qui ne peuvent ſe diviſer que par eux-mêmes ou par l'unité, & je diviſe d'abord le nombre propoſé par 2; ce qui me donne le quotient 2160, & il ne reſte rien; ainſi 2 eſt un diviſeur exact

du nombre propoſé. Je diviſe le quotient 2160 encore par 2, & le quotient 1080
eſt encore exact; c'eſt pourquoi je le diviſe encore

2	2	2	2	2	3	3	3	5
4320 (	2160 (	1080 (	540 (	270 (	135 (	45 (	15 (	5 (1

par 2, & je trouve encore un nouveau quotient exact 540, lequel diviſé de nouveau par 2 donne un autre quotient exact 270, que je puis encore diviſer par 2, & j'ai un quotient exact 135, mais celui-ci ne peut plus ſe diviſer par 2, c'eſt pourquoi je le diviſe par 3, & le quotient 45 eſt exact; je diviſe ce quotient par 3, & je trouve un nouveau quotient 15, lequel diviſé par 3 donne exactement 5; or 5 ne pouvant plus ſe diviſer par 3, je le diviſe par 5, & j'ai pour quotient 1 qui ne peut plus ſe diviſer.

Les diviſeurs ſimples ſont donc 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5 & 1; or comme tous ces diviſeurs ſont ſucceſſifs, & que c'eſt la même choſe de diviſer un nombre ſucceſſivement par pluſieurs nombres, ou de le diviſer tout d'un coup par le produit de ces nombres (*N.* 35.) il eſt clair que les deux diviſions ſucceſſives par 2 & 2 donnent le même quotient que ſi j'avois diviſé tout d'un coup par le produit 4 des deux diviſeurs; donc 4 eſt encore un diviſeur exact du nombre propoſé. Par la même raiſon les trois diviſeurs ſucceſſifs 2, 2, 2, multipliés les uns par les autres donneront un nouveau diviſeur exact 8; les quatre diviſeurs ſucceſſifs 2, 2, 2, 2, en ſe multipliant les uns par les autres donneront un nouveau diviſeur 16, & le produit des cinq diviſeurs 2, 2, 2, 2, 2, donnera encore un diviſeur 32; ainſi nous aurons quatre autres diviſeurs 4, 8, 16, 32, multiples de 2.

Je fais la même choſe à l'égard des trois diviſeurs ſimples 3, 3, 3, & je trouve deux nouveaux diviſeurs 9 & 27 multiples de 3.

Maintenant je multiplie le diviſeur ſimple 2 & ſes multiples, par le diviſeur ſimple 3 & ſes multiples, & j'ai 15 nouveaux diviſeurs 6. 12. 24. 48. 96. 18. 36. 72. 144. 288. 54. 108. 216. 432. 864.

Je multiplie le diviſeur ſimple 5 par le diviſeur ſimple 2 & ſes multiples, par le diviſeur 3 & ſes multiples, & par les quinze diviſeurs précédens; ce qui me donne les vingt-trois nouveaux diviſeurs 10. 20. 40. 80. 160. 15. 45. 135. 30. 60. 120. 240. 480. 90. 180. 360. 720. 1440. 270. 540. 1080. 2160. 4320.

Ainſi en ne prenant qu'une fois chaque diviſeur ſimple, & mettant avec eux l'unité qui eſt auſſi un diviſeur, nous avons quatre diviſeurs ſimples qui ajoutés à tous les autres donnent en

en tout les quarante-huit diviſeurs ſuivans 1. 2. 3. 4. 5. 8. 16. 32. 9. 27. 6. 12. 24. 48. 96. 18. 36. 72. 144. 288. 54. 108. 216. 432. 864. 10. 20. 40. 80. 160. 15. 45. 135. 30. 60. 120. 240. 480. 90. 180. 360. 720. 1440. 270. 540. 1080. 2160. 4320. & il eſt clair que l'on ne peut pas en trouver d'autres, ce qui ſe démontre par l'opération même ; car le nombre propoſé étant diviſé exactement par les quatre diviſeurs ſimples 1. 2. 3. 5. qui en ſe multipliant pluſieurs fois les uns par les autres l'ont produit, il faut néceſſairement que tout diviſeur de ce nombre ſoit ou quelqu'un de ces quatre nombres ſimples, ou quelqu'un de leurs multiples : or nous avons pris tous les multiples de ces quatre diviſeurs qui peuvent diviſer exactement ; donc en ajoutant à tous ces multiples les quatre diviſeurs ſimples, nous avons pris tous les diviſeurs poſſibles, & on n'en ſçauroit trouver d'autres. Cela poſé

227. Soit l'équation du troiſiéme dégré $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ dont on demande les racines ; je cherche tous les diviſeurs du dernier terme 24, qui ſont 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. & 24, & prenant l'inconnuë x, je fais $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, ce qui donne en tranſpoſant d'un membre à l'autre $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, &c. & ce ſont des valeurs poſitives. Je fais de même $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, &c. & en tranſpoſant j'ai $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, &c. & ce ſont des valeurs négatives.

Je diviſe l'équation propoſée par chacune des valeurs poſitives juſqu'à ce que j'en trouve une qui diviſe exactement, & je vois que $x - 2 = 0$ eſt un diviſeur exact, ainſi $x = 2$ eſt une racine de l'équation.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 9x^3 + 26x - 24 & x^2 - 7x + 12 \\ \hline x - 2 & \\ \hline -7x^2 + 26x & \\ x - 2 & \\ \hline +12x - 24 & \\ x - 2 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Pour trouver les deux autres, je diviſe le quotient $x^2 - 7x + 12 = 0$ de la même façon, c'eſt-à-dire, je cherche les diviſeurs de ſon dernier terme qui ſont 1. 2. 3. 4.

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 7x + 12 & x - 4 \\ \hline x - 3 & \\ \hline -4x + 12 & \\ x - 3 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

6, & 12, & je fais les équations positives $x-1=0$, $x-2=0$, &c. & les négatives $x+1=0$, $x+2=0$, & je divise l'équation d'abord par chacune des équations positives jusqu'à ce que j'en trouve une qui divise exactement; or en opérant ainsi je trouve que $x+3=0$ est un diviseur parfait, & que le quotient est $x-4=0$; ainsi les deux autres racines sont $x=3$, & $x=4$, & les trois racines sont positives, ce que l'on pouvoit voir d'abord par l'ordre alternatif des signes + & —.

Que si en divisant par les équations positives on n'en trouvoit point qui divisât exactement, ce seroit marque qu'il n'y auroit point de racine positive commensurable, & en ce cas l'on diviseroit par les équations négatives jusqu'à ce qu'on en trouvât une qui divisât exactement, & si en achevant le reste comme ci-dessus, on trouvoit deux autres racines, les trois racines seroient négatives; que si on ne trouvoit point d'équations négatives qui divisât exactement, ce seroit une marque que l'équation n'auroit point non-plus de racines négatives commensurables.

On voit aisément qu'il pourroit se trouver des racines positives, des racines négatives commensurables & incommensurables, & enfin des racines imaginaires, ainsi sans entrer dans un plus grand détail, je me contenterai de faire voir l'usage que l'on peut faire de ces équations dans l'exemple suivant.

EXEMPLE. *Deux personnes ont partagé la somme de six livres; de façon qu'en faisant le cube de leur parts, la différence est 56, on demande quelle est la part de chacun d'eux.*

Je nomme $2a$ la somme 6, $2z$ la différence de l'une à l'autre part, & $2b$ la différence 56 des deux cubes; donc la part du premier est $a+z$ (*N.* 200.), & celle du second est $a-z$; je fais les cubes, & retranchant le plus petit du plus grand, le reste est $2z^3+6aaz$.

$$\begin{array}{rl} a^3+3aaz+3azz+ & z^3. \text{ Cube du } 1^{er}. \\ a^3-3aaz+3azz- & z^3. \text{ Cube du } 2^{e}. \\ \hline 6aaz & 2z^3. \text{ Différence.} \end{array}$$

Or par la condition du Problême, cette différence est égale à $56=2b$,

$$\begin{array}{l} 2z^3+6aaz=2b \\ z^3+3aaz=b \\ z^3+3aaz-b=0 \end{array}$$

donc j'ai $2z^3+6aaz=2b$, & divisant tout par 2, & faisant passer b du second membre dans le premier, j'ai $z^3+3aaz-b=0$ qui est une équation du troisiéme dégré qui contient néces-

ſairement des racines négatives, puiſque le ſecond terme manque.

Je mets dans cette équation les valeurs des lettres a, b, ce qui donne $z^3 + 27z - 28 = 0$; or les diviſeurs de 28 ſont 1. 2. 4. 7. 14. & 28 ; faiſant donc mes équations poſitives $z - 1 = 0$, $z - 4 = 0$, &c. & les négatives $z + 1 = 0$, $z + 4 = 0$, &c. je trouve que $z - 1 = 0$ diviſe exactement l'équation ; ainſi $z - 1 = 0$, ou $z = 1$ eſt une racine poſitive de l'équation.

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 + 27z - 28 & z^2 + z + 28 \\
\hline
z - 1 & \\
\hline
+ z^2 + 27z & \\
\quad z - 1 & \\
\hline
\quad 28z - 28 & \\
\quad z - 1 & \\
\hline
\quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Pour trouver les deux autres, je réſous l'équation $z^2 + z + 28 = 0$ qui eſt du ſecond dégré, par la Méthode du ſecond dégré, & je trouve que les deux racines ſont $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{-28 + \frac{1}{4}}$, & $z = -\frac{1}{2} - \sqrt{-28 + \frac{1}{4}}$, & ces deux racines ſont imaginaires, ainſi le Problême n'a qu'une ſolution ; or puiſque $z = 1$, la différence ſera $2z = 2$, & par conſéquent la part du premier qui eſt $a + z$ doit être $3 + 1$, ou 4, & la part du ſecond qui eſt $a - z$ doit être $3 - 1$ ou 2, & la ſomme de ces deux nombres eſt 6, & la différence de leur cubes 64 & 8 eſt 56, ce qui étoit propoſé.

Et on réſoudra de même les autres équations de quelque dégré qu'elles ſoient, que ſi elles ne peuvent pas ſe réduire par cette voye, ou qu'on n'en puiſſe pas du moins trouver quelque racine, ce ſera une marque que cette équation ne contiendra que des racines incommenſurables.

228. Ce ſeroit ici le lieu de parler de la maniere d'extraire ces racines incommenſurables, mais comme on ne s'aviſe pas de propoſer des problêmes numériques qui ne contiennent que des grandeurs incommenſurables, & qu'à l'égard des problêmes géométriques on a d'autres Méthodes dont nous parlerons dans la ſuite, je paſſerai ici cette matiere ſous ſilence pour ne pas amuſer les Lecteurs à des choſes qui ne ſont pas d'une grande utilité.

De la Réſolution des Problêmes indéterminés.

229. Ier. EXEMPLE. *Quatre Marchands ont fait une Societé, la ſomme des miſes des deux premiers eſt 14 livres, celle des miſes du ſecond & du troiſiéme eſt 16, celle des miſes du troiſiéme & du quatriéme eſt 22, & celle des miſes du premier & du quatriéme eſt 20 ; quelle eſt la miſe totale, & la miſe de chacun en particulier ?*

Je nomme a la ſomme 14; b la ſomme 16, c la ſomme 22; & d la ſomme 20, x la miſe du premier; y celle du ſecond, z celle du troiſiéme, & u celle du quatriéme, les conditions du Problême me donnent les 4 équations qu'on voit ici, leſquelles ajoutées, font

$x+y=a$, premiere condition.
$y+z=b$, ſeconde condition.
$z+u=c$, troiſiéme condition.
$u+x=d$, quatriéme condition.

$2x+2y+2z+2u=a+b+c+d$
$x+y+z+u=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$. Miſe totale

une équation qui diviſée par 2 donne l'équation ou la valeur de la miſe totale; mais de cette valeur je ne puis tirer les miſes particulieres, ainſi que j'ai fait dans le troiſiéme exemple des Problêmes déterminés (*N.* 198.) car ſi je veux dégager quelqu'une des inconnuës, par exemple x, les trois autres inconnuës paſſeront dans le ſecond membre, & j'aurai beau ſubſtituer les valeurs de ces inconnuës priſes dans les conditions du Problême, je ne découvrirai rien,

Pour trouver donc ces miſes je dégage y dans la premiere & la ſeconde condition, ce qui donne deux valeurs de y, je fais une équation de ces deux valeurs, & je dégage z, ce qui donne $z=b-a+x$. Je dégage z dans la troiſiéme condition, & j'ai $z=c-u$.

$y=a-x$, 1re valeur de y
$y=b-z$, 2e. valeur de y.

$a-x=b-z$

$z=b-a+x$, 1re valeur de z.
$z=c-u$ 2e. valeur de z.

$b-a+x=c-u$

$u=-b+a-x+c$, 1re valeur de u.
$u=d-x$ 2e. valeur de u.

$-b+a-x+c=d-x$
$-b+a+c=d$

Je fais une équation des deux valeurs de z, & j'en dégage l'inconnuë u, ce qui me donne $u=-b+a-x+c$, je dégage de même u dans la quatriéme, & j'ai $u=d-x$.

Je fais une équation des deux valeurs de u, & corrigeant l'expreſſion, c'eſt-à-dire, effaçant x de part & d'autre, je trouve l'équation $-b+a+c=d$, dont l'un & l'autre membre contiennent des grandeurs entierement connuës, ce qui ne détermine

mine rien, c'eſt pourquoi le Problême eſt indéterminé ; mais ſi je détermine l'une des inconnuës toutes les autres le deviendront aiſément. Je choiſis l'inconnuë x pour la déterminer, & pour ne pas ſuppoſer x égal à quelque nombre qui ne ſeroit pas propre pour la réſolution, je vois que dans la premiere valeur de y, l'inconnuë x doit être moindre que a ſi je veux que y ait une valeur poſitive. De même dans la ſeconde valeur de u, je vois que x doit être moindre que d, ſi je veux que u ſoit une grandeur poſitive ; & dans la premiere valeur de z je ne trouve rien qui détermine x ; ainſi je prens au lieu de x une grandeur moindre que a & que d, & mettant cette valeur au lieu de x dans les valeurs de y, z, u, dont nous venonr de parler, toutes les inconnuës ſe trouvent déterminées.

Or $a = 14$, & $d = 20$, prenant donc un nombre au-deſſous de 14 pour le faire égal à x, je réſoudrai le Problême.

Ainſi je ſuppoſe $x = 10$, & par conſéquent j'ai $y = a - x = a - 10 = 14 - 10 = 4$; $z = b - a + x = 16 - 14 + 10 = 12$, & $u = d - x = 20 - 10 = 10$, & ces quatre nombres $x = 10$, $y = 4$, $z = 12$, & $u = 10$ rempliſſent les conditions du Problême, ce qu'il eſt facile d'éprouver ; on trouvera d'autres ſolutions, en ſuppoſant x égal à quelqu'autre nombre au-deſſous de 14.

230. II. EXEMPLE. *Un homme tient dans ſes deux mains deux différens nombres de jettons, & ſi l'on multiplie ces deux nombres l'un par l'autre, & qu'au produit on ajoute la ſomme des deux nombres, la ſomme totale ſera 34 ; combien y a-t'il de jettons dans chaque main?*

Je nomme a la ſomme 34, z le premier nombre de jettons, & y le ſecond, ainſi par la premiere condition du Problême, j'ai $zy + z + y = a$. Je fais paſſer y du premier membre dans le ſecond, & diviſant enſuite par $y + 1$, j'ai $z = \frac{a - y}{y + 1}$, & toutes les conditions du Problême étant remplies, il me reſte deux inconnues, & par conſéquent il m'eſt libre de déterminer l'une des deux par exemple y, mais à cauſe du numerateur $a - y$, je vois que y doit être moindre que a ſi je veux que z ſoit une grandeur poſitive, ainſi je puis prendre pour y telle grandeur que je voudrai au-deſſous de $a = 34$.

$$zy + z + y = a$$
$$zy + z = a - y$$
$$z = \frac{a - y}{y + 1}$$

Suppoſons $y = 4$, je mets cette valeur dans l'équation $z = \frac{a - y}{y + 1}$, & je trouve $z = \frac{34 - 4}{4 + 1} = \frac{30}{5} = 6$, & les deux nombres 4 & 6 rempliſſent les conditions du Problême ; mais il faut prendre

garde que quoiqu'il me ſoit libre de prendre pour y tel nombre que je voudrai au-deſſous de 34, cependant je ne dois prendre que ceux qui peuvent donner une valeur de z en nombre entier, car le nombre de jettons de l'une & de l'autre main eſt un nombre entier; ainſi il faut rejetter toutes les ſuppoſitions de y qui ne donneroient pas un nombre entier pour z.

231. Il n'arrive pas toujours qu'on puiſſe réſoudre un problême indéterminé, en ſuppoſant que l'une des inconnuës eſt égale à un nombre quelconque; & dans ces cas il faut avoir recours à d'autres voyes, ainſi qu'on va voir dans les deux exemples ſuivans.

232. III. EXEMPLE. *On demande de partager le quarré* 100 *en deux autres quarrés parfaits, c'eſt-a-dire en deux quarrés dont on puiſſe extraire la racine.*

Je nomme aa le quarré 100, & xx, zz, les deux quarrés demandés, ainſi par la condition du Problême, j'ai $xx+zz=aa$, & le Problême eſt indéterminé; mais il ne m'eſt pas permis de ſuppoſer pour xx, ou pour zz tel nombre que je voudrai, & ſi par ce moyen j'arrivois à trouver une ſolution, ce ne ſeroit que par hazard. Que je ſuppoſe par exemple $xx=9$, donc $zz=91$, puiſque $9+91=100$, mais 91 n'eſt pas un quarré parfait, donc le Problême n'eſt pas réſolu; de même que je ſuppoſe $xx=16$, $zz=84$, à cauſe que $16+84=100$, mais 84 n'eſt pas un quarré parfait, & par conſéquent le Problême n'eſt pas plus réſolu par cette ſuppoſitition que par la précédente. Il eſt vrai que je puis ſuppoſer $xx=36$, & par conſéquent $zz=64$, & la ſomme des deux étant 100, le Problême ſera réſolu, à cauſe que 36 & 64 ſont des quarrés parfaits, mais cette ſolution ne ſera trouvée que par hazard, que faut-il donc faire? le voici.

Je nomme x la racine du premier quarré, celle du ſecond ſera certainement moindre que la racine a ou 10 du quarré aa ou 100, puiſque le ſecond quarré ſera moindre que 100. Je prens une grandeur indéterminée y, & je ſuppoſe que la racine du ſecond quarré inconnu eſt $yx-a$. Je puis faire cette ſuppoſition, parce que la lettre y pouvant ſignifier tel nombre entier, ou rompu, ou compoſé d'entier & de fraction, il eſt sûr qu'il y a quelque nombre quel qu'il ſoit qui multiplant la racine x du premier quarré inconnu, donne un produit yx, duquel retranchant a, le reſte ſoit égal à la racine du ſecond quarré cherché; or je fais cette ſuppoſition 1°. afin de n'avoir qu'une ſeule inconnuë. 2°. parce qu'en

faiſant les quarrés xx, & $yyxx - 2ayx + aa$, & enſuite leur ſomme, cette ſomme ſe trouvera égale à aa, & par conſéquent retranchant aa de part & d'autre, il me reſtera une équation où je pourrai réduire l'inconnuë x au premier dégré, ainſi qu'on va voir.

Nous avons donc en faiſant la ſomme des deux quarrés inconnus l'équation qu'on voit ici, & retranchant aa de part & d'autre, puis faiſant paſſer $2ayx$ du premier membre dans le ſecond, j'ai $xx + yyxx = 2ayx$, & diviſant par x, & enſuite par $1+yy$ ou par $yy+1$, ce qui eſt la même choſe, j'ai $x = \frac{2ay}{yy+1}$. Je mets cette valeur de x dans la valeur de la racine z, ou $yx - a$ du ſecond quarré, & je trouve $z = \frac{2ayy}{yy+1} - a$, & réduiſant a en une fraction dont le dénominateur ſoit $yy+1$, puis corrigeant l'expreſſion, j'ai $z = \frac{ayy-a}{yy+1}$; ainſi les valeurs des racines x & z des quarrés cherchés ſont $\frac{2ay}{yy+1}$, & $\frac{ayy-a}{yy+1}$, & ſi je détermine la valeur de y, ces deux racines me deviendront connuës, mais pour la déterminer je m'apperçois que dans la valeur de z, ſi je faiſois $y = 1$, j'aurois $z = \frac{1a-a}{yy+1} = 0$, & dans la valeur de x je ne vois rien qui détermine y; donc pourvû que je ne ſuppoſe pas $y = 1$, je puis prendre tel autre nombre que je voudrai au-deſſus de l'unité, ou même au-deſſous.

$$xx + yyxx - 2ayx + aa = aa$$
$$xx + yyxx = 2ayx$$
$$x + yyx = 2ay$$
$$x = \frac{2ay}{yy+1}$$
$$z = \frac{2ayy}{yy+1} - a$$
$$z = \frac{2ayy - ayy - a}{yy+1}$$
$$z = \frac{ayy - a}{yy+1}$$

Il eſt vrai qu'en ſuppoſant y égal à un nombre moindre que l'unité par exemple à $\frac{1}{2}$, j'aurai $z = \frac{\frac{1}{4}a - a}{\frac{1}{4}+1} = \frac{-\frac{1}{4}a}{\frac{1}{4}+1}$, & que par conſéquent z ſera une grandeur négative, mais cela n'empêchera pas que ſon quarré ne ſoit poſitif, parce que — par — donne +; ainſi la reſtriction que j'ai miſe à ce Problême dans mon *Arithmétique des Géometres* n'eſt pas juſte, & je ſuis bien aiſe de réparer ici cette faute qui ſe trouvera corrigée dans une ſeconde édition.

Je ſuppoſe donc $y = 2$, & par conſéquent j'ai $x = \frac{2 \times 10 \times 2}{4+1} = \frac{40}{5} = 8$, & $z = \frac{10 \times 4 - 10}{4+1} = \frac{30}{5} = 6$, & les quarrés de ces deux nombres ſont 64 & 36 dont la ſomme eſt égale à 100, & on trouvera d'autres quarrés dont la ſomme ſera encore égale à 100, en ſuppoſant pour y tel autre nombre que l'on voudra moindre ou plus grand que l'unité.

233. IV. EXEMPLE. *On demande deux quarrés dont la ſomme ſoit égale à la ſomme des deux quarrés* 64 *&* 100.

Je nomme aa le quarré 64, & bb le quarré 100, il eſt évident que ſi l'un des deux quarrés demandés eſt plus grand que aa, l'autre doit être moindre que bb, & au contraire ſi le premier eſt moindre que aa, l'autre ſera plus grand que bb, & par conſéquent la racine du premier quarré demandé doit être ou moindre ou plus grande que la racine a du quarré aa. Pour trouver une expreſſion convenable à l'un & l'autre de ces cas, je ſuppoſe que la racine du premier quarré demandé eſt $a + z$, parce que z pouvant être ou une grandeur poſitive, ou une grandeur négative, on voit bien qu'il faudra l'ajouter à la racine a ſi elle eſt poſitive, & la retrancher de la racine a ſi elle eſt négative, & pour la racine du ſecond quarré cherché, je ſuppoſe $yz - b$, & la raiſon pourquoi je fais cette ſuppoſition, c'eſt 1°. que les deux quarrés des racines $z + a$, & $yz - b$ contiendront les quarrés donnés aa, bb, & que par conſéquent faiſant leur ſomme pour en faire une équation dont le ſecond membre ſera $aa + bb$, les termes aa, bb, s'effaceront de part & d'autre, & enſuite je pourrai réduire l'inconnuë z au premier dégré. 2°. parce qu'il eſt sûr qu'on peut trouver un nombre y qui ſoit tel qu'après l'avoir multiplié par z, il faille retrancher b du produit pour avoir la racine du ſecond quarré demandé.

Je fais donc les quarrés de $a + z$ & de $yz - b$, & les ajoutant enſemble, leur ſomme eſt égale à la ſomme $aa + bb$; ainſi j'ai l'équation qu'on voit ici.

$aa + 2az + zz$, premier Quarré.
$yyzz - 2byz + bb$, ſecond Quarré.

$zz + yyzz + 2az - 2byz + aa + bb$, Somme.
$zz + yyzz + 2az - 2byz + aa + bb = aa + bb$
$zz + yyzz = 2byz - 2az$
$z + yyz = 2by - 2a$
$z = \frac{2by - 2a}{yy + 1}$

Je retranche $aa+bb$ de part & d'autre, & faiſant paſſer $2az-2byz$ du premier membre dans le ſecond, je trouve $zz+yyzz=2byz-2az$; je diviſe tout par z, & enſuite par $1+yy$, ce qui donne $z=\frac{2by}{yy+1}-\frac{2a}{yy+1}$, & je vois qu'en déterminant y, l'inconnuë z ſera connuë, & qu'en mettant ſa valeur dans les racines $a+z$, & $yz-b$ des deux quarrés demandés, ces quarrés deviendront auſſi connus.

Or pour déterminer y, je m'apperçois 1°. que ſi je faiſois $y=1$ & que je miſſe cette valeur de y dans $z=\frac{2by-2a}{yy+1}$, j'aurois $z=2$, & par conſéquent la racine $a+z$ ſeroit 10, & la racine $yz-b$ ſeroit $2-10$, ou -8, ainſi les quarrés de ces deux racines me donneroient les quarrés 100 & 64 qui ſont les mêmes que les quarrés propoſés; je ne dois donc point ſuppoſer $y=1$. 2°. Que ſi je veux que z ne ſoit pas égal à zero, il faut que je ſuppoſe y égal à un nombre qui ſoit tel que le numerateur $2by-2a$ de la valeur de z ne ſoit pas égal à zero, ainſi pourvû que j'obſerve ces deux conditions, je puis prendre pour y tel nombre entier ou rompu que je voudrai au-deſſus ou au-deſſous de l'unité.

Je ſuppoſe $y=2$, & mettant cette valeur dans $z=\frac{2by-2a}{yy+1}$ & auſſi les valeurs des grandeurs connuës a, b, je trouve $z=\frac{40-16}{4+1}=\frac{24}{5}$, donc $a+z=8+\frac{24}{5}=\frac{40+24}{5}=\frac{64}{5}$, & $yz-b=\frac{48}{5}-10=\frac{48}{5}-\frac{50}{5}=-\frac{2}{5}$; faiſant donc les quarrés de $\frac{64}{5}$ & de $-\frac{2}{5}$, j'ai $\frac{4096}{25}$, & $\frac{4}{25}$, dont la ſomme eſt $\frac{4100}{25}$, & réduiſant la fraction en entiers je trouve 164 égal à la ſomme des quarrés propoſés 100 & 64, & en ſuppoſant y égal à quelqu'autre nombre au-deſſus ou au-deſſous de l'unité, & qui ne donnât pas $2by=2a$, je trouverois d'autres quarrés dont la ſomme ſeroit 164; d'où l'on voit qu'on peut trouver une infinité de quarrés, leſquels pris deux à deux ſeroient égaux à la ſomme des quarrés propoſés.

234. V. EXEMPLE. *La Différence de deux quarrés eſt 60, on demande quels ſont ces quarrés?*

Je nomme a la différence 60, & xx le plus grand quarré, donc le ſecond ſera $xx-a$, & comme ceci ne me fait rien connoître, je ſuppoſe que le côté ou la racine de ce ſecond quarré eſt $x-y$, parce qu'il doit être moindre que la racine du quarré xx,

ainſi j'ai $xx - 2yx + yy$, & ce quarré eſt égal à $xx - a$, ce qui me donne une équation.

J'efface dans cette équation xx de part & d'autre, & faiſant paſſer $-2yx$ du premier membre dans le ſecond, & $-a$ du ſecond dans le premier, je trouve une valeur de x dans laquelle rien ne m'empêche de donner à y telle valeur que je voudrai. Je ſuppoſe $y = 2$, & mettant cette valeur de y dans celle de x que je viens de trouver, j'ai $\frac{60+4}{4} = 16 = x$; faiſant donc le quarré de 16, j'ai $256 = xx$, & retranchant 60 de 256, je trouve 196 dont la racine eſt 14; ainſi les deux quarrés demandés ſont 256 & 196 dont la différence eſt 60, ce qui étoit requis, & on trouveroit d'autres quarrés dont la différence ſeroit 60, en ſuppoſant pour y telle autre valeur que l'on voudroit.

$$xx - 2yx + yy = xx - a$$
$$-2yx + yy = -a$$
$$a + yy = 2yx$$
$$\frac{a+yy}{2y} = x$$

235. Ces ſortes de Problêmes demandent une certaine adreſſe à trouver des expreſſions convenables pour faire en ſorte que l'inconnuë puiſſe ſe trouver au premier dégré, & c'eſt là où git toute la difficulté, mais avec un peu d'uſage on en vient aiſément à bout.

CHAPITRE VII.

Des Raiſons, Proportions & Progreſſions Arithmétiques.

236. LORSQU'ON compare enſemble deux grandeurs, ce que l'on trouve que l'une eſt à l'égard de l'autre, eſt ce qu'on nomme en général *Raiſon*, ou *Rapport*, & en latin *habitudo*.

237. On peut comparer deux grandeurs de deux façons différentes; l'une en examinant l'excès dont la plus grande des deux grandeurs ſurpaſſe la moindre, & alors la raiſon ſe nomme *Raiſon arithmétique*, & l'autre en conſidérant combien de fois la plus grande des deux grandeurs contient la moindre, & en ce cas la raiſon ſe nomme *Raiſon géométrique*.

238. La Raiſon arithmétique ſe trouve en retranchant la moindre des deux grandeurs, de la plus grande, & le reſte ou la *différence* fait voir le rapport des deux grandeurs, c'eſt pourquoi la Raiſon arithmétique eſt nommée quelquefois *différence*. Au contraire la Raiſon géométrique ſe trouve en diviſant la plus grande

quantité par la moindre, & le quotient marque le rapport cherché. Ce quotient ſe nomme *expoſant*, parce qu'il *expoſe*, ou fait voir combien la premiere des deux grandeurs contient l'autre, ou y eſt contenuë.

239. Il y a donc néceſſairement deux termes dans toute Raiſon, le premier ſe nomme *antécédent*, & le ſecond *conſéquent*.

240. Lorſqu'après avoir comparé deux grandeurs enſemble, on vient à en comparer deux autres, & que l'on trouve que la Raiſon des deux premieres eſt égale à la Raiſon des deux ſecondes, cela ſe nomme *Proportion*, & cette proportion eſt *arithmétrique*, ou *géométrique*, ſelon que les raiſons qui la compoſent ſont arithmétiques ou geométriques.

241. Toute proportion a par conſéquent quatre termes; le premier ſe nomme *premier antécédent*, le ſecond *premier conſéquent*, le troiſiéme *ſecond antécédent*, & le quatriéme *ſecond conſéquent*.

242. Le premier & le dernier terme d'une proportion ſe nomment les *extrêmes*, & le ſecond & le troiſiéme ſe nomment les *moyens*.

243. Lorſque le ſecond & le troiſiéme terme d'une proportion ſont égaux, c'eſt-à-dire, lorſqu'une même grandeur ſert de premier conſéquent & de ſecond antécédent, cette grandeur ſe nomme *moyenne proportionnelle*, & la proportion ſe nomme proportion *continuë* arithmétique ou géométrique.

244. Si les quatre différens termes d'une proportion ſont a, b, c, d, & que la proportion ſoit arithmétique, on l'exprime ainſi: $a.\ b.\ \therefore\ c.\ d.$ ou $a, b.\ \therefore\ c, d$; mais ſi la proportion eſt géométrique, on l'écrit de cette façon $a.\ b::c.\ d.$ ou $a, b::c, d$, & dans l'un & l'autre cas on l'énonce en diſant: a eſt à b comme c eſt à d, c'eſt-à-dire dans la proportion arithmétique a ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par b autant que c ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par d, & dans la proportion géométrique a contient b, ou eſt contenu dans b de la même façon que c contient ou eſt contenu dans d.

245. Si l'on a pluſieurs grandeurs de ſuite en proportion continuë, de ſorte que la premiere ſoit à la ſeconde, comme la ſeconde eſt à la troiſiéme, comme la troiſiéme à la quatriéme, comme la quatriéme à la cinquiéme, ainſi de ſuite, cela ſe nomme *progreſſion*, & ſi la progreſſion eſt arithmétique, on l'écrit ainſi $\therefore a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ ou $\therefore a, b, c, d, e, f$, mais ſi elle eſt géométrique, on écrit $::a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f$, ou $::a, b, c, d, e, f$, & on énonce l'une & l'autre en diſant a eſt à b comme b eſt à c, comme c eſt à d, comme d eſt à f, &c.

Nous examinerons dans le Chapitre ſuivant les proprietés des Raiſons, Proportions & Progreſſions géometriques.

246. THEOREME. *Dans toute proportion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens ; & ſi la proportion eſt continuë, la ſomme des extrêmes eſt égale au double de la moyenne.*

Soit la proportion arithmétique $a, b :: c, f$, il eſt clair que la différence de la premiere raiſon a, b, ſera égale à la différence de la ſeconde c, f, puiſqu'il y a proportion ; nommons donc cette différence d, & ſuppoſons en premier lieu que le premier antécédent a ſoit moindre que ſon conſéquent b, & que par conſéquent le ſecond antécédent c ſoit moindre que le ſecond conſéquent f, il eſt viſible que nous aurons $a+d=b$, & $c+d=f$, puiſque d eſt la quantité qui manque à chaque antécédent pour être égaux à leurs conſéquens ; mettant donc dans la proportion $a+d$ au lieu de b, & $c+d$ au lieu de f, nous aurons $a, a+d :: c, c+d$, & cette proportion ſera la même que la propoſée ; ainſi la ſomme des extrêmes ſera $a+c+d$, & celle des moyens $a+d+c$, mais ces deux ſommes ſont compoſées des mêmes quantités ; donc elles ſont égales, & par conſéquent nous avons $a+c+d=a+d+c$.

Suppoſons en ſecond lieu que a ſoit plus grand que b, c ſera auſſi plus grand que f, & nous aurons $b+d=a$, & $f+d=c$; ainſi mettant ces valeurs de a & de c dans la proportion, nous aurons $b+d. b :: f+d. f$, & faiſant la ſomme des extrêmes & celle des moyens, nous aurons $b+d+f=b+f+d$.

Enfin ſuppoſons la proportion continuë $:: a, b, c$, cette proportion peut s'écrire ainſi $a, b :: b, c$; ainſi ſuppoſant que la différence ſoit d, & que a ſoit moindre que b, nous aurons dans la premiere raiſon $a+d=b$, & dans la ſeconde $b+d=c$, mettant donc ces valeurs de b & c dans la proportion $a, b :: b, c$, nous aurons $a, a+d :: b, b+d$, & la ſomme $a+b+d$ des extrêmes ſera égale à la ſomme $a+d+b$ des moyens ; donc j'ai $a+c=2b$, en ſubſtituant les valeurs de $b+d$ & de $a+d$.

Que ſi a eſt plus grand que b, nous aurons dans la premiere raiſon $b+d=a$, & dans la ſeconde $c+d=b$; c'eſt pourquoi en mettant ces valeurs de a & b dans la proportion $a, b :: b, c$, nous aurons $b+d. b :: c+d. c$, & la ſomme des extrêmes $b+d+c$ ſera égale à la ſomme des moyens $b+c+d$, donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

247.

247. PROBLEME. *Trois termes d'une Proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrième.*

Suppoſons que a, b, c, ſoient les trois premiers termes d'une Proportion arithmétique, je nomme x le quatriéme, & j'ai $a. b \therefore c. x$, & faiſant la ſomme des extrêmes & celle des moyens, je trouve $a+x=b+c$ (*N.* 246.) & faiſant paſſer a du premier membre dans le ſecond, j'ai $x=b+c-a$, ce qui me fait voir que ſi de la ſomme des moyens je retranche le premier terme, le reſte ſera le dernier terme demandé.

Soit $a=2$, $b=5$, $c=7$, la ſomme des moyens eſt 12 de laquelle retranchant le premier terme 2, le reſte 10 ſera le dernier terme cherché, & nous aurons la proportion arithmétique $2, 5 \therefore 7, 10$.

Il eſt aiſé de voir que ſi c'étoit le premier terme qui manquât dans la proportion, ou le ſecond, ou le troiſiéme, on n'auroit qu'à mettre x à ſa place, & achever le reſte comme nous venons de faire.

248. *REMARQUE.* S'il manquoit deux termes à la proportion, le Problême ſeroit indéterminé; par exemple, ſoient a, b, les deux extrêmes d'une Proportion, je nomme la premiere moyenne x, & la ſeconde y, & j'ai $a, x \therefore y, b$, & par conſéquent $a+b=y+x$ (*N.* 246.); ainſi il faut néceſſairement déterminer l'une des inconnuës, je détermine x, qui eſt la premiere moyenne en lui donnant une valeur c moindre ou plus grande que a, & j'ai $a, c :: y, b$; d'où je tire $a+b=c+y$, & faiſant paſſer c dans le premier membre, je trouve $a+b-c=y$.

Soit $a=2$, & $b=7$, je ſuppoſe $x=4$, ainſi j'ai $2, 4 \therefore y. 7$, d'où je tire $2+7=4+y$, ou $9=4+y$, & par conſéquent $y=9-4=5$, & la proportion eſt $2, 3 \therefore 5, 7$.

249. THEOREME. *Dans toute Progreſſion arithmétique aſcendante, c'eſt-à-dire, dont les termes vont en augmentant, la ſomme de deux termes également éloignés du premier & du dernier, c'eſt-à-dire également éloignés des extrêmes eſt égale à la ſomme des extrêmes.*

Soit la Progreſſion arithmétique aſcendante $\therefore a, b, c, e, f, g$, dont je ſuppoſe qne la différence eſt d, le ſecond terme b ſera donc égal à $a+d$, le troiſiéme c ſera égal à $b+d$, ou $a+d+d$, ou $a+2d$, la quatriéme ſera $a+3d$, & ainſi de ſuite, puiſque ces termes vont toujours en augmentant d'une égale différence; ainſi la progreſſion $\therefore a, b, c, e, f$, ſera la même que $a, a+d, a+2d,$

$a+3d$, $a+4d$, $a+5d$; or ſi dans cette progreſſion je prens les termes $a+d$, & $a+4d$ qui ſont également éloignés des extrêmes, leur ſomme $a+d+a+4d$, ou $2a+5d$ ſera égale à la ſomme $a+a+5d$, ou $2a+5d$ des extrêmes. Que ſi je prens les termes $a+2d$, & $a+3d$ qui ſont également éloignés des extrêmes, je trouverai de même que leur ſomme eſt égale à la ſomme $2a+5d$ des extrêmes, donc, &c.

250. *Remarque.* Que ſi la Progreſſion étoit deſcendante, c'eſt-à-dire ſi ſes termes alloient en diminuant, il eſt clair qu'en la prenant à rebours, elle ſeroit aſcendante, & par conſéquent on prouveroit de la même façon que nous venons de faire, que la ſomme de deux termes également éloignés des extrêmes, ſeroit égale à la ſomme des extrêmes; or comme il eſt toujours facile de prendre une progreſſion à rebours, en écrivant $\therefore g, f, e, c, b, a$, au lieu de $\therefore a, b, c, e, f, g$, nous ſuppoſerons toujours que la progreſſion eſt aſcendante dans tout ce que nous allons dire pour n'être pas obligé de donner des regles différentes pour les deux cas.

251. Theoreme. *Dans toute Progreſſion arithmétique aſcendante, la ſomme de tous les termes eſt égale à la ſomme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, c'eſt-à-dire du nombre qui exprime combien il y a de termes.*

Soit la progreſſion aſcendante a, b, c, e, f, g, qui a ſix termes je fais la ſomme $b+f$ des termes b, f, également éloignés des extrêmes, la ſomme $c+e$ des termes c, e, également éloignés des extrêmes, & enfin la ſomme $a+g$ des extrêmes, & ces trois ſommes ſont égales entr'elles (*N.* 249.), & elles ſont auſſi égales à la ſomme de la progreſſion, ou de tous les termes; or ces trois ſommes égales ſont la même choſe que la ſomme des extrêmes multipliée par 3, mais 3 eſt la moitié du nombre des termes 6, donc la ſomme des termes, ou la ſomme de la progreſſion, eſt égale à la ſomme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

Il eſt aiſé de voir que s'il y avoit un plus grand nombre de termes, & que ce nombre fut pair, les termes pris deux à deux donneroient toujours un nombre de ſommes égales qui ſeroit exprimé par la moitié du nombre des termes, & par conſéquent on auroit toujours la ſomme de la progreſſion égale à la ſomme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

Mais ſi le nombre des termes étoit impair comme dans la

progreſſion $\therefore a, b, c, e, f, g, h$, nous aurions d abord les trois ſommes $b+g, c+f$, & $a+h$ égales, & il reſteroit le terme e, or à cauſe que les trois termes c, e, f, ſont en proportion continuë, la ſomme $c+f$ ſeroit égale au double du terme e (*N.* 246.); donc le terme e ne ſeroit que la moitié de l'une des trois ſommes égales ; ainſi nous aurions trois ſommes égales & une demi ſomme, mais trois ſommes égales & une demi ſomme ſont la même choſe que l'une des ſommes multipliées par 3 & demi ; donc la ſomme de la progreſſion ſeroit égale à la ſomme des extrêmes multipliée par $3\frac{1}{2}$ qui eſt la moitié du nombre des termes 7, & ainſi des autres. Ce qu'il falloit démontrer.

252. THEOREME. *Dans toute progreſſion arithmétique aſcendante, le dernier terme contient le premier plus la difference multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité.*

Soit la progreſſion arithmétique aſcendante $\therefore a, b, c, e, f$, dont je ſuppoſe que la différence eſt d, cette progreſſion ſera la même que celle-ci $\therefore a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$; or le le dernier terme $a+4d$ contient le premier terme a, plus $4d$, c'eſt-à-dire, plus la différence d multipliée par 4, c'eſt-à-dire par le nombre des termes moins un ; donc le dernier terme $a+4d$ contient le premier terme, plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité.

253. COROLLAIRE. Il ſuit de ce Théorême & des précédens 1°. Que pour trouver la ſomme d'une progreſſion dont le premier terme, le dernier, & le nombre des termes ſont connus, il faut ajouter les deux extrêmes enſemble & les multiplier par la moitié du nombre des termes. 2°. Que ſi on connoît le premier terme, le dernier, & le nombre des termes, on connoîtra la différence en retranchant le premier terme du dernier, & diviſant enſuite le reſte par le nombre des termes diminué de l'unité ; car ce reſte eſt égal au produit de la différence multiplié par le nombre des termes diminué de l'unité (*N.* 252.) 3°. Que ſi l'on connoît le premier terme, le dernier & la différence, on trouvera le nombre des termes, en retranchant le premier terme du dernier, & diviſant le reſte par la différence, puis ajoutant 1 au quotient, puiſque ce reſte eſt égal à la différence multipliée par le nombre des termes -1 (*N.* 252.) 4°. Que ſi l'on connoît le premier terme, la différence & le nombre des termes, on connoîtra le dernier, en faiſant le produit de la différence par le nombre des termes diminué de l'unité, & en ajoutant ce produit

Je multiplie la différence 3 par le nombre des termes diminué de l'unité, c'eſt-à-dire par 7, ce qui fait 21, & ajoutant le premier terme 1 à ce produit, la ſomme 22 eſt ce qu'il a donné le dernier jour (*N.* 252.) après quoi je trouve la ſomme totale comme auparavant.

En troiſiéme lieu, *On dit que cet homme augmentant chaque jour de 3, a donné le huitiéme jour 22 ſols, & l'on demande combien il a donné le premier jour.*

Je multiplie la différence 3 par 7, ce qui fait 21, & retranchant 21 du dernier terme 22, le reſte eſt le premier terme 1 (*N.* 251. 252.)

En quatriéme lieu, *On dit que cet homme a donné 1 ſol le premier jour, 22 le dernier jour, & qu'il a toujours augmenté de 3, & l'on demande pendant combien de jours il a donné.*

Je retranche le premier terme 1 du dernier 22, & le reſte 21 eſt la différence 3 multiplié par le nombre des termes diminué de l'unité (*N.* 252.) donc diviſant 21 par 3, le quotient 7 eſt le nombre de termes diminué de l'unité, & par conſéquent 8 eſt le nombre de jours pendant leſquels cet homme a donné de l'argent.

En cinquiéme lieu, *On dit que cet homme a donné pendant huit jours, le premier jour 1, & le dernier 22, & l'on demande quelle eſt la quantité dont il a augmenté tous les jours.*

Je retranche le premier terme 1 du dernier 22, & le reſte 21 eſt la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité (*N.* 252.) je diviſe donc ce reſte par 8 — 1, ou 7, & le quotient 3 eſt la différence cherchée.

En ſixiéme lieu, *On dit que cet homme a donné en tout 92 ſols, & que le premier jour il a donné 1 & le dernier 22, & l'on demande pendant combien de jours il a donné, & quelle eſt la quantité dont il a augmenté tous les jours.*

J'ajoute le premier terme au dernier, ce qui fait 23, & diviſant 92 par 23, je trouve 4 qui eſt la moitié du nombre des termes; car la ſomme 92 eſt le produit de 23 par la moitié du nombre des termes (*N.* 251.) ainſi le nombre de jours eſt 8, après quoi retranchant le premier terme 1 du dernier 22, ce qui fait 21, je diviſe 21 par 8 — 1, ou par 7, & le quotient 3 eſt la différence cherchée (*N.* 252.)

En ſeptiéme lieu, *On dit que cet homme ayant donné pendant 8 jours, en augmentant toujours de 3, a donné en tout 92 ſols, & l'on demande combien il a donné le premier jour & le dernier.*

Je diviſe la ſomme 92 par 4 qui eſt la moitié du nombre des termes, & le quotient 23 eſt la ſomme des extrêmes (*N.* 251.); je fais le produit de la différence 3 par 8 — 1, ou 7, ce qui fait 21, & le reſte 2 eſt le double du premier terme; car la ſomme du premier & du dernier contient deux fois le premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité; ainſi cet homme a donné le premier jour 1 & le dernier 22.

255. *Remarque.* Si dans ces ſortes de queſtions on donnoit à connoître moins de quantités qu'il ne faut pour pouvoir les réſoudre comme nous venons de faire, on nommeroit les quantités inconnuës par les lettres x, y, &c. & on réſoudroit le problême en ſuivant le principe précédent ainſi qu'on va voir.

256. Probleme. *On a détaché d'une Garniſon le premier jour 5 hommes, le ſecond 7, & ainſi de ſuite, en augmentant toujours de deux, & à la fin il s'eſt trouvé qu'on avoit détaché en tout 96 hommes; on demande pendant combien de jours ces Détachemens ont duré.*

Je connois bien ici trois choſes, ſçavoir le premier terme 5, la différence 2, & la ſomme de la progreſſion 96, mais comme l'une de ces trois choſes, c'eſt-à dire la ſomme de la progreſſion n'eſt pas au nombre des quatre premieres dont nous avons parlé (*N.* 253.) je ne puis pas réſoudre le problême par les regles ordinaires, ainſi je nomme le nombre des termes y, & par conſéquent $y-1$ eſt le nombre des termes diminué de l'unité. Je multiplie la différence 2 par $y-1$, ce qui donne $2y-2$, & ajoutant à ce produit le premier terme 5, j'ai $2y+3$ pour le dernier terme (*N.* 252.), j'ajoute à ce terme le premier terme 5, & la ſomme $2y+8$ eſt la ſomme des extrêmes. Je multiplie cette ſomme par $\frac{1}{2}y$ qui eſt la moitié du nombre des termes, & le produit $yy+4y$ eſt la ſomme de la progreſſion; or cette ſomme eſt égale à 96 par la condition du Problême; donc j'ai $yy+4y=96$ qui eſt une équation du ſecond dégré.

$$\begin{array}{r} 2 \\ y-1 \\ \hline 2y-2 \\ 5 \\ \hline 2y+3 \text{ dernier terme.} \\ 5 \\ \hline 2y+8 \text{ Somme des extrêmes.} \\ \frac{1}{2}y \\ \hline yy+4y \text{ Somme de la Progreſſion.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} yy+4y=96 \\ yy+4y+4=100 \\ y+2=10 \\ y=-2+10=8 \end{array}$$

J'ajoute de part & d'autre le quarré 4 de la moitié du coëfficient 4 du ſecond terme, & par ce moyen le premier membre eſt un quarré parfait (*N.* 221.), je tire la racine quarrée de part & d'autre, & j'ai $y+2=10$, donc $y=-2+10=8$, eſt la premiere racine, & la ſeconde eſt $y=-2-10=-12$ qui eſt une racine négative ; car ſi l'on multiplie $y-8=0$ par $y+12=0$, le produit ſera $yy+4y-96=0$ qui eſt l'équation que nous avions à réſoudre ; or cette équation n'ayant qu'une racine poſitive, le Problême n'a qu'une ſolution, & par conſéquent le nombre des jours pendant leſquels les Détachemens ſe ſont faits eſt 8, ce que l'on connoîtra aiſément ſi l'on continue la progreſſion 5, 7, &c. juſqu'au huitiéme terme qui ſera 19, lequel ajouté au premier ſera 24, & cette ſomme multiplié par la moitié 4 du nombre des termes 8 donnera 96, ce qui étoit propoſé.

257. PROBLEME. *Un Voleur fuit, & fait* 10 *lieuës par jour, un Archer le pourſuit, & fait le premier jour* 3 *lieuës, le ſecond* 5 *& ainſi de ſuite en augmentant toujours de deux, en combien de jours le voleur ſera-t'il atteint, & combien de lieuës l'un & l'autre auront-ils fait?*

Je ne connois ici que le premier terme 3 & la différence 2 de la progreſſion, mais comme le voleur fait tous les jours 10 lieuës, je vois que la ſomme de la progreſſion de l'Archer ſera égale à 10 multiplié par le nombres de jours qu'il aura employé pour l'atteindre ; car on ſuppoſe que l'un & l'autre ſont partis le même jour.

Je nomme donc y le nombre des termes ou des jours, ainſi $y-1$ ſera le nombre des termes diminué de l'unité. Je multiplie $y-1$ par la différence 2, & le produit eſt $2y-2$, auquel ajoutant le premier terme 3, la ſomme $2y+1$ eſt le dernier terme (*N.* 252), j'ajoute le premier terme 3 au dernier, & j'ai la ſomme des extrêmes $2y+4$. Je multiplie cette ſomme par $\frac{1}{2}y$, & le produit eſt la ſomme de la progreſſion ; or cette ſomme eſt égale

$$\begin{array}{r} y-1 \\ 2 \\ \hline 2y-2 \\ 3 \\ \hline 2y+1 \text{ dernier terme.} \\ 3 \\ \hline 2y+4 \text{ Somme des extrêmes.} \\ \frac{1}{2}y \\ \hline yy+2y \text{ Somme de la Progreſſion.} \end{array}$$

$$yy+2y=10y$$
$$y+2=10$$
$$y=10-2=8$$

à 10 multiplié par y, comme nous venons de dire, donc j'ai l'équation $yy + 2y = 10y$, & diviſant tout par y, puis faiſant paſſer 2 dans le ſecond membre, je trouve $y = 8$; ainſi l'archer a atteint le voleur dans 8 jours, ce que l'on prouvera en continuant la progreſſion 3, 5, &c. juſqu'au huitiéme terme que l'on trouvera être 17, & ajoutant ce terme au premier, ce qui fera 20, puis multipliant par la moitié 4 du nombre des termes, on trouvera 80 pour la ſomme de la progreſſion, & cette ſomme ſera égale à 10 multiplié par le nombre des termes 8, ainſi le Voleur & l'Archer auront fait 80 lieuës chacun au bout de 8 jours.

258. PROBLEME. *Un homme a gagné au jeu pendant quelques jours une progreſſion de loüis dont la ſomme totale eſt* 48 *loüis, & la ſomme des extrêmes eſt* 16 *loüis ; on demande combien de jours il a joué, ce qu'il a gagné le premier jour, & de combien le gain de chaque jour s'augmentoit au-deſſus du précédent.*

Je diviſe la ſomme de la progreſſion par la ſomme 16 des extrêmes, & le quotient 3 eſt la moitié du nombre des termes (*N.* 251.) ainſi cet homme a joué pendant 6 jours.

Maintenant pour répondre à ce qu'on me demande encore, je nomme x le premier terme, & y la différence. Je multiplie la différence par 6 — 1, ou par 5, & ajoutant au produit $5y$ le premier terme x, la ſomme $5y + x$ eſt le dernier terme (*N.* 252.), j'ajoute à ce dernier terme le premier terme, je multiplie la ſomme $5y + 2x$ par 3 qui eſt la moitié du nombre des termes, & le produit eſt la ſomme de la progreſſion (*N.* 251.) ; ainſi j'ai $15y + 6x = 48$, & faiſant paſſer $6x$ dans le ſecond membre, puis diviſant tout par 15, j'ai $y = \frac{48 - 6x}{15}$, & le Problême eſt indéterminé.

$$\begin{array}{l} y \\ 5 \\ \hline 5y \\ x \\ \hline 5y + x \text{ dernier terme.} \\ 5y + 2x \text{ Somme des extrêmes.} \\ 3 \\ \hline 15y + 6x = 48 \\ 15y = 48 - 6x \\ y = \frac{48 - 6x}{15} \end{array}$$

Or je vois que pour déterminer x, il faut qu'en retranchant $6x$ de 48, le reſte puiſſe être diviſé exactement par 15, ſi je veux que la valeur $\frac{48 - 6x}{15}$ de la différence y ſoit une grandeur ſans fraction.

je

Je ſuppoſe donc $x = 3$, & par conſéquent $6x = 18$, & de 48 ôtant 18, le reſte 30 diviſé par 15 donne au quotient $2 = y$; ainſi cet homme a gagné le premier jour 3 loüis, le ſecond 5, &c. en ſorte que la progreſſion eſt 3, 5, 7, 9, 11, 13, & il eſt aiſé de voir que ces nombres rempliſſent les conditions du Problême.

Et cette ſolution eſt la ſeule que l'on puiſſe trouver ſi l'on veut que le premier terme & la différence ſoient des nombres entiers, mais ſi cette condition n'eſt pas requiſe, on peut ſuppoſer pour x, tel autre nombre qu'on voudra, pourvû que $6x$ ſoit moindre que 48, & autant de ſuppoſitions qu'on fera pour x, autant on trouvera de différentes ſolutions.

De la Maniere de compter les Piles de Boulets.

259. Les Piles de boulets qu'on voit dans les Arcenaux ſont, ou des pyramides quarrées, telles que celle de la figure 12 de la Planche qu'on trouvera à la fin de ce premier Livre, ou des pyramides triangulaires (*Fig.* 6.) ou des pyramides oblongues (*Fig.* 13.) ou des pyramides oblongues qui ont à leurs extrêmités deux pyramides quarrées (*Fig.* 14.) & qui quelquefois ſont auſſi entrecoupées de pyramides quarrées (*Fig.* 15.) & il s'agit, en voyant ces pyramides, de ſçavoir le nombre de boulets qu'elles contiennent; c'eſt ce que nous allons faire en examinant les formations de ces piles.

260. Si l'on écrit la ſuite des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, &c. & qu'on prenne le premier, puis la ſomme des deux premiers, puis celle des trois premiers, & ainſi de ſuite; on formera une autre ſuite de nombres 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36, &c. que l'on nomme *triangulaires*, parce que ce ſont les ſeuls qui puiſſent s'arranger en triangles, comme on voit dans les figures 1. 2. 3. 4. 5.

261. Chaque nombre triangulaire eſt donc la ſomme d'une progreſſion de nombres naturels, & ſon côté eſt toujours égal au dernier terme de la progreſſion qui l'a formé, & auſſi au nombre des termes de cette progreſſion. Par exemple, le côté du nombre triangulaire 10 (*Fig.* 4.) qui eſt la ſomme de la progreſſion 1, 2, 3, 4, eſt égal au dernier terme 4 de cette progreſſion, & au nombre des termes de cette progreſſion; car le nombre des termes d'une progreſſion de nombres naturels, eſt toujours égal au dernier terme. Il eſt aiſé de voir que le nombre de rangs que chaque nombre triangulaire contient, eſt auſſi égal

à ſon dernier terme, & que par conſéquent on peut prendre ce nombre de rangs pour le nombre de termes de la progreſſion qui a formé le nombre triangulaire, ou le nombre de rangs pour le dernier terme.

262. Connoiſſant donc le côté d'un nombre triangulaire, ſi on ajoute le premier terme à ce côté, & qu'on multiplie la ſomme par la moitié du nombre des rangs, ou ce qui eſt la même choſe par la moitié du côté, le produit ſera la valeur du nombre triangulaire (*N.* 251.) ainſi nommant x le dernier terme, ou le côté, & ajoutant 1, la ſomme ſera $x+1$, laquelle multipliée par $\frac{1}{2}x$ donnera le produit $\frac{xx+x}{2}$ qui eſt l'expreſſion générale de tout nombre triangulaire, dans laquelle il n'y a qu'à mettre la valeur de x pour avoir le nombre demandé.

Soit par exemple $x=7$, donc $xx=49$, & par conſéquent $\frac{xx+x}{2}=\frac{49+7}{2}=\frac{56}{2}=28$, & en effet 28 eſt le nombre triangulaire dont le côté eſt 7, & ainſi des autres.

263. Si l'on prend une ſuite de nombres triangulaires, par exemple les cinq qui ſont exprimés par les figures 1. 2. 3. 4. 5; & qu'on les couche les uns ſur les autres par ordre, en mettant toujours le moindre ſur le plus grand, on formera une pyramide triangulaire (*Fig.* 6.) d'où il ſuit qu'une pyramide triangulaire eſt une ſomme de nombres triangulaires.

264. On pourroit donc aiſément former une Table par le moyen de laquelle on trouveroit d'un coup d'œil quel eſt le nombre de boulets d'une pyramide triangulaire dont on connoîtroit le côté de la baſe. La premiere colonne contiendroit les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. La ſeconde contiendroit les ſommes ſucceſſives de ces nombres, c'eſt-à-dire les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, &c. & pour former la troiſiéme on prendroit d'abord le premier triangulaire 1, enſuite la ſomme 4 des deux premiers 1, 3, puis la ſomme 10 des trois premiers 1, 3, 6, & ainſi de ſuite; ce qui donneroit les nombres 1, 4, 10, 20, 35, nommés *pyramidaux triangulaires*, parce que ce ſont les ſeuls qui puiſſent s'arranger en pyramides triangulaires.

1re.	2e.	3e.
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
&c.	&c.	&c.

Pour connoître donc par le moyen de cette Table quel eſt le nombre triangulaire dont le côté eſt 4, on chercheroit dans la

premiere colonne le nombre 4, & à côté de ce 4 on trouveroit dans la colonne des nombres triangulaires le nombre 10 qui feroit voir que le nombre triangulaire demandé eſt 10, & ainſi des autres.

De même ſi on vouloit connoître combien de boulets contient une pyramide triangulaire dont le côté de la baſe eſt 5, on chercheroit dans la premiere colonne le nombre 5, & à côté de ce nombre on trouveroit dans la troiſiéme colonne le nombre 35 qui feroit voir que la pyramide demandée contient 35 boulets.

Nons donnerons bientôt une Méthode plus courte, & qui n'obligera pas de porter toujours avec ſoi une longue Table.

265. Les pyramides quarrées ſont compoſées de pluſieurs couches qui ſont en deſcendant 1. 4. 9. 16. 25, &c. c'eſt-à-dire les quarrés des nombres naturels. Par exemple la pyramide de la figure 12 eſt compoſée des cinq quarrés des figures 7, 8, 9, 10, 11, ainſi pour trouver combien une telle pyramide contient de boulets, il n'y a qu'à ſçavoir ce que vaut une ſuite finie de quarrés 1. 4. 9. 16, &c. & cela peut encore ſe trouver en conſtruiſant une Table ainſi qu'on va voir.

266. J'écris dans une colonne les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5, &c. qui marquent les côtés des quarrés; à côté de cette colonne, j'en forme une ſeconde qui contient la progreſſion des nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9, &c. je forme une troiſiéme colonne dans laquelle j'écris d'abord 1, puis la ſomme 4 des deux premiers nombres impairs 1. 3, puis la ſomme 9 des trois premiers 1. 3. 5, & ainſi de ſuite, & cette colonne contient les quarrés des nombres naturels 1. 2. 3 de la premiere; enfin je fais une quatriéme colonne dans laquelle j'écris d'abord 1, puis la ſomme 5 des deux premiers quarrés, puis la ſomme 14 des trois premiers 1. 4. 9, & ainſi de ſuite.

1re.	2e.	3e.	4e.
1	1	1	1
2	3	4	5
3	5	9	14
4	7	16	30
5	9	25	55
&c.	&c.	&c.	&c.

Si l'on veut donc ſçavoir quel eſt le quarré dont le côté eſt 5, on cherchera dans la premiere colonne le nombre 5, & à côté de ce nombre on trouvera dans la troiſiéme colonne le nombre 25, qui fait voir que le quarré de 5 eſt 25.

De même, ſi on veut ſçavoir combien de boulets contient une pyramide dont le côté de la baſe eſt 4, on cherchera dans la premiere colonne le nombre 4, & à côté de ce nombre on

trouvera dans la quatriéme colonne le nombre 30 qui fait voir que cette pyramide contient 30 boulets, & ainſi des autres.

Comme on n'a pas toujours des Tables, & que celles qu'on trouve quelquefois par hazard ſe trouvent ſouvent peu exactes par l'erreur ou la négligence des Copiſtes, je vais donner deux formules aſſez ſimples pour les pyramides quarrées & triangulaires, & je ferai voir enſuite comment on peut compter les autres. Ces formules dépendent du Théorême ſuivant.

267. THEOREME. *Si l'on prend la ſuite des nombres naturels*, 0. 1. 2. 3. 4, *&c. qui commencent par zero, & qu'on en faſſe les quarrés* 0. 1. 4. 9. 16. 25. 36, *&c. je dis que ſi l'on fait la ſomme des deux premiers quarrés; des trois premiers, &c. chacune de ces ſommes ſera à ſon dernier terme ou au plus grand quarré qu'elle contient multiplié par le nombre des termes, c'eſt à-dire par le nombre qui exprime combien il y a de quarrés dans cette ſomme, comme* 1 *à* 3, *plus comme* 1 *à ſix fois la racine du plus grand quarré.*

Je pourrois démontrer cette propoſition en employant l'Algebre, mais comme le calcul eſt un peu long & compliqué, je me contenterai de le démontrer par une ſimple induction en cette ſorte.

Je prens d'abord les deux premiers quarrés 0, 1, leur ſomme eſt 1, & le dernier terme 1 multiplié par le nombre des termes, ou pris autant de fois qu'il y a de termes eſt 2; ainſi la ſomme eſt au plus grand quarré multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à 2, & par conſéquent elle en eſt la moitié; or la moitié d'une grandeur eſt égale au tiers, plus au ſixiéme de cette grandeur; donc la ſomme des quarrés 0, 1 eſt au dernier multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 à 6, mais 6 ou 6×1 eſt la même choſe que la racine 1 du plus grand quarré 1 multiplié par 6; donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 à 6 fois la racine du plus grand quarré.

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

Je prens les trois premiers quarrés $0+1+4$, leur ſomme eſt 5, & le plus grand 4 multiplié par le nombre des termes, ou pris trois fois eſt 12; donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 5 eſt à 12, & par conſéquent elle en eſt les cinq douziéme, mais $\frac{5}{12}=\frac{4}{12}+\frac{1}{12}$, & $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; donc

$$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{5}{12}=\frac{4}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$\frac{3}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$; ainſi la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 eſt à 3, plus comme 1 eſt à 12, ou 2×6 ; mais 2×6 eſt égal à la racine 2 du plus grand quarré multiplié par 6 ; donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 à 6 fois la racine 2 du plus grand quarré.

Je prens les quatre premiers quarrés 0. 1. 4. 9, la ſomme eſt 14 & le dernier 9 pris 4 fois eſt 36 ; donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 14 à 36, ainſi elle en eſt les $\frac{14}{36}$; or $\frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$, & $\frac{1}{18} = \frac{1}{3 \times 6}$; donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 eſt à 6 fois la racine 3 du plus grand quarré

$$\frac{0.1.4.9.}{9.9.9.9.} = \frac{14}{36} = \frac{12}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

Je prens les cinq premiers quarrés 0. 1. 4. 9. 16. leur ſomme eſt 30, & le dernier 16 pris cinq fois fait 80 ; ainſi la ſomme eſt $\frac{30}{80}$, ou $\frac{3}{8}$ du dernier terme multiplié par le nombre des termes ; or $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, en multipliant tout par 3, & $\frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4 \times 6}$, donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 à 4×6, ou comme 1 à la racine du plus grand quarré multiplié par 6.

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

Et comme en continuant de prendre un plus grand nombre de quarrés, je trouve toujours la même choſe, il s'enſuit que le Théorême eſt démontré. On trouvera une Démonſtration plus géométrique de ceci dans l'Arithmétique des Infinis dont nous traiterons plus bas.

268. PROBLEME. *Trouver combien il y a de boulets dans une pyramide quarrée ?*

Je ſuppoſe que la ſuite des quarrés qui compoſent la pyramide commence par zero & ſoit 0, 1, 4, 9, 16, &c. juſqu'au quarré de la baſe que je nommerai xx, ainſi le nombre des termes de cette ſuite ſurpaſſera d'une unité le nombre des couches de la pyramide, & n'augmentera pourtant pas ſa valeur, à cauſe que zero ajouté à une ſomme ne rend pas cette ſomme plus grande. J'aurai donc $x+1$ pour le nombre des termes, & multipliant le der-

nier terme par $x+1$, j'aurai x^3+x^2 qui ſera le produit du dernier terme multiplié par le nombre des termes; or la ſuite 0. 1. 4. 9. 16, &c. xx, eſt égale au tiers de ce produit, plus à une fraction de ce même produit exprimée par $\frac{1}{6x}$, & le tiers de x^3+x^2 eſt $\frac{x^3+x^2}{3}$, & le $\frac{1}{6x}$ eſt $\frac{x^3+x^2}{6x}$, donc la ſuite 0. 1. 4. 9. 16, & xx eſt égale à $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$, & par conſéquent la pyramide donnée ſera $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$, ce qui donne la regle ſuivante.

REGLE. *Faites la ſomme du cube & du quarré du dernier terme; diviſez cette ſomme par 3, enſuite diviſez la même ſomme par 6 fois la racine du dernier terme, ou par 6 fois le côté de la baſe de la pyramide, & les deux quotiens ajoutés enſemble vous donneront la ſomme des boulets.*

Soit $x=9$, c'eſt-à-dire ſuppoſons que le côté de la baſe de la pyramide contienne 9 boulets, nous aurons $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$ $=\frac{729+81}{3}+\frac{729+81}{6\times 9}=\frac{810}{3}+\frac{810}{54}$; or $\frac{810}{3}=270$, & $\frac{810}{54}=15$; donc $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}=270+15=285$; ainſi la pyramide contiendra 285 boulets, & en effet ſi l'on fait la ſuite des quarrés 1. 4. 9. 16, &c jusqu'au dernier qui ſera 81, puiſque le côté de la baſe eſt 9, & qu'on additionne ces quarrés, on trouvera que la ſomme eſt 285.

269. PROBLEME. *Trouver le nombre de boulets contenus dans une pyramide triangulaire.*

Nous avons déja dit que toute pyramide triangulaire eſt une ſuite ou une ſomme de nombres triangulaires (*N.* 263.), & que tout nombre triangulaire eſt la ſomme d'une progreſſion de nombres naturels, (*N.* 260.). Cela poſé.

Suppoſons que la ſuite des nombres triangulaires qui compoſent la pyramide commence par zero, & que la progreſſion des nombres naturels ait auſſi zero pour ſon premier terme, ce qui fera que le nombre des termes ſurpaſſera d'une unité le nombre des rangs de la pyramide, & le nombre des termes de la progreſſion 1. 2. 3, &c. ſans augmenter pourtant la valeur ni de la pyramide, ni de la progreſſion naturelle 1. 2. 3, &c.

Or delà il arrivera qu'en nommant x le dernier terme de la progreſſion o. 1. 2. 3, &c. qui formera un nombre triangulaire, le nombre des termes ſera $x+1$, & par conſéquenr la ſomme de la progreſſion ſera $x+o$ multiplié par $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (*N.* 251.); or $x+o$, ou x multiplié par $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ donne $\frac{xx+x}{2}$, donc le nombre triangulaire formé par cette progreſſion ſera encore $\frac{xx+x}{2}$ de même que nous l'avons trouvée ci-deſſus (*N* 262.) ce qui doit être effectivement, à cauſe que zero ajouté à une valeur ne l'augmente point.

Maintenant exprimons la progreſſion o. 1. 2. 3. 4, &c. par les caracteres o. *a*. *b*. *c*. *d*, &c. juſqu'au dernier que nous nommerons x, & qui par conſéquent ſera le côté de la baſe de la pyramide; le nombre triangulaire o ſera donc $\frac{o^2+o}{2}$, le nombre triangulaire formé par les deux premiers termes o. *a*. ſera $\frac{aa+a}{2}$; celui qui ſera formé par les trois premiers termes o. *a*. *b*. ſera $\frac{bb+b}{2}$, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier nombre triangulaire qui ſera $\frac{xx+x}{2}$, & il ne s'agit plus que de trouver la ſomme de tous ces nombres.

Pour cela négligeons d'abord le diviſeur 2, & faiſons la ſomme de tous les numérateurs laquelle nous diviſerons enſuite par le diviſeur 2 que nous aurons négligé. Cette ſomme ſera compoſée de deux ſuites dont l'une ſera la ſuite des quarrés des nombres naturels o. 1. 2. 3, &c. x, & l'autre ſera la ſuite de ces mêmes nombres; or la ſuite des quarrés eſt $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$ (*N.* 268.) & la ſuite de la progreſſion o. 1. 2. 3, &c. x, eſt $\frac{xx+x}{2}$ comme nous venons de voir; ajoutant donc enſemble ces deux ſuites, la ſomme des nombres triangulaires ſera $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}+\frac{xx+x}{2}$. Je réduis ces trois fractions au même dénominateur, en multipliant le numérateur & le dénominateur de la premiere par 2, & ceux de la derniere par 3, & en diviſant le numérateur & le dénomi-

o^2+o
a^2+a
b^2+b
c^2+c
&c.
x^2+x

nateur de la ſeconde par x, ce qui donne $\frac{2x^3+2x^2}{6} + \frac{x^2+x}{6} + \frac{3xx+3x}{6}$, & corrigeant l'expreſſion, j'ai $\frac{2x^3+6x^2+4x}{6}$ qui ſe réduit à $\frac{x^3+3x^2+2x}{3}$, en diviſant le numerateur & le dénominateur par 2; enfin je diviſe cette fraction par le diviſeur 2 que j'ai négligé, & le quotient $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$ eſt la pyramide cherchée, d'où l'on tire la regle ſuivante.

REGLE. *Prenez le cube du côté de la baſe, trois fois le quarré de ce côté, & deux fois ce côté; faites-en la ſomme, & diviſez-la par 6, ce qui donnera le nombre de boulets contenus dans la pyramide triangulaire.*

Soit 8 le côté de la baſe, ainſi $x=8$, & par conſéquent $\frac{x^3+3x^2+2x}{6} = \frac{512+192+16}{6} = \frac{720}{6} = 120$; ainſi 120 ſera le nombre de boulets, & en effet ſi l'on prend les huit premiers nombres triangulaires dont le dernier aura 8 au côté, on trouvera que leur ſomme eſt égale à 120.

270. PROBLEME. *Trouver quel eſt le nombre de boulets contenus dans une pyramide oblongue, ou dans une pyramide oblongue terminée par des pyramides quarrées, ou dans une pyramide oblongue terminée & entrecoupée par des pyramides quarrées.*

Soit la pyramide oblongue (*Fig.* 13.); cette pyramide eſt compoſée de la pyramide quarrée ABC, & de la figure oblongue DEHGF, ainſi le nombre de boulets contenus dans ces deux figures eſt le même que celui qui eſt contenu dans la figure entiere.

Or la pyramide ayant 6 boulets au côté de ſa baſe, je fais le cube de 6 qui eſt 216, & le quarré de 6 qui eſt 36, j'ajoute ces deux quantités enſemble, ce qui donne la ſomme 252; je diviſe cette ſomme par 3, & le quotient eſt 84, je diviſe la même ſomme par 6×6, ou par 36, & le quotient eſt 7, j'ajoute les deux quotiens 84 & 7, & la ſomme 91 eſt le nombre de boulets contenus dans la pyramide ABC.

Maintenant la figure DEHGF n'eſt autre choſe que le triangle FHG pris autant de fois qu'il y a de boulets dans le rang DF; mais le triangle FHG a ſix boulets à ſa baſe HG; donc ce triangle eſt $\frac{36+6}{2} = \frac{42}{2} = 21$ (*N.* 262.), multipliant donc 21 par le nombre

nombre 18 des boulets du rang DF, le produit 378 eſt le nombre de boulets contenus dans la figure DEHGF; donc en ajoutant 378 au nombre 91 de la pyramide quarrée ABC, la ſomme 469 ſera la ſomme totale des boulets de la figure 13.

Soit la pyramide oblongue terminée par deux pyramides quarrées (*Fig.* 14.) les deux pyramides étant égales, je meſure la pyramide ABC, en faiſant la ſomme 576 du cube 512 & du quarré 64 du côté BC = 8; je diviſe cette ſomme par 3, & le quotient eſt 192; je diviſe la même ſomme par 6 × 8, ou par 48, & le quotient eſt 12; j'ajoute les deux quotients enſemble, ce qui donne 204 pour le nombre des boulets de la pyramide ABC; ainſi doublant ce nombre, ce qui fait 408, j'ai le nombre des boulets des deux pyramides ABC, DEF.

Je coupe la figure qni eſt entre les deux pyramides en deux parties dont l'une HRNM eſt une figure oblongue, & l'autre SPV eſt une pyramide triangulaire; or la figure HRNM n'eſt autre choſe que le triangle dont le côté eſt NM = 4 pris autant de fois qu'il y a de boulets dans le rang HM = 17; c'eſt pourquoi faiſant le triangle du côté NM qui eſt $\frac{16+4}{2} = \frac{20}{2} = 10$, & multipliant 10 par 17, le produit 170 eſt la ſomme des boulets contenus dans HRNM. La pyramide triangulaire SPV ayant trois boulets au côté de ſa baſe PV eſt $\frac{27+27+6}{6} = \frac{60}{6} = 10$. (*N.* 269.) ajoutant donc 10 au nombre 170 de la figure HRNM, la ſomme 180 eſt le nombre de boulets contenus entre les deux pyramides; donc en ajoutant 180 à la ſomme 408 des deux pyramides, la ſomme 588 eſt le nombre de tous les boulets de la figure 14. & il eſt aiſé de calculer de la même façon la figure 15.

271. *Remarque.* Si l'on trouve que la formule $\frac{x^3+x^2}{3} + \frac{x^3+x^2}{6x}$ eſt un peu embarraſſante, on la ſimplifiera en cette ſorte. Je diviſe le numerateur & le dénominateur de la ſeconde fraction par x, & j'ai $\frac{x^2+x}{6}$ qui eſt encore la même que $\frac{x^3+x^2}{6x}$ (*N.* 33.) Je multiplie le numerateur & le dénominateur de la premiere fraction par 2, & j'ai $\frac{2x^3+2x^2}{6}$ qui eſt encore la même que $\frac{x^3+x^2}{3}$ (*N.* 32.) ainſi la formule ſe change en celle-ci $\frac{2x^3+2x^2+x^2+x}{6}$

laquelle en corrigeant l'expreſſion eſt $\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$, formule des pyramides quarrées, & cette formule ne differe de celle des pyramides triangulaires qui eſt $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$ qu'en ce que dans l'une le terme x^3 eſt multiplié par 2, & le terme x n'eſt multiplié que par l'unité, au lieu que dans l'autre le terme x^3 eſt multiplié par l'unité, & le terme x eſt multiplié par 2. Les trois formules pour les piles de boulets ſont donc en mettant x pour le côté de ſa baſe.

$\frac{x^2+x}{2}$, Formule des triangles.

$\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$, Formule des pyramides quarrées.

$\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$, Formule des pyramides triangulaires.

CHAPITRE VIII.

Des Raiſons, Proportions & Progreſſions Géométriques.

272. SI le premier terme d'une Raiſon géometrique eſt égal au ſecond, la raiſon s'appelle *Raiſon d'égalité*; s'il eſt plus grand la raiſon ſe nomme *Raiſon de plus grande inégalité*, & s'il eſt moindre c'eſt une *Raiſon de moindre inégalité*.

273. Il ne faut pas confondre la raiſon d'égalité avec ce qu'on nomme *égalité de raiſons*; car la raiſon d'égalité eſt entre deux grandeurs égales, & l'égalité de raiſons eſt entre deux raiſons égales. Quand on dit $a=b$, voilà une raiſon d'*égalité*, & quand on dit $a.b::c.d$, voilà une *égalité* de raiſons; ainſi l'un eſt bien différent de l'autre.

274. Quand l'antécédent contient un certain nombre de fois exactement ſon conſéquent comme deux fois, trois fois, &c. la raiſon ſe nomme double, triple, quadruple, &c. & en general *multiple*. Mais ſi l'antécédent ne contient pas exactement ſon conſéquent, comme par exemple 3 qui contient 2 une fois & demi, on ſe contente d'exprimer la raiſon par ſes termes en diſant: que la raiſon eſt de 3 à 2, & on en agit ainſi pour éviter les noms barbares de *ſeſquialtere*, *ſeſquitierce*, *ſurparticuliere*, *ſurpatiente*, *ſurbipatiente*, *&c.* dont les Anciens ſe ſervoient.

275. Quand le conſéquent contient un certain nombre de fois

exactement ſon antécédent, la raiſon eſt ſousdouble, ſousttiple, ſousquadruple, &c. & en général *ſousmultiple*, parce que dans toute raiſon c'eſt toujours le premier terme qu'on rapporte au ſecond, & qu'alors le premier eſt la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. du ſecond ; mais dans les cas ou l'antécédent n'eſt pas contenu exactement dans le conſéquent, on exprime la raiſon par ſes termes mêmes, comme la raiſon de 2 à 3, de 4 à 5, &c.

276. L'expoſant d'une raiſon étant le quotient de la diviſion du plus grand terme par le moindre, il eſt clair que le moindre terme multiplié par l'expoſant doit être égal au plus grand, puiſque dans toute diviſion le produit du diviſeur par le quotient eſt égal au dividende (*N.* 29.) ainſi dans la raiſon a, b, ſi a eſt plus grand que b, & que le quotient de a diviſé par b, ou l'expoſant ſoit nommé p, on aura $a = bp$, & ſi au contraire b eſt plus grand que a, & que le quotient de b diviſé par a, ou l'expoſant ſoit encore nommé p, on aura $b = ap$. Nous ſuppoſerons toujours que le premier terme eſt plus grand que le ſecond, à moins que nous ne diſions autrement.

277. THEOREME. *Dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, & ſi la proportion eſt continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne.*

Soit la proportion géométrique $a. b :: c. d$; je nomme p l'expoſant de la raiſon a, b, lequel eſt le même que l'expoſant de la raiſon c, d, puiſque ces deux raiſons étant égales, le premier antécédent a contient ſon conſéquent b de la même façon que l'antécédent c contient ſon conſéquent d ; ainſi nous aurons $a = bp$, & $c = dp$ (*N.* 276.) & mettant ces valeurs de a & de c dans la proportion, nous aurons $bp. b :: dp. d$, & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous autons bpd, & dpb, or ces deux produits ſont égaux, puiſqu'ils ſont formés par les mêmes grandeurs ; donc $bpd = dpb$, & remettant dans cette équation a au lieu de bp, & c au lieu de dp, nous aurons $ad = bc$, & par conſéquent le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

Si la proportion étoit continue comme $:: a, b, c$, on l'écriroit ainſi $a, b :: b, c$, & nommant l'expoſant p, la premiere raiſon a, b, ſeroit la même que bp, b, & la ſeconde raiſon b, c, ſeroit la même que $cp. c$; ainſi la proportion ſe changeroit en celle-ci $bp. b :: cp. c$, qui ſeroit encore la même, & faiſant le produit des extrêmes, & celui des moyens on auroit $bpc = cbp$, mais $bp = a$,

& $cp = b$; mettant donc a au lieu de bp dans le premier produit ; & b au lieu de cp dans le ſecond, on auroit $ac = bb$, c'eſt-à-dire le produit des extrêmes égal au quarré de la moyenne.

278. COROLLAIRE. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont diſpoſées de telle façon que le produit des extrêmes ſoit égal au produit des moyens, ces quatre grandeurs ſeront en proportion.* Si cela n'étoit pas l'expoſant de la raiſon a, b, ſeroit donc différent de l'expoſant de la raiſon c, d. Nommons le premier p, & le ſecond q, donc nous aurons $a = bp$, & $c = dq$; ainſi les quatre grandeurs ſeront bp, b, dq, d, & le produit des extrêmes bpd, ne ſera pas égal à celui des moyens bdq, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

279. COROLLAIRE II. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont proportionnelles, on trouvera toujours qu'elles ſont en proportion de quelque façon qu'on les diſpoſe, pourvû que l'on obſerve que les extrêmes reſtent tous deux extrêmes, ou qu'ils deviennent tous deux moyens, & que les moyens reſtent tous deux moyens ou qu'ils deviennent tous deux extrêmes.*

On pourra donc faire les ſept changemens ſuivans dans leſquels il eſt aiſé de voir que la proportion ſubſiſte toujours, puiſque le produit des extrêmes & celui des moyens ſont toujours les mêmes que le produit des extrêmes & celui des moyens des quatre grandeurs a, b, c, d, ſçavoir $ad = bc$, & $bc = ad$.

	$a. b :: c. d.$	$ad = bc$
1er.	$a. c :: b. d.$	$ad = bc$
2e.	$b. a :: d. c.$	$cb = ad$
3e.	$b. d :: a. c.$	$cb = ad$
4e.	$d. c :: b. a.$	$ad = cb$
5e.	$c. a :: d. b.$	$cb = ad$
6e.	$d. b :: c. a.$	$ad = cb$
7e.	$c. d :: a. b.$	$cb = ad$

Le premier changement ſe nomme *alternando*, parce qu'on compare les grandeurs alternativement, la premiere à la troiſiéme, & la ſeconde à la quatriéme.

Le ſecond ſe nomme *invertendo*, ou *permutando*, parce qu'on met les conſéquens à la place des antécédens. Les autres n'ont d'autres noms que ceux qu'ils tirent de l'arrangement de leurs termes, ainſi dans le troiſiéme on compare le premier conſéquent au ſecond, & le premier antécédent au ſecond antécédent ; dans le quatriéme on compare le ſecond conſéquent à ſon antécédent, & le premier conſéquent à ſon antécédent, &c.

280. COROLLAIRE. III. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont proportionnelles, & qu'on ajoute ou qu'on retranche chaque conſéquent de ſon antécédent, ou chaque antécédent de ſon conſéquent, il y aura toujours proportion.* Ainſi l'on pourra faire les changemens ſuivans

dans leſquels je vais démontrer que la proportion ſubſiſte toujours.

Le produit des extrêmes du premier changement eſt $ad + db$, & celui des moyens eſt $bc + bd$, or les termes bd, db ſont égaux, & les termes ad, bc, le ſont auſſi puiſque les quatre grandeurs proportionnelles a, b, c, d, donnent $ad = bc$; donc les produits $ad + db$, & $bc + bd$ étant compoſés de quantités égales ſont parfaitement égaux, & ainſi des autres. Le premier & le troiſiéme de ces changemens ſe nomment *componendo*, & le ſecond & le quatriéme ſe nomment *dividendo*.

	$a. b :: c. d$	$ad = bc$
1er.	$a + b. b :: c + d. d$	$ad + bd = bc + bd$
2e.	$a - b. b :: c - d. d$	$ad - bd = bc - bd$
3e.	$a. a + b :: c. c + d$	$ac + ad = ac + bc$
	$a. a - b :: c. c - d$	$ac - ad = ac - bc$

281. *Remarque.* Il eſt clair qu'on peut faire la même choſe dans les ſept diſpoſitions du ſecond Corollaire; or quand on dit $b + a. a :: d + c. c$ ou $b - a. a :: d - c. c$, c'eſt-à-dire le premier conſéquent plus ou moins ſon antécédent, cela ſe nomme *convertendo*, ou converſion de raiſon.

282. Corollaire IV. *Si quatre grandeurs ſont en proportion, & qu'on ajoute ou qu'on retranche des deux premiers termes, ou des deux derniers, ou des antécédens, ou des deux conſequens, ou enfin des quatre termes des grandeurs qui ſoient en même raiſon que ces termes, il y aura toujours proportion.*

Soit la proportion $a. b :: c. d$, je prens les deux grandeurs m, n, qui ſont en même raiſon que a & b, & je dis que $a + m. b + n :: c. d$. Suppoſons que l'expoſant de la raiſon a, b, ſoit p, & nous aurons $a = pb$, ainſi l'expoſant de la raiſon m, n, étant auſſi p, nous aurons $m = np$, mettant donc les valeurs de a & de m dans $a + m$ & $b + n$, nous aurons $pb + np, b + n$; or ſi je diviſe le premier terme de cette raiſon par le ſecond, le quotient ou l'expoſant ſera p, c'eſt-à-dire le même que celui de la raiſon a, b, ou de la raiſon c, d, & par conſéquent les trois raiſons $pb + np, b + n$; a, b; c, d ſeront égales; mais la raiſon $pb + np, b + n$, eſt égale à la raiſon $a + m, b + n$; donc celle-

	$a. b :: c. d$
1er.	$a + m. b + n :: c. d$
2e.	$a - m. b - n :: c. d$
3e.	$a + m. b :: c + n. d$
4e.	$a - m. b :: c - n. d$
5e.	$a. b + m :: c. d + n$
6e.	$a. b - m :: c. d - n$
7e.	$a + m. b + r :: c + n. d + s$
8e.	$a - m. b - r :: c - n. d - s$

ci eſt auſſi égale à chacune des deux raiſons a, b; c, d, & partant $a+m, b+n :: c. d$. Il eſt aiſé de démontrer la même choſe dans le troiſiéme, quatriéme, cinquiéme & ſixiéme cas, en ſuppoſant que les grandeurs m, n, ſont en même raiſon que les antécédens a, b, ou que les conſéquens b, d, & dans le ſeptiéme & huitiéme cas, les grandeurs m, r, de même que les grandeurs n, t, doivent être dans la même raiſon que les termes $a. b$, ou c, d.

283. COROLLAIRE V. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont en proportion, & qu'on les multiplie par quatre autres grandeurs* e, f, g, h, *qui ſoient auſſi en proportion, c'eſt-à-dire chaque terme par chaque terme, les produits ſeront encore en proportion, & ce ſeroit la même choſe ſi on diviſoit chaque terme par chaque terme.*

Il s'agit de prouver que $ae. bf :: cg. dh$. Je nomme p l'expoſant de la premiere proportion, donc $a = bp$, & $c = dp$, & mettant ces valeurs de a & de c dans la premiere proportion, j'ai $bp. b :: dp. c$.

$$\begin{array}{l} a. b :: c. d. \\ e. f :: g. h. \\ \hline . \ ae. bf :: cg. dh \end{array}$$

Je nomme q l'expoſant de la ſeconde proportion, & partant $e = fq$, & $g = hq$, & mettant les valeurs de e & de g dans la ſeconde proportion, j'ai $fq. f :: hq. h$. Je multiplie les termes de la proportion $bp. b :: dp. c$ par les termes de la ſeconde $fq. f :: hq. h$, & je trouve $bpfq. bf :: dphq. dh$. Je diviſe le premier terme de la premiere raiſon par le ſecond, & le quotient ou l'expoſant eſt pq. Je diviſe de même le premier terme de la ſeconde raiſon par le ſecond terme, & le quotient ou l'expoſant eſt encore pq; donc ces deux raiſons ſont égales; mais la premiere raiſon $bpfq, bf$ eſt la même que la raiſon ae, bf, & la ſeconde raiſon $dphq, dh$, eſt la même que cg, dh, donc les raiſons ae, bf, & cg, dh ſont égales, & partant $ae. bf :: cg. dh$.

$$\begin{array}{llll} bp. & b & :: & dp. \ d. \\ fq. & f & :: & hq. \ h. \\ \hline bpfq. & bf & :: & dphq. \ dh. \end{array}$$

Maintenant ſuppoſons que les termes de la premiere proportion ſoient diviſés par ceux de la ſeconde, ce qui donne $\frac{a}{e}. \frac{b}{f} :: \frac{c}{g}. \frac{d}{h}$; je mets les valeurs de a, c, e, g, trouvées ci-deſſus, & j'ai $\frac{bp}{fq}. \frac{b}{f} :: \frac{dp}{hq}. \frac{d}{h}$, & divi-

$$\begin{array}{l} a. b :: c. d \\ e. f :: g. h \\ \hline \frac{a}{e}. \frac{b}{f} :: \frac{c}{g}. \frac{d}{h} \end{array}$$

$$\frac{bp}{fq}. \frac{b}{f} :: \frac{dp}{hq}. \frac{d}{h}$$

ſant l'antécédent de chaque raiſon par ſon conſéquent, le quotient ou l'expoſant eſt de part & d'autre $\frac{p}{q}$, donc les deux raiſons ſont égales, & par conſéquent $\frac{bp}{fq} . \frac{b}{f} :: \frac{dp}{hq} . \frac{d}{h}$, mais $\frac{bp}{fq} = \frac{a}{e}$, & $\frac{dp}{hd} = \frac{c}{g}$, donc $\frac{a}{e} . \frac{b}{f} :: \frac{c}{g} . \frac{d}{h}$.

284. COROLLAIRE VI. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont en proportion, leurs quarrés, leurs cubes, leurs quatrième puiſſances, &c. ou leurs racines ſecondes, troiſiémes, &c. ſont auſſi en proportion.*

Quand on éleve les quatre grandeurs *a, b, c, d*, au quarré, on fait la même choſe que ſi l'on multiplioit les termes de la proportion *a. b :: c. d* par les termes d'une autre proportion *a. b :: c. d*; or or en ce cas les produits ſont en proportion (*N.* 283.) donc les quarrés qui ne ſont autre choſe que les produits, ſont auſſi en proportion ; donc la proportion des quarrés multipliée par celle des premieres puiſſances donnera une autre proportion qui ſera celle des cubes, & celle des cubes multipliée par celle des premieres puiſſances donnera celle des quatriémes puiſſances, &c.

Maintenant puiſque les quarrés étant en proportion, les racines le ſont auſſi, ſi nous regardons les termes de la proportion *a. b :: c. d*, comme des grandeurs quarrées, leurs racines quarrées donneront par conſéquent la proportion $\sqrt{a} . \sqrt{b} :: \sqrt{c} . \sqrt{d}$, & ſi nous les regardons comme des cubes, leurs racines cubiques donneront la proportion $\sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c} . \sqrt[3]{d}$, & ainſi des autres.

285. REMARQUE. Il eſt aiſé de voir que *ſi quatre grandeurs ſont en proportion, leurs doubles, ou leurs triples, & en général leurs équimultiples c'eſt-à-dire les grandeurs qui les contiennent un même nombre de fois, ou leurs tiers, leurs quarts, &c. & en général leurs ſous-équimultiples, c'eſt-à-dire les grandeurs qu'elles contiennent un même nombre de fois, ſont encore en proportion.* Car en prenant leurs doubles, ou leurs triples, &c. on les multiplie toutes ou par 2, ou par 3, &c. & en prenant leurs moitiés ou leurs tiers, &c. on les diviſe toutes ou par 2 ou par 3, &c. & par conſéquent les deux premiers termes ſont encore en même raiſon après la multiplicatiplication ou la diviſion qu'ils l'étoient auparavant (*N.* 32. 33.) & la même choſe arrive aux deux derniers. Donc les quatre produits ou les quatre quotiens étant encore en même raiſon, la proportion ſubſiſte, & elle ſubſiſteroit auſſi, ſi on multiplioit ou diviſoit les quatre grandeurs, ou les deux premieres, ou les deux

dernieres, ou les antecedents ou les conſéquents par tel nombre que l'on voudroit, entier, ou rompu, ou compoſé d'entier & de fraction.

286. COROLLAIRE VII. *Si deux produits ſont égaux, on pourra toujours en tirer une proportion en mettant le deux grandeurs qui compoſent le premier à la place des deux extrêmes, ou des deux moyens, & celles qui compoſent le ſecond à la place des moyens, ou à la place des extrêmes.*

Soient les produits $ad=cb$, je dis qu'on aura $a.b::c.d$, ou $a.c::b.d$, ce qui eſt évident, puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

287. Les deux grandeurs du premier produit ſont dites *réciproques* aux grandeurs du ſecond produit égal au premier, parce qu'ayant pris le premier antecedent dans le premier produit, & ſon conſéquent dans le ſecond, on prend réciproquement le ſecond antecedent dans le ſecond produit, & ſon conſéquent dans le premier.

288. COROLLAIRE VIII. *Si la raiſon de deux grandeurs* a, b, *eſt plus grande que celle de deux autres grandeurs* c, d, *le produit des extrêmes ſera plus grand que celui des moyens; & au contraire, ſi la raiſon* a, b *eſt moindre que la raiſon* c, d, *le produit des extrêmes eſt moindre que celui des moyens.*

Si la raiſon a, b étoit égale à la raiſon c, d, on auroit $ad=bc$; or par la ſuppoſition le premier antecedent eſt plus grand qu'il ne faut, puiſque la raiſon a, b eſt plus grande que la raiſon b, c; donc ad doit être plus grand que bc: mais ſi la raiſon a, b eſt moindre que la raiſon b, c, le premier antecedent a eſt plus petit qu'il ne faut; donc ad eſt moindre que cd.

289. *REMARQUE.* Si la raiſon a, b eſt plus grande ou moindre que la raiſon c, d., on trouvera toujours en alternant, en permutant, en un mot en faiſant tous les changemens marqués ci-deſſus, (N. 279. 280. &c.) que le produit des extrêmes ſera plus grand ou moindre que celui des moyens; car ſi on alterne en diſant a, c, & b, d, les produits ad, bc ſeront encore les mêmes, & par conſéquent ad ſera plus grand ou moindre que bc., de même ſi on compoſe en diſant $a+b.b$ & $c+d.b$, les produits ſeront $ad+bd$, & $bc+bd$, & retranchant bd de part & d'autre, il reſtera ad plus grand ou moindre que bc, & on prouvera aiſément la même choſe de tous les autres cas.

290.

290. PROBLEME. *Trois termes d'une proportion géometrique étant connus trouver celui que l'on ne connoît pas.*

Je nomme x le terme inconnu, & ce terme eſt ou le premier de la proportion, ou le ſecond, ou le troiſiéme, ou enfin le quatriéme. Suppoſons qu'il ſoit le dernier, je nomme a la grandeur qui doit être le premier terme, b celle qui doit être le ſecond, & c celle qui doit être le troiſiéme. J'ai donc cette proportion $a. b :: c. x$, & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, je trouve $ax = bc$, & diviſant tout par a j'ai $x = \frac{bc}{a}$, c'eſt-à-dire, le quatriéme terme eſt égal au produit des moyens diviſé par le premier extrême.

Si la proportion devoit être $b. a :: x. c$, c'eſt-à-dire que la grandeur inconnuë fût la troiſiéme, je ferois *invertendo*, $a. b :: c. x$, & le produit des extrêmes & celui des moyens, donneroient $ax = bc$, d'où je tirerois $x = \frac{bc}{a}$ de même qu'auparavant.

Si la proportion étoit $c. x :: a. b$, je ferois $a. b :: c. x$ (*N.* 279.) ce qui donneroit encore $ax = bc$, & $x = \frac{bc}{a}$.

Enfin ſi la proportion étoit $x. c :: b. a.$, je ferois $a\ b :: c. x$, (*N.* 279.) ce qui donneroit encore $ax = bc$, & $x = \frac{bc}{a}$

D'où l'on voit qu'en arrangeant les termes de façon que x devienne le dernier, & qu'il y ait toujours proportion, on aura toujours l'inconnuë x égale au produit des moyens diviſé par le premier extrême.

291. Au reſte il n'eſt pas abſolument néceſſaire de faire les changemens que j'ai fait dans les trois derniers cas; car on voit aiſément que le produit des extrêmes & celui des moyens, auroit toujours donné $bc = ax$, ou $ax = bc$, ce qui revient au même, & que par conſéquent $x = \frac{bc}{a}$; mais il auroit fallu établir des regles différentes pour chaque cas, au lieu que par les changemens de diſpoſitions dans les termes, nous n'avons qu'une ſeule regle, comme on vient de voir. D'ailleurs ceci a encore une autre utilité dont nous parlerons bientôt.

292. PROBLEME. *Deux termes d'une proportion continuë étant connus, trouver celui qui eſt inconnu.*

Si le terme x qui manque eſt le dernier, la proportion ſera $a. b :: b. x$; d'où l'on tire $ax = bb$ & $x = \frac{bb}{a}$, & ſi x eſt le premier

terme, la propotion ſera $x.b::b.a$, ou $a.b::b.x$; d'où l'on tire encore $ax=bb$, & $x=\frac{bb}{a}$, ce qui fait voir que dans ces deux cas l'inconnuë ſera égale au quarré de la moyenne, diviſé par l'autre grandeur connue.

Mais ſi la proportion eſt $a.x::x.b$, on aura $xx=ab$, & tirant la racine quarrée de parr & d'autre, on aura $x=\sqrt{ab}$; c'eſt-à-dire l'inconnuë eſt égale à la racine quarrée du produit des extrêmes.

De la proportion inverſe.

293. Les proportions dont nous venons de parler, ſe nomment proportions droites, à cauſe que le premier terme eſt au ſecond, comme le rroiſiéme eſt au quatriéme; mais ſi le premier étoit au ſecond, comme le quarriéme au troiſiéme, la proportion ſe nommeroit *inverſe*. Or cette proportion peut ſe changer aiſément en proportion droire, en mettant le quatriéme terme au lieu du troiſiéme, & le troiſiéme au lieu du quatriéme. Par exemple ſoient les quatre grandeurs a, b, c, d, diſpoſées de façon que la premiere ſoit à la ſeconde comme la quatriéme eſt à la troiſiéme, j'écris $a.b::d.c$, & la proportion devient droite, & ainſi des autres.

De la Regle de Trois directe.

294. La Regle de *Trois* directe n'eſt autre choſe qu'une proportion directe dont le quatriéme terme eſt inconnu.

EXEMPLE. *Deux hommes gagnent* 10 *écus par jour, combien* 12 *hommes en gagneront-ils ?*

Je vois que le nombre de 12 hommes étant plus grand que celui de deux hommes, le gain de 12 hommes doit être à proportion plus grand que le gain de deux hommes; c'eſt pourquoi j'ai la proportion directe le nombre 2 hommes eſt au nombre 12 hommes comme le gain 10 de 2 hommes eſt au gain que 12 hommes doivent faire, & ce quatriéme terme eſt l'inconnuë que je cherche; or l'inconnuë eſt égal au produit des moyens diviſé par la premiere extrême (*N.* 290.) multipliant donc 12 par 10, & diviſant le produit par 2, le quotient 60 eſt le gain de 12 hommes.

2. 12. 10.

10 / 120

2 / 120 (60 / 00

De la Regle de Trois indirecte.

295. La Régle de *Trois* indirecte eſt une proportion inverſe dont le quatriéme terme eſt inconnu.

EXEMPLE. 300 *hommes peuvent ſe nourrir* 15 *jours des munitions de bouche qui ſont dans une Place*, 400 *hommes pendant combien de jours pourront-ils ſe nourrir de ces mêmes munitions.*

Comme 300 hommes mangent moins que 400, il eſt clair qu'ils ſubſiſteront pendant plus long-tems, ainſi nous avons une proportion inverſe dont le premier terme 300 eſt au ſecond 400 comme le quatriéme terme ou le nombre inconnu que je cherche & que je nomme x eſt au troiſiéme terme 15 jours; mettant donc le quatriéme terme au lieu du troiſiéme, & le troiſiéme au lieu du quatriéme, j'ai 300. 400 :: x. 15 qui eſt une proportion directe (*N.* 293.) dans laquelle l'inconnuë eſt le troiſiéme terme, je fais *invertendo* 400. 300 :: 15. x, & l'inconnuë eſt à preſent le quatriéme terme; or ce quatriéme terme eſt égal au produit des extrêmes diviſé par le premier; multipliant donc 300 par 15, & diviſant le produit par 400, le quotient $11\frac{1}{4}$ eſt le nombre de jours pendant leſquels 400 hommes pourroient ſubſiſter.

400. 300 :: 15. $x = 11\frac{1}{4}$

15

1500

300

4500

400.

4500 ($11\frac{100}{400}$ ou $\frac{1}{4}$

500

100

296. Si on n'avoit rien voulu déranger dans la façon dont les termes ſe trouvent diſpoſés dans la queſtion, on voit que pour trouver l'inconnuë il auroit fallu multiplier les deux premiers 300 & 15 l'un par l'autre, & diviſer le produit par le troiſiéme terme 400; c'eſt pourquoi les Arithméticiens donnent ordinairement pour regle de la Regle de Trois inverſe, *qu'il faut faire le produit des deux premiers termes, & le diviſer par le ſecond, au lieu que dans la Regle de Trois directe, il faut multiplier le ſecond par le troiſiéme, & diviſer le produit par le premier.*

De la Regle de Compagnie ou de Societé.

297. La Regle de *Compagnie* eſt ainſi nommée, parce que deux ou pluſieurs perſonnes ayant fait une Societé, laquelle a gagné ou perdu une certaine ſomme, on demande quelle eſt la part du

gain qui revient à chacun, ou la part de la perte que chacun doit ſupporter à proportion de ce qu'il a mis dans la bourſe commune. Cette Regle ſe fait par autant de regles de Trois qu'il y a de perſonnes.

EXEMPLE. *Trois perſonnes ont fait une Societé de 600 livres. Le premier a mis 100 livres, le ſecond en a mis 200, & le troiſiéme 300, & au bout de quelque tems la Societé a gagné 300 livres, combien revient-il à chacun?*

Pour trouver le gain du premier, je dis: le fonds 600 livres de la Societé eſt à la miſe 100 du premier comme le gain total eſt au gain que ce premier doit avoir, car il ne doit gagner qu'à proportion de ce qu'il a mis; par la même raiſon le fonds 600 eſt à la miſe 200 du ſecond comme le gain total eſt au gain du ſecond; & enfin le fond 600 eſt à la miſe 300 du troiſiéme comme le gain total eſt au gain du troiſiéme.

600. 100 :: 300. 50. *Gain du* 1er.
600. 200 :: 300. 100. *Gain du* 2e.
600. 300 :: 300. 150. *Gain du* 3e.

300. *Gain total.*

Faiſant donc les trois regles de Trois, la part du premier eſt 50, celle du ſecond 100, & celle du troiſiéme 150, & ces trois parts ajoutées enſemble font le gain total.

298. On ſe ſert auſſi de cette regle pour diviſer une grandeur en parties proportionnelles aux parties connuës d'une autre grandeur.

Soit par exemple la quantité a dont les parties ſont b, c, d; & l'on demande de partager la quantité f en trois parties proportionnelles aux parties b, c, d. Pour réſoudre ce Problême je nomme x, y, z, les trois parties de f, & je dis la grandeur a eſt à ſa partie b comme la grandeur f eſt à ſa partie x, & faiſant la même choſe pour trouver les parties y, z, j'ai trois regles de Trois à faire, leſquels me donnent $x = \frac{bf}{a}$, $y = \frac{cf}{a}$, & $z = \frac{df}{a}$.

$a. b :: f. x = \frac{bf}{a}$
$a. c :: f. y = \frac{cf}{a}$
$a. d :: f. z = \frac{df}{a}$

De la Regle d'Alliage.

299. La Regle d'Alliage eſt ainſi nommée, parce qu'elle ſert à réſoudre toutes les queſtions où il s'agit de faire des mêlanges de certaines marchandiſes, ou des alliages de certains métaux à certaines conditions.

I. EXEMPLE *Un Marchand de vin a deux ſortes de vin, le prix de l'un eſt à 20 ſols la pinte, le prix de l'autre à 12, & il veut en faire un mêlange de 1888 pintes qu'il puiſſe vendre à 15 ſols, en ſorte que ce qu'il gagnera ſur celui de 12 ſols ſoit compenſé par la perte qu'il fera ſur celui de 20; comment doit-il faire?*

J'écris les deux prix 20 & 12 l'un ſous l'autre, & entre deux un peu vers la droite j'écris le prix moyen 15, je prens la différence 5 de 20 à 15, & je l'écris vis-à-vis de 12; je prens auſſi la différence 3 de 12 à 15, & je l'écris vis-à-vis de 20; je fais la ſomme 8 des différences 3 & 5, & je dis que ſi ce Marchand faiſoit un mêlange de 5 pintes à 12 ſols, & de 3 pintes à 20 ſols, ce qui feroit le mêlange 8, l'argent qu'il retireroit en le vendant à 15 ſols, ſeroit le même que s'il avoit vendu chaque vin à ſon prix.

20. 3:
15.
12. 5:
8.

Pour en concevoir la raiſon, il n'y a qu'à obſerver que ſur chacune des cinq pintes à 12 qui entrent dans le mêlange, le Marchand gagne 3 ſols en le vendant à 15 ſols, & par conſéquent il gagne 3×5, ou 15 ſols, & qu'au contraire ſur chacune des trois pintes de 20 ſols qui entrent dans le mêlange, & qu'il vend 15 ſols, il perd 5 ſols, ce qui fait 3×5, ou 15 ſols; ainſi puiſque ce qu'il gagne d'un côté eſt égal à ce qu'il perd de l'autre, il eſt viſible qu'il lui revient le même argent que s'il avoit vendu chaque vin à ſon prix.

Maintenant le mêlange qu'on demande étant de 1888 pintes, je fais deux regles de Trois, en diſant pour la premiere: Si 8 pintes de mêlange demandent 3 pintes à 20 ſols, combien le mêlange 1888 en demandera-t'il? & pour la ſeconde ſi 8 pintes de mêlange demandent 5 pintes à 12 ſols, combien le mêlange en demandera-t'il? & les deux regles étant faites me donnent 708 pintes à 20 ſols, & 1180 à 12 ſols, & en effet ces deux ſommes ajoutées enſemble font le mêlange demandé 1888.

8. 3 :: 1888. 708 *Pintes à 20 ſols*
8. 5 :: 1888. 1180 *Pintes à 12 ſols*
1888 Mêlange.

II. EXEMPLE. *Hieron Roy de Syracuſe donna à ſon Orfévre une quantité d'or pour lui faire une couronne; l'ouvrage étant fini, le Roy fut bien aiſe de ſçavoir s'il n'y avoit point de mêlange, & propoſa la queſtion à Archimede; ce ſçavant Mathématicien découvrit la quantité d'or & d'argent que l'Orfévre y avoit employée, & l'on demande comment il parvint à cette connoiſſance?*

Nous démontrerons dans l'Hydroſtatique que ſi pluſieurs corps de même poids, mais de différente nature, ſont plongés dans l'eau, ils perdent des parties de leur poids, les unes plus grandes, & les autres moindres, ce que l'on connoît en mettant au lieu de l'un des baſſins d'une balance un crochet qui peſe autant que l'autre baſſin, après quoi on attache au crochet un long fil auquel eſt ſuſpendu le corps qu'on veut peſer; on le peſe d'abord dans l'air, & enſuite on le plonge dans l'eau, enſorte que la balance & l'autre baſſin n'y entrent pas, & le peſant de nouveau, on trouve qu'il peſe moins; d'où il eſt aiſé de connoître la différence des poids, & par conſéquent la perte de poids que le corps fait dans l'eau : Cela poſé.

Archimede prit deux lingots, l'un d'or & l'autre d'argent, qui peſoient chacun autant que la couronne, & ayant trouvé que la couronne plongée dans l'eau, perdoit plus de ſon poids que le lingot d'or, & moins que le lingot d'argent, il réſolut la queſtion par une regle d'alliage, ainſi que nous allons voir.

Suppoſons que la couronne peſât 96 onces, que la perte de ſon poids qu'elle faiſoit dans l'eau fût de 8 onces, que celle du lingot d'or fût de 7 onces $\frac{1}{4}$, & celle du lingot d'argent 9 onces & $\frac{1}{4}$. Il eſt clair qu'il y avoit de l'alliage dans la couronne; car ſi elle avoit été d'or pur comme le lingot d'or, leurs pertes de poids dans l'eau auroient été égales, puiſque les poids du lingot & de la couronne étoient égaux. Et par la même raiſon, ſi elle avoit été d'argent, ſa perte & celle du lingot d'argent auroient été égales. Je réduits les trois pertes, & le poids 96 de chacune des maſſes en fractions, dont le dénominateur ſoit 4, ce qui donne $\frac{32}{4}$, $\frac{31}{4}$, $\frac{37}{4}$ & $\frac{384}{4}$; ainſi les trois pertes & le poids 96 ſont entr'eux comme 32, 31, 37 & 384, c'eſt-à-dire ſi le poids 96 avoit été diviſé en 384 parties, la couronne auroit perdu dans l'eau 32 parties, le lingot d'or 31, & le lingot d'argent 37. Je fais un alliage des pertes 31 & 37 des lingots d'or & d'argent pour avoir la perte moyenne 32, & échangeant les différences, c'eſt-à-dire mettant la différence 1 de 31 à 32 vis-à-vis 37, & la différence 5 de 37 à 32 vis-à-vis 31, la ſomme 6 des différences me fait voir que pour faire un alliage de 6 onces qui perdit autant dans l'eau que 6 onces du mêlange de la couronne, il faudroit cinq onces d'or & une d'argent; car chacune des cinq onces d'or perdroit une once de moins que chaque once du mêlange, ce

31. 5.
32.
37. 1.
6.

qui feroit cinq onces de moins, mais l'once d'argent perdroit cinq onces de plus qu'une once de mêlange; donc ce qu'il auroit de moins étant compensé par le plus, les cinq onces d'or jointes à l'once d'argent ne perdroient ni plus ni moins que 6 onces de mêlange.

Maintenant puisque la couronne pesoit 96 onces, je fais deux regles de Trois en disant pour la premiere : si pour un alliage de 6 onces il faut cinq onces d'or, combien un alliage de 96 en demandera-t'il? & pour la seconde : si pour un alliage de 6 onces il faut une once d'argent, combien un alliage de 96 en exigera-t'il? & ces deux regles donnent 80 onces d'or & 16 onces d'argent.

6. 5 :: 96. 80 *Or.*
6. 1 :: 96. 16 *Argent.*

96 *Alliage de la couronne.*

Exemple III. *Pour fondre une piece de canon qui soit bonne, il faut mettre 3 livres d'étain sur 25 livres de rosette ou cuivre rouge, & cela posé on demande de connoître si cet alliage a été observé dans une vieille piece qu'on veut refondre, & supposé que cela ne soit pas, on demande ce qu'il faut ajouter de l'un ou de l'autre métail pour faire l'alliage bon.*

Par les fréquentes expériences qu'on a faites, on a trouvé que si deux masses l'une de cuivre rouge ou rosette, & l'autre d'étain, sont d'égale pesanteur, la premiere perd la neuviéme partie de son poids, & la seconde n'en perd que la septiéme partie, cela posé.

Supposons que la piece qu'on veut refondre pese 5200 livres, & qu'après l'avoir mise en pieces l'un de ses tronçons du poids de 28 livres ait perdu dans l'eau $\frac{206}{63}$ de son poids, je dis : si ce tronçon étoit tout de rosette, il perdroit $\frac{28}{9}$ de son poids, & s'il étoit tout d'étain il perdroit $\frac{28}{7}$; je réduis ces fractions en même dénomination, ce qui donne $\frac{196}{63}$, & $\frac{252}{63}$; je réduis aussi le poids 28 en une fraction dont le dénominateur soit 63, & j'ai $\frac{1764}{63}$, ainsi la perte du mêlange 28, celle de 28 de rosette, celle de 28 d'étain, & le poids 28 sont entr'eux comme les nombres 206, 196, 252 & 1764; j'allie les pertes 196 & 252 de 28 de rosette & de 28 d'étain avec la perte moyenne 206, & échangeant les différences, je trouve que pour faire un alliage de 56 livres dont chacune perdit dans l'eau 206 parties de son poids divisé en 1764 parties, il faudroit 46 livres de rosette & 10 d'étain.

196. 46.
206.
252. 10.
56.

Je dis donc ſi un alliage de 56 livres demande 46 de roſette, combien un alliage de 5200 en demandera-t'il ? & ſi un alliage de 56 demande 10 d'étain, combien l'alliage 5200 en demandera-t'il ? & ces deux regles donnent 4271 $\frac{24}{56}$ de roſette, & 928 $\frac{32}{56}$ d'étain.

56. 46 :: 5200. 4271 $\frac{24}{56}$
56. 10 :: 5200. 928 $\frac{32}{56}$

Pour trouver combien il a mis de roſette ſur 28 livres de mêlange, je dis le mêlange 56 eſt à 46 de roſette comme le mêlange 28 eſt à un quatriéme terme, lequel après avoir fait la regle ſe trouve 23 ; ainſi il a mis 23 livres de roſette au lieu de 25, & par conſéquent il a mis 2 livres d'étain de plus.

Et pour trouver combien il faut ajouter de roſette pour rendre l'alliage bon, je dis ſi 3 d'étain demandent 25 de roſette, combien 928 $\frac{32}{56}$ d'étain demandent-elles ? & faiſant la regle je trouve 7771 $\frac{24}{56}$; or il y en a déja 4271 $\frac{24}{56}$, ainſi il faut y ajouter 3500 de roſette ; car 3500 & 4271 $\frac{24}{56}$ font 7772 $\frac{24}{56}$.

300. Lorſque le mêlange ou l'alliage que l'on veut faire eſt compoſé de trois quantités, le problême peut ſe réſoudre de la même façon.

Suppoſons qu'on veut faire un alliage de trois ſortes de métaux dont le premier vaut 20 ſols la livre, le ſecond 12 ſols & le troiſiéme 6, & qu'on demande que la livre d'alliage ne coute que 10 ſols, on mettra la différence 10 de 20 à 10, vis-à-vis 6, & la différence 2 de 12 à 10 auſſi vis-à-vis 6, parce qu'il n'y a qu'un ſeul prix 6 qui ſoit inférieur au prix moyen ; après quoi on mettra la différence 4 de 6 à 10 vis-à-vis 20 & vis-à-vis 12, parce que ces deux quantités 20 & 12 ont donné leur différence à la quantité ; & faiſant la ſomme 20 des quatre grandeurs 4, 4, 10 & 2, on connoîtra que pour faire un mêlange de 20 livres à 10 ſols la livre il en faut 4 du metail de 20 ſols, 4 du métail de 12 ſols, & 10 + 2, ou 12 du métail de 6 ſols, ce qu'on démontrera de même qu'auparavant.

20. 4.
12. 4.
10.
6. 10.
2.
20

301. Mais ſi le mêlange ou l'alliage demandé contient plus de trois quantités, le problême eſt ſuſceptible de pluſieurs ſolutions, en ſuppoſant néanmoins qu'il ſe trouve plus d'une quantité au-deſſus ou au-deſſous de la quantité moyenne ; car s'il ne s'en trouvoit qu'une au-deſſus ou au-deſſous, le problême n'auroit qu'une ſolution & ſe réſoudroit comme on vient de voir, en donnant à la quantité qui ſeroit ſeule ou au-deſſous, ou au-deſſus toutes

toutes les différences des autres, & à chacune des autres la différence qui ſeroit ſeule.

Soient les prix de quatre quantités 25, 20, 12 & 6, & le prix moyen 15, j'arrange ces prix & le prix moyen à la façon ordinaire, & prenant la différence 10 de 25 à 15, je la mets vis-à-vis 6; je prens auſſi la différence 9 de 6 à 15, & je la mets vis-à-vis 25; car il faut toujours obſerver que la différence d'une grandeur ayant été miſe vis-à-vis d'une autre, réciproquement la différence de cette autre ſoit miſe vis-à-vis de la premiere. Je prens de même la différence 5 de 20 à 15, & je l'écris vis-à-vis de 12, & la différence 3 de 12 à 15 que j'écris vis-à-vis de 20; ainſi la ſomme 27 des différences 9, 3, 5 & 10, me fait voir que pour un alliage de 27 livres il en faudroit 9 à 25 ſols la livre, 3 à 20 ſols, 5 à 12 ſols, & 6 à 20 ſols.

25.	9.	
20.	3.	
	15.	
12.	5.	
6.	10.	
	27.	

Si je veux une autre ſolution, je mets la différence 10 de 25 à 15, non plus vis-à-vis de 6, mais vis-à-vis de 12, & la différence 3 de 12 à 15 vis-à-vis de 20; de même je mets la différence 5 de 20 à 15 vis-à-vis de 6, & la différence 9 de 6 à 15 vis-à-vis de 20, & la ſomme 27 des différences me fait voir que pour un alliage de 27 livres dont le prix ſeroit 15 ſols, il faudroit 3 livres à 25 ſols, 9 livres à 20 ſols, 10 à 12 ſols, & 5 à 6 ſols, & cet alliage eſt différent de l'autre, & je ne ſçaurois en faire d'autre par cette méthode, parce que je ne puis échanger les différences que de ces deux façons, & il eſt aiſé de voir que ſi j'avois un plus grand nombre de choſes à allier, j'aurois auſſi un plus grand nombre de différentes ſolutions.

25.	3.	
20.	9.	
	15.	
12.	10.	
6.	5.	
	27.	

J'ai donné dans l'*Arithmétique des Géomètres* d'autres Méthodes par leſquelles on peut trouver un plus grand nombre de ſolutions de ces ſortes de problêmes; mais comme ce que nous venons de dire ſuffit, je n'en parlerai pas ici de peur d'être trop long.

Des Progreſſions Géométriques.

302. THEOREME. *Si l'on a une ſuite de Raiſons égales qui ſoient en progreſſion géométrique, ou qui ne le ſoient pas, la ſomme de tous les antécedens eſt à la ſomme de tous les conſéquens, comme l'un des antécedens eſt à ſon conſéquent.*

Soient les Raiſons égales $a. b :: c. d :: e. f$ qui ne ſont pas en

progreſſion. Puiſque chaque antécedent contient ſon conſéquent, ou eſt contenu dans lui de la même façon, il eſt clair que tous les antécedens contiendront, ou ſeront contenus de la même façon dans leurs conſéquents; & que par conſéquent tous les antécedents ſeront à tous les conſéquents comme l'un des antécedens eſt à ſon conſéquent, ainſi l'on aura $a+c+e.\ b+d+f :: a.\ b.$ Si a eſt double de b, c ſera double de d, & e double de f, & il eſt viſible que tous les doubles $a+c+e$ contiendront leurs ſimples $b+d+f$, comme l'un des doubles a contient ſon ſimple b, &c.

Soit la progreſſion :: a, b, c, d, cette progreſſion peut s'écrire ainſi, $a.\ b :: b.\ c :: c.\ d$, ce qui fait une ſuite de raiſons égales. Donc l'on prouvera, de même que nous venons de faire, que $a+b+c.\ b+c+d :: a.\ b.$

303. Corollaire. Il ſuit de-là que dans toute progreſſion la ſomme de tous les termes moins le dernier, eſt à la ſomme de tous les termes moins le premier, comme le premier eſt au ſecond, ou comme le ſecond au troiſiéme, &c.

304. Theoreme. *Dans toute progreſſion géométrique aſcendante, le ſecond terme moins le premier eſt au premier, comme le dernier moins le premier eſt à la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier.*

Soit la progreſſion aſcendante :: a, b, c, d, e, par le Theorême précedent, nous avons $a+b+c+d.\ b+c+d+e :: a.\ b.$ Donc *invertendo* nous avons $b+c+d+e.\ a+b+c+d :: b.\ a$, & *dividendo* nous aurons $b+c+d+e-a-b-c-d.\ a+b+c+d :: b-a.\ a$, & corrigeant l'expreſſion du premier terme, nous aurons $e-a.\ a+b+c+d :: b-a.\ a$, & mettant la ſeconde Raiſon à la place de la premiere, & la premiere à la place de la ſeconde, nous aurons $b-a.\ a :: e-a.\ a+b+c+d$, ce qu'il falloit démontrer.

305. *Remarque I.* Il faut obſerver qu'au lieu de dire le ſecond moins le premier eſt au premier, on pourroit dire le troiſiéme moins le ſecond eſt au ſecond, ou le quatriéme moins le troiſiéme eſt au troiſiéme, &c. ou le dernier moins le pénultiéme eſt au pénultiéme, &c. car la progreſſion étant compoſée des Raiſons égales $a.\ b :: b.\ c :: c.\ d :: d.\ e$, il eſt viſible que $b-a.\ a :: c-b.\ b :: d-c.\ c :: e-d.\ d$; & que par conſéquent au lieu de $b-a.\ a$ on peut mettre ou $c-b.\ b$, ou $d-c.\ c$, ou enfin $e-d.\ d$.

306. *Remarque II.* Si la progreſſion étoit deſcendante comme :: *e. d. c. b. a*, on la prendroit à rebours, ce qui donneroit la progreſſion aſcendante :: *a, b. c. d. e*, & l'on auroit la même choſe qu'auparavant.

307. Theoreme. *Dans toute progreſſion géométrique aſcendante; le ſecond terme eſt égal au premier multiplié par l'Expoſant, le troiſiéme eſt égal au premier multiplié par la ſeconde puiſſance de l'Expoſant, le quatriéme eſt égal au premier multiplié par la troiſiéme puiſſance de l'Expoſant, & ainſi de ſuite.*

Soit la progreſſion aſcendante :: *a. b. c. d. e*, & l'Expoſant *p*, le ſecond terme *b* ſera donc *ap*; & mettant cette valeur de *b* dans la ſeconde raiſon *b, c*, nous aurons *ap. c*; & comme l'Expoſant de cette Raiſon eſt encore *p*, nous aurons $ap \times p$, ou $app = c$, & par la même Raiſon nous aurons $ap^3 = d$, & $ap^4 = e$; donc la progreſſion propoſée ſera la même que celle-ci :: *a. ap. app.* ap^3, ap^4, où l'on voit que le ſecond terme eſt égal au premier multiplié par l'Expoſant, que le troiſiéme eſt égal au premier multiplié par la ſeconde puiſſance de *p*, &c.

308. Si la progreſſion étoit deſcendante comme :: *e. d. c. b. a*, on la prendroit à rebours, ce qui donneroit la progreſſion aſcendante :: *a. b. c. d. e*, où l'on prouveroit la même choſe que ci-deſſus.

309. Corollaire. Il ſuit de-là que dans toute progreſſion géométrique aſcendante, le dernier terme eſt égal au premier multiplié par l'Expoſant élevé à une puiſſance, dont le dégré eſt égal au nombre des termes diminué de l'unité; car dans la progreſſion :: *a, ap, app*, ap^3, ap^4, le dernier terme ap^4 eſt égal au premier terme *a*, multiplié par la puiſſance p^4, dont le dégré 4 eſt égal au nombre des termes 5 diminué de l'unité.

310. Probleme. *Trouver la ſomme d'une progreſſion géométrique.*

Soit la progreſſion géométrique aſcendante 2 4. 8. 16. 32. Je dis $4 - 2$ eſt à 2 comme $32 - 2$ eſt à la ſomme des termes qui précedent 32 (*N.* 304.); mais $4 - 2 = 2$ & $32 - 2 = 30$; donc j'ai 2. 2 :: 30. 30, & par conſéquent 30 eſt la ſomme de tous les termes moins le dernier; c'eſt pourquoi ajoutant à cette ſomme le dernier terme 32, la ſomme 62 eſt la ſomme de la progreſſion; & l'on voit ici que quand l'Expoſant eſt 2, le dernier terme moins le premier eſt égal à la ſomme des termes qui le précedent.

Si la progreſſion avoit été 1. 3. 9. 27. 81, on auroit trouvé en faiſant $3 - 1$ eſt à 1 comme $81 - 1$ eſt à la ſomme des termes

qui précedent le dernier, & en achevant la regle de trois, que, le dernier terme moins le premier d'une progreſſion dont l'expoſant eſt 3, eſt double de la ſomme des termes qui le précedent; & ſi l'Expoſant étoit 4, on trouveroit que le dernier terme moins le premier ſeroit triple de la ſomme des termes qui le précedent, & ainſi de ſuite.

311. Soit la progreſſion géométrique deſcendante 32. 16. 8. 4. 2. je la prens à rebours, ce qui me donne la progreſſion aſcendante 2. 4. 8. 16. 32. dont je cherche la ſomme comme auparavant; ou bien comme il eſt indifférent de dire 4 — 2 eſt à 2, ou de dire 32 — 16 eſt à 16, comme 32 — 2 eſt à la ſomme des termes qui le précedent, je fais la regle de trois de cette derniere façon, & je retrouve de même qu'auparavant, que la ſomme des termes qui précedent le dernier, eſt 30. Or cela me fait voir que ſi je ne veux pas renverſer la progreſſion deſcendante, je dois dire: *Le premier terme* 32 *moins le ſecond* 16, *eſt au ſecond* 16 *comme le premier* 32 *moins le dernier* 2 *eſt à la ſomme des termes qui ſuivent le premier* 32, & ceci peut ſervir de regle générale pour les progreſſions deſcendantes qu'on ne voudra pas prendre à rebours.

312. Si la progreſſion géométrique deſcendante s'étend à l'infini, le dernier terme devient infiniment petit, & peut être regardé comme égal à zero, & par conſéquent on aura le premier terme moins le ſecond eſt au ſecond comme le premier moins le dernier qui eſt zero, c'eſt-à-dire comme le premier eſt à la ſomme des termes qui le ſuivent; ſuppoſant donc que la progreſſion eſt :: 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. &c. $\frac{1}{2^{\infty}}$ juſqu'au dernier terme qui ſera un diviſé par la puiſſance infinie de l'Expoſant 2, lequel ſera par conſéquent un infiniment petit, à cauſe qu'une fraction diminue de plus en plus, à meſure que ſon dénominateur augmente, & devient enfin égale à rien quand le dénominateur eſt infini, nous aurons 1 — $\frac{1}{2}$ eſt à $\frac{1}{2}$ comme 1 eſt à la ſomme des termes qui ſuivent le premier, & comme 1 — $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, nous trouverons que le nombre infini de termes qui ſuivent le premier 1 ne vaut qu'un, & que par conſéquent la ſomme entiere de la progreſſion eſt 2.

On trouvera de la même façon que ſi la progreſſion étoit :: 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{27}$. & $\frac{1}{3^{\infty}}$, la ſomme des termes qui ſuivent le premier, ſeroit égale à $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire à la moitié du premier terme; que ſi la progreſſion étoit :: 1 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, &c. $\frac{1}{4^{\infty}}$, la ſomme des termes qui précedent le dernier, ſeroit $\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire le tiers du pre-

mier terme, & ainſi de ſuite. D'où il ſuit que toute progreſſion deſcendante compoſée d'une infinité de termes, eſt égale à une grandeur finie, à moins que ſon premier terme ne fût infini.

313. Quand aux progreſſions géométriques aſcendantes, il eſt viſible que leur valeur eſt infinie. Par exemple, ſi la progreſſion eſt :: 1. 2. 4. 8. 16. &c. 2^{∞}, la ſomme des termes qui précedent le dernier, ſera égale à $2^{\infty} - 1$, (*N.* 310), & par conſéquent la ſomme totale ſera $2 \times 2^{\infty} - 1$. De même ſi la progreſſion eſt :: 1. 3. 27. 81. &c. 3^{∞}, la ſomme des termes qui précedent le dernier, ſera $\frac{1}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2}$, & la ſomme $\frac{1}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2}$, & ſi la progreſſion eſt :: 1. 4. 16. 64. &c. 4^{∞}, la ſomme des termes qui précedent le dernier, eſt $\frac{1}{3} \times 4^{\infty} - \frac{1}{3}$, & la ſomme totale $\frac{4}{3} \times 4^{\infty} - \frac{1}{3}$, & ainſi de ſuite.

314. Que ſi à ces progreſſions aſcendantes infinies, on ajoute les deſcendantes, enſorte qu'on ait pour la premiere $\frac{1}{2^{\infty}}$. &c. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. &c. 2^{∞}, la ſuite des fractions $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$ &c. ſera 1. (*N.* 312.); & comme la ſuite 1. 2. 4. 8. &c. eſt $2 \times 2^{\infty} - 1$, ajoutant enſemble ces deux valeurs, la ſomme totale ſera $2 \times 2^{\infty} - 1 + 1$, ou $2 \times 2^{\infty}$. De même ſi la progreſſion eſt $\frac{1}{3^{\infty}}$. &c. $\frac{1}{81}$. $\frac{1}{27}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{3}$. 1. 3. 9. 27. 81. &c. 3^{∞}, la ſuite des fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, &c. ſera $\frac{1}{2}$, & celle des termes 1. 3. 9. 27. &c. eſt $\frac{1}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2}$, & ajoutant enſemble ces deux valeurs, la ſomme totale ſera $\frac{1}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{2} \times 3^{\infty}$, & ainſi de ſuite.

315. THEOREME. *Toutes les puiſſances d'une grandeur ſont en progreſſion géométrique.*

Soit la ſuite des puiſſances a. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. &c. ſi je diviſe la ſeconde par la premiere, le quotient ſera a; de même ſi je diviſe la troiſiéme par la ſeconde, l'Expoſant ſera encore a, & ainſi de ſuite; donc puiſque l'Expoſant d'une puiſſance à l'autre eſt toujours le même, ces puiſſances ſont en progreſſion géométrique. Soit encore la ſuite a^0. a^{-1}. a^{-2}. a^{-3}. a^{-4}. &c qui eſt la même que celle-ci 1. $\frac{1}{a}$. $\frac{1}{aa}$. $\frac{1}{a^3}$. $\frac{1}{a^4}$. &c. (*N.* 161.) dont les termes vont en diminuant. Si je diviſe le premier terme a^0 par le ſecond a^{-1}, en me ſervant du calcul des expoſans, le quotient ou l'expoſant des deux termes ſera a^1, & ſi je diviſe le ſecond terme a^{-1} par la troiſiéme a^{-2}, le quotient ſera encore a^1, & ainſi de ſuite. Donc les puiſſances ſeront en progreſſion.

316. Il faut obſerver que tandis que les puiſſances poſitives d'une grandeur a^0. a^1. a^2. a^3. &c. ſont en progreſſion géométri-

que leurs expoſants 0. 1. 2. 3. 4. &c. ſont en progreſſion arithmetique poſitive, & que tandis que ſes puiſſances négatives a^{-1}. a^{-2}. a^{-3}. &c. ſont auſſi en progreſſion géométrique, leurs expoſants $-1, -2, -3, -4, -5$, &c. ſont en progreſſion arithmetique négative; de façon que le terme zero ſe trouve entre la progreſſion poſitive & la négative, & que la progreſſion arithmetique totale eſt $-\infty$, &c. $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$, &c. ∞, ce qui nous ſervira pour mieux faire entendre ce que c'eſt que les *Logarithmes*.

CHAPITRE IX.

Des Raiſons compoſées.

317. SI l'on a deux ou pluſieurs raiſons, $a, b; c, d; e, f;$ & qu'on multiplie tous les antécedens les uns par les autres, & tous les conſéquens auſſi, les deux produits ace, bdf, formeront une autre raiſon, laquelle eſt dite Raiſon *compoſée* des raiſons $a, b; c, d; e, f$, qu'on nomme *les compoſantes*.

318. Une Raiſon compoſée de deux Raiſons égales, ſe nomme raiſon *doublée* de l'une des compoſantes; une raiſon compoſée de trois Raiſons égales, ſe nomme Raiſon *triplée* de l'une des compoſantes, & ainſi de ſuite.

Les raiſons doublées, triplées, quadruplées, &c. ſont donc différentes des Raiſons doubles, triples, quadruples, &c. & il ne faut pas les confondre; car la raiſon double eſt une raiſon dont l'antécedent eſt double du conſéquent (*N.* 274) au lieu qu'une Raiſon doublée eſt une raiſon compoſée de deux raiſons égales.

219. J'ai dit (*N.* 238.) que l'expoſant d'une Raiſon eſt le quotient de la diviſion du plus grand terme par le moindre, ſoit que ce terme ſoit ou le premier ou le dernier de la Raiſon, parceque lorſque le plus grand terme eſt le premier, le quotient de la diviſion fait voir combien de fois le premier contient le ſecond, & lorſqu'il eſt le dernier, le quotient fait voir combien de fois le premier eſt contenu dans le ſecond. Or il faut remarquer qu'on pourroit auſſi appeller *expoſant*, le quotient du premier terme diviſé par le ſecond, ſoit que le premier ſoit plus grand, ou qu'il ſoit plus petit que le ſecond; car dans le cas où le premier terme eſt moindre, le quotient du premier diviſé par l'autre, eſt une fraction qui fait voir que le premier étant moindre, eſt

contenu dans le ſecond. Mais pour ne pas mettre de l'équivoque dans le mot d'*expoſant*, ainſi que quelques Auteurs ont fait, je nommerai toujours *expoſant* le quotient de la diviſion du plus grand terme par le plus petit terme ; & au contraire je nommerai *expoſiteur* le quotient du premier terme diviſé par le ſecond, & cet expoſiteur ne differera de l'expoſant que dans le cas où le premier terme ſera le moindre ; & il eſt viſible que l'expoſiteur multiplié par le ſecond terme, ſera toujours égal au premier dans l'un & l'autre cas ; car ſuppoſé que la Raiſon ſoit 4, 2, *l'expoſiteur* ſera 2, & par conſéquent multipliant le dernier terme 2 par le quotient ou expoſiteur 2, le produit 4 ſera égal au premier. De même ſi la Raiſon eſt 2, 4, l'expoſiteur ſera $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, & le dernier terme 4 multiplié par $\frac{1}{2}$, donnera le produit 2 égal au premier terme, &c.

320. THEOREME. *Dans toute Raiſon compoſée l'Expoſiteur eſt égal au produit des Expoſiteurs des Raiſons compoſantes.*

Soient les Raiſons $a, b ; c, d$, l'expoſiteur de la premiere p, & celui de la ſeconde q, la Raiſon compoſée ſera donc ac, bd. (*N.* 317.) Or dans la premiere Raiſon nous avons $a = bp$ (*N.* 319.), & dans la ſeconde $c = dq$; mettant donc ces valeurs de a & c dans la Raiſon compoſée, nous aurons $bpdq, bd$, & par conſéquent diviſant le premier terme par le dernier, l'expoſiteur ſera pq, c'eſt-à-dire le produit des expoſiteurs p, q, des raiſons compoſantes.

De même ſoient les trois Raiſons compoſantes $a, b ; c, d ; f, h$; l'expoſiteur de la premiere p, celui de la ſeconde q, & celui de la troiſiéme m ; la Raiſon compoſée ſera donc acf, bdh ; or dans la premiere raiſon j'ai $a = bp$, dans la ſeconde $c = dq$, & dans la troiſiéme $f = mh$; mettant donc ces valeurs de a, c, f dans la compoſée acf, bdh, j'aurai $bpdqmh, bdh$, & diviſant le premier terme par le ſecond, l'expoſiteur ſera pqm, lequel eſt produit des trois expoſiteurs p, q, m, & ainſi des autres.

321. Ce Theorême eſt général, quand même il ſe trouveroit des Raiſons compoſantes qui auroient leurs antécedents plus grands que leurs conſéquents, & d'autres leurs conſéquents plus grands que les antécedents, & je n'aurois pas pû la rendre générale de la même façon, ſi je m'étois ſervi des expoſants au lieu des expoſiteurs. Car ſoient les Raiſons compoſantes 4, 1 ; 1. 3, l'expoſiteur de la premiere eſt 4, & celui de la ſeconde eſt $\frac{1}{3}$, & la Raiſon compoſée eſt 4, 3, dont l'expoſiteur $\frac{4}{3}$ eſt égal au produit

des expoſiteurs 4, $\frac{1}{3}$ des Raiſons compoſantes. Mais ſi j'avois pris les expoſans 4 & 3 des raiſons compoſantes, l'expoſant $\frac{4}{3}$ de la compoſée n'auroit pas été égal au produit des expoſans 4 & 3, & par conſéquent le théorême ne ſe ſeroit pas étendu à ce cas.

322. THEOREME. *L'expoſiteur d'une Raiſon compoſée de deux Raiſons égales, eſt égal au quarré de l'expoſiteur de l'une des compoſantes; celui d'une raiſon compoſée de trois Raiſons égales, eſt égal au cube de l'expoſiteur de l'une des compoſantes; celui d'une raiſon compoſée de quatre raiſons égales, eſt égal à la quatriéme puiſſance de l'expoſiteur de l'une des égales, & ainſi de ſuite.*

Soient les deux raiſons $a, b :: c, d$, l'expoſiteur p de la premiere ſera donc le même que l'expoſiteur de la ſeconde, & par conſéquent nous aurons $a = bp$ & $c = dp$. Or la raiſon compoſée eſt ac, bd; mettant donc dans la compoſée les valeurs de a & de c, nous aurons $bpdp, bd$, & diviſant le premier terme par le ſecond, l'expoſiteur pp ſera le quarré de l'expoſiteur p de la premiere Raiſon compoſante, ou de la ſeconde.

Soient de même les trois Raiſons égales, $a, b :: c, d, :: f, h$; & l'expoſiteur de chachacune d'elles p; nous aurons donc $a = bp$, $c = dp$, & $f = hp$. Or la raiſon compoſée eſt acf, bdh; mettant donc les valeur de a, c, f, nous aurons $bpdphp, bdh$, & diviſant le premier terme par le ſecond, l'expoſiteur ppp ſera le cube de l'expoſiteur de la premiere raiſon compoſante, ou de la ſeconde, ou de la troiſiéme; & il eſt aiſé de prouver la même choſe à l'égard des Raiſons compoſées d'un plus grand nombre de Raiſons égales.

323. THEOREME. *Les quarrés ſont en Raiſon doublée de la Raiſon de leurs racines, les cubes en Raiſon triplée, les quatriémes puiſſances en Raiſon quadruplée, & ainſi de ſuite.*

Soient les quarrés aa, bb, dont les racines ſont a, b, je prens les deux Raiſons égales $a, b :: a. b$, & la compoſée de ces deux Raiſons eſt la raiſon doublée aa, bb; or les termes des cette Raiſon doublée ſont les quarrés des termes a, b, de l'une ou de l'autre des compoſantes; donc les qurrés aa, bb, ſont en Raiſon doublée de la Raiſon de leurs racines.

De même ſoient les cubes a^3, b^3, dont les racines ſont a, b; je prens les trois Raiſons égales $a, b :: a, b :: a, b$, & la compoſée de ces trois Raiſons eſt a^3, b^3, laquelle eſt triplée de la premiere, ou de la ſeconde, ou de la troiſiéme; or a^3, b^3, ſont les cubes des termes a, b, de chacune de ces raiſons; donc

les

les cubes ſont en raiſon triplée de la raiſon de leurs racines, & ainſi des autres.

324. COROLLAIRE. Il ſuit delà que les racines quarrées ſont en raiſon ſoudoublée de celle de leurs quarrés, que les racines cubiques ſont en raiſon ſoutriplée de celle de leurs cubes, &c.

325. THEOREME. *Si l'on a pluſieurs grandeurs de ſuite, la premiere eſt à la troiſiéme en raiſon compoſée de la raiſon de la premiere à la ſeconde, & de celle de la ſeconde à la troiſiéme; la quatriéme eſt en raiſon compoſée de la raiſon de la premiere à la ſeconde, de celle de la ſeconde à la troiſiéme, & de celle de la troiſiéme à la quatriéme, & ainſi de ſuite, c'eſt-à-dire que la raiſon d'un terme à un autre eſt compoſée de toutes les raiſons qui ſe trouvent entre-deux.*

Soient les grandeurs a, b, c, d, e, &c. telles que l'on voudra, ſoient qu'elles aillent toujours en augmentant, ou toujours en diminuant, ou tantôt en augmentant, & tantôt en diminuant; je prens les deux raiſons a, b; b, c, & faiſant la compoſée, j'ai ab, bc, & diviſant l'un & l'autre terme par b, les quotiens a, c, ſont en même raiſon que ab, bc, (*N.* 33.); donc $a. c :: ab. bc$, & par conſéquent la premiere grandeur donnée eſt à la troiſiéme c, en raiſon compoſée de celle des deux premieres a, b, & de celle de la ſeconde b à la troiſiéme c.

Je prens de même les trois raiſons a, b; b, c; c, d, & leur compoſée eſt abc, bcd; or ſes deux termes étant diviſés par bc, donnent a, d, qui ſont en même raiſon que abc, bcd; donc $a. d :: abc. bcd$, c'eſt-à-dire la premiere grandeur donnée a eſt à la quatriéme d en raiſon compoſée des raiſons intermédiaires, a, b; b, c; c, d, & ainſi des autres.

326. COROLLAIRE. Si les grandeurs données a, b, c, d, e, &c. étoient en progreſſion géométrique aſcendante, ou deſcendante, ce ſeroit encore la même choſe.

327. THEOREME. *Dans toute Progreſſion géometrique aſcendante ou deſcendante, le premier terme eſt au troiſiéme comme le quarré du premier au quarré du ſecond; le premier eſt au quatriéme comme le cube du premier au cube du ſecond; le premier eſt au cinquiéme comme la quatriéme puiſſance du premier à la quatriéme puiſſance du ſecond, & ainſi de ſuite.*

Soit la progreſſion $:: a, b, c, d, e$, &c. par le Théorême précédent, le premier terme a eſt au troiſiéme c, en raiſon compoſée de la raiſon a, b, & de la raiſon b, c, or ces deux raiſons ſont égales; donc le premier terme a eſt au troiſiéme c en raiſon

doublée de la raiſon a, b, ou de la raiſon b, c, (*N.* 318.); or la raiſon doublée de l'une des compoſantes eſt égale à la raiſon des quarrés des termes de l'une des compoſantes (*N.* 323.); donc la raiſon a, c, eſt la même que la raiſon des quarrés des deux premiers termes a, b de la progreſſion.

De même par le Théorême précédent la raiſon a, d, eſt compoſée des raiſons a, b; b, c; c, d; or ces trois raiſons ſont égales; donc la raiſon a, d, eſt triplée de la raiſon a, b; mais les cubes de la raiſon a, b, ſont auſſi en raiſon triplée de la raiſon a, b, (*N.* 323.) donc le premier terme a de la progreſſion eſt au quatriéme terme d, comme le cube a^3 du premier eſt au cube b^3 du ſecond, & ainſi des autres.

328. THEOREME. *Une Progreſſion géométrique aſcendante ou deſcendante étant donnée, les quarrés de ſes termes, ou les cubes, ou les quatriémes puiſſances; de même, leurs racines quarrées ou leurs racines cubiques, ou leurs racines quatriémes, &c. ſeront encore en progreſſion.*

Dans toute progreſſion géométrique la raiſon du premier terme au ſecond eſt égale à celle du ſecond au troiſiéme, celle du troiſiéme au quatriéme, & ainſi de ſuite; donc les raiſons doublées, ou triplées, ou quadruplées, &c. ou les raiſons ſoudoublées, ſoutriplées, ſouquadruplées, &c. de toutes ces raiſons ſont encore égales; or les quarrés de ces raiſons ſont en raiſon doublée, les cubes en raiſon triplée, &c. & les racines quarrées ſont en raiſon ſoudoublée, les racines cubiques en raiſon ſoutriplée, &c. donc les quarrés ou les cubes, &c. ou les racines quarrées ou cubiques, &c. ſont entr'elles en même raiſon, & par conſéquent elles ſont encore en progreſſion.

329. THEOREME. *Si deux quarrés inégaux ou deux cubes, ou deux quatriémes puiſſances, &c. ſont diviſés l'un par l'autre, le quotient eſt un nombre quarré, ou un cube, &c.*

Ceci eſt une ſuite des principes précédens, mais on peut le démontrer avec plus de facilité en cette ſorte. Soient les quarrés aa, bb, ſi je diviſe l'un par l'autre, le quotient eſt $\frac{aa}{bb}$, lequel eſt encore un quarré; car ſa racine eſt $\frac{a}{b}$. De même ſoient les cubes a^3, b^3, ſi je diviſe l'un par l'autre, le quotient $\frac{a^3}{b^3}$ eſt encore un cube, puiſque ſa racine cubique eſt $\frac{a}{b}$, & ainſi des autres.

330. PROBLEME. *Trouver entre deux nombres donnés autant de moyennes proportionnelles géométriques qu'on voudra.*

Soient les grandeurs a, b, entre leſquelles on demande une moyenne proportionnelle géométrique, je la nomme x, & j'ai :: $a. x. b$; or le quarré de la premiere eſt au quarré de la ſeconde comme la premiere eſt à la troiſiéme (*N.* 327.) donc $aa. xx. a. b$, & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, j'ai $aab = axx$, & diviſant par a de part & d'autre, je trouve $ab = xx$, & $x = \sqrt{ab}$, ce qui me fait voir qu'il faut multiplier a par b & en tirer la racine quartée du produit pour avoir x, de même que nous l'avons trouvée. (*N.* 292.)

Soient les grandeurs a, b, entre leſquelles on demande deux moyennes proportionnelles; je nomme la premiere x, & la ſeconde y, & j'ai :: $a. x. y. b$; or le cube de la premiere eſt au cube de la ſeconde comme la premiere eſt à la quatriéme (*N.* 327.); donc $a^3. x^3 :: a. b$, d'où je tire $a^3b = ax^3$, & diviſant tout par a, j'ai $a^2b = x^3$, & tirant la racine cubique je trouve $x = \sqrt{a^2b}$; ce qui me fait voir que pour trouver la premiere des deux moyennes proportionnelles il faut faire le quarré de la premiere a, le multiplier par la quatriéme b, & tirer la racine cubique du produit. Après quoi comme les quatre termes ſont en progreſſion on dira la premiere a eſt à la ſeconde x qui ſera une grandeur connuë comme cette ſeconde eſt à la troiſiéme, & la Regle de Trois donnera la troiſiéme.

On trouveroit de même trois moyennes proportionnelles, quatre, &c. entre deux grandeurs données.

331. *REMARQUE.* Il n'arrive pas toujours qu'on puiſſe exprimer en nombres les moyennes proportionnelles que l'on cherche, & l'on va voir dans le Chapitre ſuivant quels ſont les cas où cela ne ſe peut pas.

332. THEOREME. *On peut toujours trouver une moyenne proportionnelle exprimable en nombre entre deux quarrés parfaits, c'eſt-à-dire dont on peut extraire la racine, deux entre deux cubes parfaits, trois entre deux quatriémes puiſſances parfaites, & ainſi de ſuite.*

Soient les deux quarrés parfaits aa, bb, je les multiplie l'un par l'autre, ce qui donne $aabb$, dont la racine quarrée ab eſt moyenne proportionnelle entre les deux quarrés aa, bb, puiſque ſon quarré eſt égal au produit des deux quarrés qui ſont ſes extrêmes (*N.* 330.) ainſi j'ai :: $aa. ab. bb.$ ce qui fait voir que *le produit des racines de deux quarrés eſt moyen proportionnel entre ces deux quarrés.*

Pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux cubes a^3, b^3, je multiplie leurs racines a, b, chacune par le quarré aa, ce qui donne les produits a^3, a^2b, qui ſont en même raiſon que les racines a, b, (*N.* 32.) ; je multiplie les mêmes racines a, b, chacune par le quarré de la ſeconde, ce qui donne les produits abb, b^3, qui ſont auſſi en même raiſon, & par conſéquent les deux raiſons a^3, a^2b ; & abb, b^3 étant égales chacune à la raiſon a, b, ſont égales entr elles ; donc $a^3.\ a^2b :: abb.\ b^3$. Maintenant pour prouver que ces quatre grandeurs ſont non-ſeulement proportionnelles, mais encore en proportion continuë, je multiplie la premiere a^3 par la troiſiéme abb, & le produit eſt a^4bb dont la racine quarrée eſt a^2b, & par conſéquent a^2b eſt moyenne proportionnelle entre a^3b & abb ; de même je multiplie le ſecond terme a^2b par le quatriéme b^3, & le produit eſt a^2b^4 dont la racine quarrée eſt abb, & par conſéquent abb eſt moyenne proportionnelle entre a^2b & b^3, & les quatre termes a^3, a^2b, abb, b^3 ſont en proportion continuë.

Pour trouver trois moyennes proportionnelles entre deux quatriémes puiſſances a^4, b^4, je multiplie leurs racines a, b, par le cube de la premiere, & les produits a^4, a^3b, ſont encore en même raiſon, je multiplie les mêmes racines par aab, & les produits a^3b, $aabb$, ſont en même raiſon ; je les multiplie encore par abb, & les produits $aabb$, ab^3, ſont en même raiſon ; enfin je les multiplie par b^3, & les produits ab^3, b^4, ſont en même raiſon ; donc j'ai la proportion continuë $a^4.\ a^3b :: a^3b.\ aabb :: aabb.\ ab^3 :: ab^3.\ b^4$, & on trouvera de même qu'entre deux cinquiémes puiſſances parfaites il y a quatre moyennes proportionnelles, &c.

Si l'on éleve un binome $a+b$ à ſes puiſſances, & qu'on néglige les coefficiens numériques, on trouvera que les termes compris entre la plus haute puiſſance de a & la plus haute puiſſance de b, ſont les moyennes géométriques dont nous venons de parler.

Des Regles que les Arithméticiens nomment Regles de cinq, de ſept, de neuf, &c.

333. Lorſque dans une queſtion propoſée qui contient cinq grandeurs connuës on en cherche une ſixiéme, & que les cinq peuvent ſe réduire à trois, de façon que par une regle de Trois on puiſſe trouver la ſixiéme, les Arithméticiens diſent que cette regle eſt une regle de cinq. De même ils diſent que la regle eſt

une regle de ſept, lorſqu'une queſtion contient ſept termes connus leſquels peuvent ſe réduire à trois, par le moyen deſquels on trouve le huitiéme terme cherché, & ainſi des autres; or les pratiques qu'ils enſeignent ſont fondées ſur les principes des raiſons compoſées, comme on va voir dans l'Exemple ſuivant.

EXEMPLE. *Deux hommes en trois jours ont fait 24 toiſes d'ouvrage, quatre hommes en 9 jours combien en feront-ils?*

Pour réſoudre cette queſtion les Arithméticiens diſent qu'il faut multiplier les deux premiers termes 2 & 3 l'un par l'autre, ce qui fait 6; multiplier enſuite le quatriéme & le cinquiéme l'un par l'autre, ce qui fait 36, enfin faire une regle de Trois dont le premier terme ſoit le produit 6, le ſecond le nombre 24 de toiſes, & le troiſiéme le produit 36. De ſorte que la regle étant faite le quatriéme terme 144 ſera le nombre de toiſes que quatre hommes feroient en neuf jours.

6. 24 :: 36. *réponſe* 144

36.

144

72

864

La proportion ſelon les Arithméticiens eſt donc 6. 24:: 36. 144, ou bien en alternant 6. 36:: 24. 144, c'eſt-à-dire que le produit 6 du nombre 2 d'hommes multiplié par le nombre 3 de leurs jours eſt au produit 36 du nombre d'hommes 4 multiplié par leurs jours 9 comme les 24 toiſes faites par deux hommes en 3 jours ſont à 144 toiſes que feront 4 hommes en 9 jours.

6

864 (144

26

24

Or pour rendre raiſon de ceci, il ſuffit de faire obſerver que le nombre 24 de toiſes doit être au nombre 144 de toiſes, non-ſeulement dans la raiſon du nombre 2 d'hommes au nombre 4 d'hommes, mais encore dans la raiſon du nombre 3 de jours au nombre 9 de jours, & par conſéquent 24 doit être à 144 en raiſon compoſée des nombres d'hommes 2, 4, & des nombres de jours 3, 9; or la raiſon compoſée de ces deux raiſons eſt 2×3, 4×9, ou 6, 36, & les termes de cette raiſon ſont les produits des nombres d'hommes par leurs jours; donc, &c.

On ſera encore plus convaincu de ceci ſi l'on fait attention que deux hommes en trois jours ſont autant de travail que 2 fois 3 hommes ou 6 hommes en un jour, & que 4 hommes en 9 jours ſont autant de travail que 4 fois 9 hommes ou 36 hommes en un jour, & qu'ainſi la queſtion propoſée eſt la même que ſi

on disoit : 6 hommes ont fait 24 toises, combien 36 hommes en feront-ils ? ce qui est une regle de Trois ordinaire.

On juge aisément par-là de quelle façon on peut réduire à trois termes, les questions de 7, de 9, de 11, &c. c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

CHAPITRE X.

Des Incommensurables.

334. SI le rapport de deux grandeurs peut s'exprimer en nombres, ces deux grandeurs sont dites *commensurables entr'elles*, parce qu'on pourra trouver un nombre qui les mesurera. Le rapport de 4 à 2 est 2, ces deux grandeurs sont donc commensurables ; car 2 se mesure lui-même, & il mesure aussi 4, puisqu'il y est contenu deux fois ; de même le rapport de 5 à 3 est commensurable, car l'unité les mesure tous les deux, étant contenuë cinq fois dans 5, & trois fois dans 3, &c.

335. Si le rapport de deux grandeurs ne peut pas s'exprimer en nombres, ces deux grandeurs sont dites *incommensurables entr'elles* ; ainsi 2 & $\surd 3$ sont incommensurables, parce qu'on ne sçauroit exprimer ce que 2 est à $\surd 3$, &c.

336. Si deux grandeurs incommensurables entr'elles deviennent commensurables en les élevant au quarré, on dit que ces deux grandeurs sont *incommensurables entr'elles, & commensurables en puissance*. 2 & $\surd 3$ sont commensurables en puissance, parce que leurs quarrés sont entr'eux comme deux nombres, & si ces grandeurs ne sont commensurables que lorsqu'on les éleve au cube, on dit qu'elles sont incommensurables entr'elles, & en puissance, & commensurables en troisiéme puissance, &c.

337. THEOREME. *Si l'expositeur ou l'exposant d'une raison doublée n'est pas un quarré, ou si celui d'une raison triplée n'est pas un cube, les termes des raisons simples dont ces raisons sont doublées ou triplées, seront incommensurables entr'eux ; mais si l'expositeur ou l'exposant d'une raison est un nombre quarré, ou un nombre cube, &c. les termes de la raison seront entr'eux comme deux quarrés, ou comme deux cubes.*

Le premier cas est facile après ce qui a été dit ci-devant ; & pour le second, soit la raison 2, 8, dont l'expositeur $\frac{1}{4}$, ou l'exposant 4 sont des nombres quarrés, or l'un & l'autre font voir que 2 est le quart de 8 ; ainsi 2. 8 :: 1. 4, mais 1 & 4 sont des nombres quarrés ;

donc les termes 2 & 8 ſont entr'eux comme des nombres quarrés.

De même ſoit la raiſon 16, 54 dont l'expoſiteur $\frac{16}{54}$, lequel réduit aux moindres termes eſt $\frac{8}{27}$, & l'expoſant $\frac{54}{16}$, ou $\frac{27}{8}$ ſont des nombres cubes, puiſque la racine cubique de 8 eſt 2, & celle de 27 eſt 3 ; or l'un & l'autre nous font voir que 16. 54 :: 8. 27, & par conſéquent 16 & 54 ſont entreux comme des nombres cubes, & ainſi des autres.

338. THEOREME. *Dans toute progreſſion géométrique aſcendante ou deſcendante, le premier terme eſt commenſurable au ſecond ſi l'expoſiteur de la raiſon du premier au troiſiéme eſt un quarré, ou ſi celui de la raiſon du premier au quatriéme eſt un nombre cube ; ou ſi celui du premier au cinquiéme eſt la quatriéme puiſſance d'un nombre, &c.*

Soit la proportion géométrique :: a, b, c, d, e, f, &c. la raiſon du premier terme a au troiſiéme c, eſt compoſée de la raiſon a, b, & de la raiſon b, c, (*N.* 325.) ; or ces deux compoſantes ſont égales, puiſqu'il y a progreſſion ; donc la raiſon du premier au troiſiéme eſt doublée de la raiſon a, b, (*N.* 318.) & par conſéquent ſon expoſiteur eſt le quarré de l'expoſiteur de la raiſon a, b, mais on ſuppoſe que cet expoſiteur eſt un nombre quarré, donc on pourra tirer ſa racine pour avoir l'expoſiteur de la compoſante a, b, & connoître par-là le rapport du premier terme a au ſecond terme b.

De même la raiſon du premier terme a au quatriéme d, eſt compoſée des trois raiſons égales a, b ; b, c ; c, d, & par conſéquent elle eſt triplée de la raiſon a, b ; or l'expoſiteur d'une raiſon triplée eſt le cube de l'expoſiteur de l'une des compoſantes ; donc tirant la racine cubique de l'expoſiteur de la raiſon a, d, lequel eſt un nombre cube par la ſuppoſition, cette racine ſera l'expoſiteur de la raiſon a, b, & fera voir la raiſon du premier au ſecond, & ainſi des autres.

339. THEOREME. *Dans toute progreſſion géométrique le premier terme & le ſecond ſont incommenſurables entr'eux & commenſurables en puiſſance, ſi l'expoſiteur de la raiſon du premier au troiſiéme n'eſt pas un nombre quarré, & ils ſont incommenſurables entr'eux & en puiſſance, ſi l'expoſiteur du premier au troiſiéme n'eſt pas un nombre qu'on puiſſe exprimer.*

Soit la progreſſion :: a, b, c, d, e, &c. l'expoſiteur du premier terme a au troiſiéme c n'étant pas un nombre quarré par la ſuppoſition, on ne pourra en extraire la racine ; or l'expoſiteur du premier terme au ſecond eſt égal à cette racine ; donc puiſ-

que cet expoſiteur ne pourra pas s'exprimer en nombre, les termes a, b, ſeront incommenſurables, mais les quarrés de ces termes ſeront commenſurablees ; car ces quarrés étant en raiſon doublée de la raiſon a, b, ſeront en même raiſon que les termes a, c, qui ſont auſſi en raiſon doublée de la raiſon a, b; donc l'expoſiteur de ces quarrés ſera le même que l'expoſiteur des termes a, c, & comme on ſuppoſe que cet expoſiteur eſt un nombre, on pourra donc connoître la raiſon des quarrés.

Que ſi on ſuppoſe que l'expoſiteur de la raiſon a, c, ne puiſſe pas s'exprimer en nombre, alors la raiſon des quarrés de la raiſon a, b, ne pourra s'exprimer non plus, puiſque leur expoſiteur étant le même que celui de la raiſon a, c, ne pourra pas nous faire connoître leurs rapports; ainſi les deux premiers termes a, b, ſeront incommenſurables entr'eux & en puiſſance.

340. THEOREME. *Dans toute progreſſion géométrique, le premier terme & le ſecond ſeront incommenſurables entr'eux, & commenſurables en troiſiéme puiſſance, ſi l'expoſiteur du premier terme au quatriéme eſt un nombre qui ne ſoit pas cube, & ils ſeront incommenſurables entr'eux & en troiſiéme puiſſance ſi l'expoſiteur du premier au quatrième eſt une quantité qu'on ne peut exprimer.*

La raiſon du premier au quatriéme eſt triplée de la raiſon du premier au ſecond, & par conſéquent ſon expoſiteur eſt le cube de l'expoſiteur du premier au ſecond ; donc puiſqu'on ſuppoſe que cet expoſiteur n'eſt pas un cube dont on puiſſe extraire la racine, on ne pourra non plus trouver l'expoſiteur des deux premiers termes ; mais les cubes de ces termes ſeront commenſurables, puiſque ces cubes étant en raiſon triplée de leurs racines ſeront entr'eux comme le premier & le quatriéme terme qui ſont commenſurables à cauſe que leur expoſiteur eſt un nombre ; que ſi cet expoſiteur n'étoit pas un nombre, il eſt clair que celui des cubes des deux premiers termes ne le ſeroit pas non plus, & que par conſéquent les deux premiers termes ſeroient incommenſurables entr'eux & en troiſiéme puiſſance.

On trouvera par un ſemblable raiſonnement que ſi l'expoſiteur du premier terme au cinquiéme eſt un nombre qui ne ſoit pas une quatriéme puiſſance, le premier & le ſecond terme ſont incommenſurables entr'eux, & commenſurables en quatriéme puiſſance, & que ſi cet expoſiteur n'eſt pas un nombre, le premier & le quatriéme ſont incommenſurables en quatriéme puiſſance, & ainſi des autres.

342.

342. Et il faut obſetver que ſi l'expoſiteur du premier au quatriéme n'eſt pas un nombre cube, non-ſeulement le ſecond terme eſt un radical, mais encore le troiſiéme. Soit par exemple le premier & le quatriéme terme 1. 6. je nomme les deux moyens x. y, & j'ai :: 1. x. y. 6, & par conſéquent 1. x^3 :: 1. 6. (*N.* 330.) d'où je tite $x^3 = 6$, & $x = \sqrt[3]{6}$; ainſi le ſecond terme eſt $\sqrt[3]{6}$; or ſi je veux ttouver le troiſiéme, je dis : 1. $\sqrt[3]{6}$ :: $\sqrt[3]{6}$. $\sqrt[3]{36}$, & ce troiſiéme eſt la grandeur incommenſurable $\sqrt[3]{36}$.

De même ſi l'expoſiteur du premier au cinquiéme n'eſt pas un nombre qui ſoit une quatriéme puiſſance, les trois termes qui ſont entre le premier & le cinquiéme ſont des grandeurs radicales. Car ſoient le premiet & le cinquiéme terme 2. 8, je nomme les trois moyens x, y, z, & j'ai :: 2. x. y. z. 8 ; & pat conſéquent 16. x^4 :: 2. 8. (*N.* 330.) ; d'où je tire $x^4 = \frac{16 \times 8}{2}$, & $x = \sqrt[4]{64}$; ainſi le ſecond terme eſt $\sqrt[4]{64}$, or pour trouver le troiſiéme je fais 2. $\sqrt[4]{64}$ :: $\sqrt[4]{64}$. $\frac{\sqrt[4]{64 \times 64}}{2}$, & le troiſiéme tetme eſt $\frac{\sqrt[4]{64 \times 64}}{2}$. & pour trouver le quatriéme tetme je fais 2. $\sqrt[4]{64}$ :: $\frac{\sqrt[4]{64 \times 64}}{2}$. $\frac{\sqrt[4]{64 \times 64 \times 64}}{4}$, & ce quatriéme terme eſt incommenſurable de même que les précédens.

On prouveroit de la même façon que ſi l'expoſiteur du premier au ſixiéme terme n'eſt pas un nombre qui ſoit une cinquiéme puiſſance, les termes compris enrre le premier & le ſixiéme ſeront incommenſurables.

343. Il ſuir de tout ce que nous venons de dire qu'on ne peut trouver une moyenne proportionnelle exprimable en nombre entre deux grandeurs, que lorſque l'expoſiteur de ces grandeurs eſt un quarré ; qu'on ne peut trouver deux moyennes proportionnelles entre ces mêmes grandeurs que lorſque l'expoſiteur eſt un cube ; qu'on n'en peut ttouver trois que lorſque l'expoſiteur eſt une quatriéme puiſſance, &c. cependant toutes ces moyennes proportionnelles que nous ne ſçaurions exprimer en nombres, s'expriment aiſément en lignes pat les regles de la Géométrie, comme on verra dans la ſuite.

CHAPITRE XI.

Des Logarithmes.

344. SI l'on prend une progreſſion géometrique infinie en montant & en deſcendant $\frac{1}{2^\infty}$, &c. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32, &c. 2^∞, & que ſous les termes 1. 2. 4, &c. qui vont en montant, on mette les termes poſitifs 0. 1. 2. 3, &c. d'une progreſſion atithmétique aſcendante, & que ſous les termes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$, &c. de la progreſſion géométrique on mette les termes négatifs —1, —2, —3, &c. de la progreſſion arithmétique, chaque terme de la progreſſion arithmétique ſe nommera le *Logarithme* du terme de la progreſſion géométrique ſous lequel il ſe trouvera écrit; or les deux progreſſions ſeront les ſuivantes.

$\frac{1}{2^\infty}$, &c. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32, &c. 2^∞.

— ∞, &c. —5.—4.—3.—2.—1. 0. 1. 2. 3. 4. 5, &c. ∞.

345. J'ai fait obſerver (*N.* 316.) que la ſuite infinie des puiſſances négatives & poſitives d'une grandeur a qui ſont $a^{-\infty}$, &c. a^{-6}. a^{-5}. a^{-4}. a^{-3}. a^{-2}. a^{-1}. a^0. a^1. a^2. a^3. a^4, &c. a^∞, ſont en progreſſion géométrique, ainſi faiſant $a=2$, cette ſuite de puiſſances littérales ſera la même que la progreſſion géométrique ci-deſſus; car a^0 eſt égal à 1 (*N.* 159.), & les puiſſances négatives a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c. ſont les mêmes que celles-ci $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, & les expoſans des puiſſances littérales ſeront les mêmes que les termes de la progreſſion arithmétique que nous avons mis ſous ceux de la progreſſion géométrique.

346. Il ſuit delà que les logarithmes de la progreſſion géométrique auront les mêmes proptietés que les expoſans des puiſſances de a; ainſi 1°. ſi je veux multiplier le terme 2 de la progreſſion géométrique par le terme 8, je n'ai qu'à ajouter enſemble les logarithmes 1, 3, de ces deux termes, & la ſomme 4 ſera le logarithme du produit cherché (*N.* 154.); or le terme de la progreſſion géométrique écrit au-deſſus du logarithme 4 eſt 16; donc 16 eſt le produit de 2 par 8. 2°. Pour diviſer le terme 16 de la progreſſion géométrique par le terme 2, je prens les logarithmes 4. 1. de ces termes, & retranchant le ſecond du premier le reſte 3 eſt le logarithme du quotient cherché (*N.* 155.)

ainſi le terme 8 écrit ſur le logarithme 3 eſt le quotient de 16 diviſé par 2. 3°. Pour élever le terme 2 de la progreſſion géométrique à ſa quatriéme puiſſance, je multiplie le logarithme 1 du terme 2 par l'expoſant 4 de la quatriéme puiſſance de 2 (*N.* 156.); ainſi le terme 16 écrit au-deſſus du logarithme 4 eſt la quatriéme puiſſance cherchée. 4°. Pour extraire la racine cubique de 8 je prens ſon logarithme 3, & le diviſant par l'expoſant 3 de la racine cubique, le quotient 1 eſt le logarithme de la racine cubique de 8 (*N.* 157.), & par conſéquent le terme écrit au-deſſus de ce logarithme eſt la racine cherché; d'où l'on voit que ce qu'il faudroit faire par la multiplication & la diviſion, en opérant ſur les termes de la progreſſion géométrique, on le fait par l'addition & la ſouſtraction, & ce qu'il faudroit faire par l'élévation des puiſſances ou l'extraction des racines, on le fait par la multiplication & la diviſion; or comme l'addition & la ſouſtraction ſont moins difficiles que la multiplication & la diviſion, & que la multiplication & la diviſion ſont moins difficiles que l'élévation des puiſſances & l'extraction des racines, il eſt viſible que les logarithmes épargnent bien du travail, ſurtout lorſqu'il s'agit de grands calculs, & de l'extraction des racines ſecondes, troiſiémes, quatriémes, &c.

347. Il faut bien obſerver que les logarithmes des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ſont les mêmes que les logarithmes de leurs dénominateurs 2, 4, 8, &c. à l'exception qu'ils ſont négatifs.

348. Comme il ſe trouve entre les termes d'une progreſſion géométrique beaucoup de nombres qui ne ſont point en progreſſion, & qui par conſéquent n'ont point de logarithmes, l'utilité que l'on tire des logarithmes ſe trouveroit bornée, mais on y a pourvû en cherchant les logarithmes des nombres naturels 1. 2. 3. 4, &c. en cette ſorte.

On a pris la progreſſion géométrique décimale :: 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. & comme pour trouver les logarithmes des nombres entre 1 & 10, il a fallu extraire des racines ainſi que nous allons dire, ce qui n'auroit pas manqué de donner des reſtes après l'extraction, on a augmenté tous les termes de leur progreſſion, & leurs logarithmes auſſi de pluſieurs zeros, comme par exemple de 7, & la progreſſion eſt devenuë par conſéquent 1.0000000, 10.0000000, &c. & leurs logarithmes 0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, &c. en mettant un point devant ces zeros pour diſtinguer les logarithmes d'avec les zeros ajoutés,

& l'on a nommé *caractériſtique* le caractere qui ſe trouve devant ce point ; ainſi dans le logarithme 1.0000000 le caractere 1 ſe nomme le *caractériſtique*, &c. après cette préparation on a cherché le logarithme de 9, ou de 9.0000000 en prenant une moyenne proportionelle géométrique entre les deux termes 1 & 10 de la progreſſion géométrique augmentés de leurs zeros, & en même tems on a pris une moyenne arithmétique entre leurs logarithmes auſſi augmentés de leurs zeros, & cette moyenne arithmétique a été le logarithme de la moyenne géométrique, mais comme la moyenne géométrique s'eſt trouvée moindre que 9 ou 9.0000000, on a cherché une autre moyenne géométrique entr'elle & le terme 10 ou 10.0000000, & en même tems une moyenne arithmétique entre le logarithme de la premiere moyenne géométrique, & le logarithme de 10. ou 10.0000000 & comme cette ſeconde moyenne géométrique s'eſt trouvée encore au-deſſous de 9, ou 9.0000000, on a cherché une autre moyenne géométrique entr'elle & le nombre 10, & une autre moyenne arithmétique entre ſon logarithme & celui de 10, & lorſqu'en continuant de la même façon on a trouvé une moyenne géométrique entre 9 & 10, on en a pris une autre entre celle-ci & celle qui eſt plus proche de 9, juſqu'à ce qu'on ait trouvé une moyenne géométrique égale à 9, & ſon logarithme.

Le logarithme de 9 étant trouvé, celui de ſa racine 3 s'eſt trouvé aiſément de même que celui des puiſſances de 3 par les regles données ci-deſſus, mais il a fallu chercher de la même façon les logarithmes des autres nombres entre 1 & 10, & ceux des nombres entre 10 & 100, &c. ce qui certainement a été un travail très penible dont on doit avoir bien des obligations à l'égard de ceux qui ont eu le courage de l'entreprendre.

Tous les logarithmes des nombres 1. 2. 3. 4. 5, &c. étant trouvés, on a rangé ces nombres en colonnes les uns ſous les autres, & leurs logarithmes à côté, & c'eſt ce qu'on appelle la Table des logarithmes, laquelle s'étend depuis le logarithme de 1 juſqu'à celui de 10000 dans les Tables de M. Ozanam qui ſont les plus commodes, & par-là il eſt aiſé de connoître les logarithmes des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. juſqu'à $\frac{1}{10000}$, mais comme il y a des nombres au-delà de 10000, & qu'outre cela il y a des nombres entiers entre 1 & 10000 qui ſont compoſés d'entiers & de fractions, & dont les logarithmes ne ſont pas dans les tables, la queſtion eſt de trouver leurs logarithmes de même que

ceux des fractions dont le numérateur eſt plus grand que l'unité, & c'eſt ce que nous allons voir dans les problêmes ſuivans, où nous enſeignerons auſſi à trouver à quel nombre appartient un logarithme qui ne ſe trouve point dans les Tables.

349. *Trouver le logarithme du nombre* 9477856.

Ce nombre étant plus grand que 10000, j'en retranche quelques caracteres à gauche, juſqu'à ce que les reſtans ſe trouvent dans les Tables, & le moins qu'on peut en retrancher eſt le mieux, parce que les caracteres reſtans ſe trouvent plus près de la fin des Tables, ce qui fait que la méthode dont nous allons nous ſervir devient de la derniere exactitude, quoiqu'elle ne ſoit pas abſolument géométrique. J'en retranche donc les trois derniers & les reſtans ſont 9477 qui ſe trouvent dans les Tables; mais comme en retranchant 856 le reſte eſt 9477000, c'eſt-à-dire 9477 multiplié par 1000, je prens dans la Table le logarithme 3.9766709 de 9477, & j'y ajoute le logarithme 3.0000000 de 1000, & la ſomme 6.9766709 eſt le logarithme du nombre 9477000, (*N.* 346.) or le nombre propoſé 9477856 eſt plus grand que 9477000, & moindre que 9478000; car il ne ſurpaſſe 9477000 que de 856, au lieu que 9478000 le ſurpaſſe de 1000; c'eſt pourquoi je prens dans la table le logarithme 3.9767167 du nombre 9478, & lui ajoutant le logarithme 3.0000000 de 1000 la ſomme 6.9767167 eſt le logarithme de 9478000, ainſi les logarithmes des nombres 9477000, & 9478000, dont la différence eſt 1000 ſont 6.9766709, & 6.9767167, & la différence de ces deux logarithmes eſt 458. Je dis donc ſi la différence 1000 des nombres 9477000, & 9478000 donne 458 pour la différence de leurs logarithmes, la différence 856 des nombres 9477000, & 9477856 que donnera-t'elle pour la différence de leur logarithme? & faiſant la regle de Trois, je trouve 1000. 458 :: 856. 392, ainſi la différence cherchée eſt 392 avec un reſte que je néglige, parce que les logarithmes étant fort grands leur dernier caractere à droite peut être plus grand ou moindre ſans altérer aucunement leur valeur; bien plus on pourroit retrancher de tous les logarithmes deux caracteres à droite ſans craindre qu'il y eut de l'erreur, ce que l'on concevra aiſément ſi l'on ſe rappelle que chaque logarithme ayant été augmenté de ſept zeros, on a fait la même choſe que ſi on avoit réduit tous les logarithmes en fractions dont le dénominateur fût 10000000, & que par conſéquent il eſt clair que les deux derniers caracteres à droite d'un logarithme

étant extrêmement petits, eu égard à ce dénominateur, peuvent être négligés.

Ayant donc trouvé que la différence des logarithmes des nom- 9477000, & 9477856 eſt 392, j'ajoute 392 au logarithme de 9477000, & la ſomme 6.9767101 eſt le logarithme du nombre propoſé 9477856.

350. *Trouver le logarithme de la fraction* $\frac{2}{3}$.

La fraction $\frac{2}{3}$ eſt la même choſe que le nombre 2 diviſé par 3, c'eſt pourquoi je prens le logarithme 0.3010300 du nombre 2, & le logarithme 0.4771212 du nombre 3; je retranche ce dernier du premier, & le reſte —0.1760912 eſt le logarithme de $\frac{2}{3}$ (*N.* 346.), & ce logarithme eſt négatif; car ſi d'une grandeur on retranche une autre grandeur plus grande qu'elle, le reſte eſt négatif. Ces ſortes de ſouſtractions ſe ſont en retranchant la moindre quantité de la plus grande, & écrivant le reſte avec le ſigne —.

351. PROBLEME. *Trouver le logarithme du nombre* $7\frac{1}{2}$.

Je réduis $7\frac{1}{2}$ en fraction, ce qui fait $\frac{15}{2}$; or cette fraction eſt la même choſe que le nombre 15 diviſé par 2, c'eſt pourquoi je prens le logarithme 1.1760913 du nombre 15, & le logarithme 0.3010306 du nombre 2, & retranchant celui-ci du premier, le reſte 0.8750613 eſt le logarithme de la fraction $\frac{15}{2}$ (*N.* 346.)

Si après avoir réduit l'entier & fraction en fraction on trouvoit que le numerateur fut plus grand que 10000, on chercheroit le logarithme de ce numerateur comme il a été enſeigné ci-deſſus (*N.* 349.) & retranchant de ce logarithme le logarithme du numérateur, le reſte ſeroit le logarithme du nombre propoſé.

352. PROBLEME. *Trouver à quel nombre appartient un logarithme donné.*

Je cherche ce logarithme dans les tables, & ſi je le trouve, le nombre écrit à ſon côté ſera celui à qui il appartient.

Mais ſi le logarithme ne ſe trouve pas dans les tables comme par exemple le logarithme 3.0441367, je cherche dans les tables les logarithmes entre leſquels ce nombre ſe trouve, & ces logarithmes ſont 3.0437551, & 3.0441476 dont le premier appartient au nombre 1106, & le ſecond au nombre 1107 qui ne différent que de l'unité, & par conſéquent le logarithme propoſé doit appartenir à un nombre plus grand que 1106, & moindre que 1107, ce qui ne ſçauroit être à moins que ce nombre ne ſoit compoſé d'entier & de fraction. Je prens la différence 3925

des logarithmes des deux nombres, & la différence 3816 du moindre de ces logarithmes au logarithme proposé 3.0441367. Je fais la différence 1 des deux nombres 1106, & 1107 égale à $\frac{100}{100}$, pour rendre plus juste l'opération que je vais faire, & je dis si la différence 3925 des logarithmes 3.0437551, & 3.0441476 donne $\frac{100}{100}$ pour la différence des nombres auxquels ils appartiennent, la différence 3916 des logarithmes 3.0441367, & 3.0437451, que donnera-t'elle pour la différence de leurs nombres & faisant la regle de Trois, je trouve 3925. $\frac{100}{100}$: 3916. $\frac{97}{100}$, & par conséquent $\frac{97}{100}$ est à fort peu de chose près la différence du nombre 1107 au nombre qui appartient au logarithme proposé. Ajoutant donc $\frac{97}{100}$ à 1107, la somme 1107 $\frac{97}{100}$ est le nombre auquel appartient le logarithme 3.0441367.

Si le logarithme proposé est 4.2507127, lequel est plus grand que le plus grand logarithme des Tables, j'en retranche le moindre logarithme qui puisse en être retranché pour faire en sorte que le reste se trouve dans les Tables près de la fin ; ainsi j'en retranche le logarithme 0.3010300 qui appartient au nombre 2, & le reste est 3.9496827, je cherche ce logarithme dans les Tables, & trouvant qu'il appartient au nombre 8906, je multiplie ce nombre par 2, & le produit 17812 est le nombre qui appartient au logarithme proposé 4.2507127 (*N.* 346.) car pour avoir ce logarithme il faut ajouter au logarithme 3.9496827 le logarithme de 2 que nous avons retranché du logarithme proposé.

Enfin soit le logarithme proposé 4.1712876, j'en retranche le logarithme 0.3010300 du nombre 2, & le reste est 3.8702576; or ce logarithme ne se trouve point dans les Tables, & je vois qu'il est entre les logarithmes 3.8702283, & 3.8702868 dont le premier appartient au nombre 7417, & le second au nombre 7418 dont la différence est 1 que je fais égale à $\frac{100}{100}$. La différence des logarithmes de ces deux nombres est 585, & la différence du moindre de ces logarithmes au logarithme 3.8702576 est 293. Je dis donc : si la différence 585 des logarithmes 3.8702283, & 3.8702868 donne $\frac{100}{100}$ pour la différence des nombres auxquels ils appartiennent, la différence 293 des logarithmes 38702283, & 38702576 que donnera-t'elle pour la différence de leurs nombres? & faisant la regle je trouve 585. $\frac{100}{100}$ :: 293. $\frac{50}{100}$, ainsi $\frac{50}{100}$ ou une moitié est la différence du nombre 7417 au nombre qui appartient au logarithme 3.8702576, & par conséquent ce nombre est 7417 $\frac{1}{2}$, mais pour avoir le logarithme

proposé 41712876, il faut ajouter au logarithme 3.8702576 le logarithme de 2 que nous avons retranché au proposé, donc il faut multiplier le nombre 7417 ½ par 2 (*N.* 346.) & le produit 14835 sera le nombre qui appartient au logarithme 41712876.

353. Je pourrois proposer ici plusieurs questions dont la solution feroit voir l'utilité des logarithmes, mais pour abreger je me contenterai de rapporter les deux suivantes.

354. PROBLEME. *Le premier & le second terme d'une progression géométrique, & le nombre des termes étant donnés, trouver le dernier terme.*

Soient les deux premiers termes 1 & 2, & le nombre des termes 14 ; l'exposant de la progression sera donc 2, & le nombre des termes diminué de l'unité est 13 ; or le dernier terme est égal au premier multiplié par l'exposant élevé à un dégré égal au nombre des termes moins un (*N.* 309.) ; donc le dernier terme est égal à 1 multiplié par la treiziéme puissance de 2 ; mais comme il seroit trop long de chercher la treiziéme puissance de 2 ; je prens le logarithme 0.3010300 de 2, & le multipliant par 13, le produit 3.9133900 est le logarithme de la treiziéme puissance de 2, or ce logarithme n'est pas dans les Tables, mais j'en trouve un qui est 5.9133899 qui ne differe que d'une unité, & qui par conséquent est le même ; ainsi le nombre 8192 à qui ce logarithme appartient est la treiziéme puissance de 2, & cette puissance multipliée par le premier terme 1 donne le dernier terme cherché 8192.

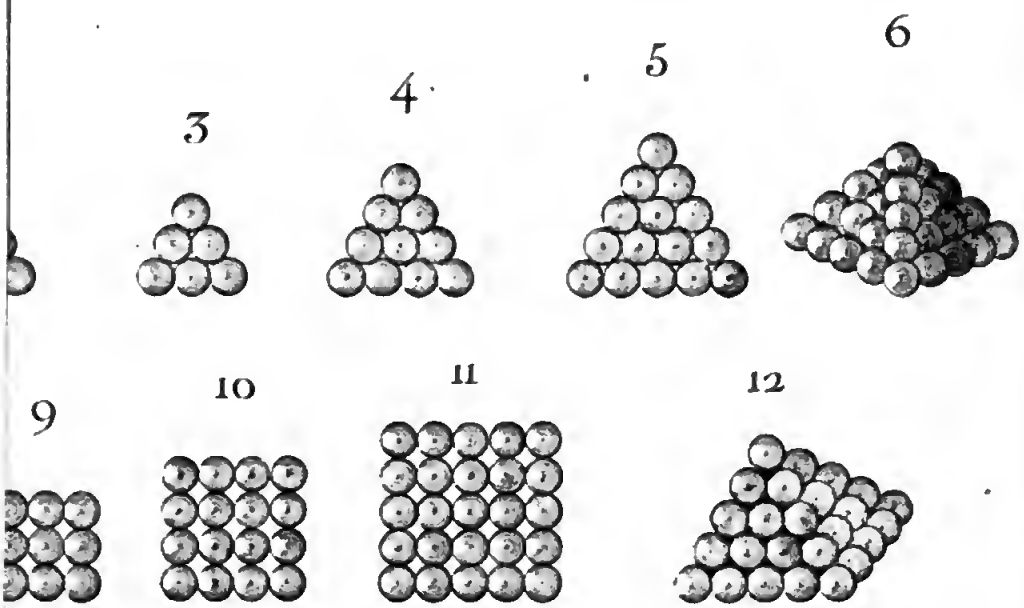
355. PROBLEME. *Le premier terme, le second & le dernier d'une progression géométrique étant donnés, trouver le nombre des termes.*

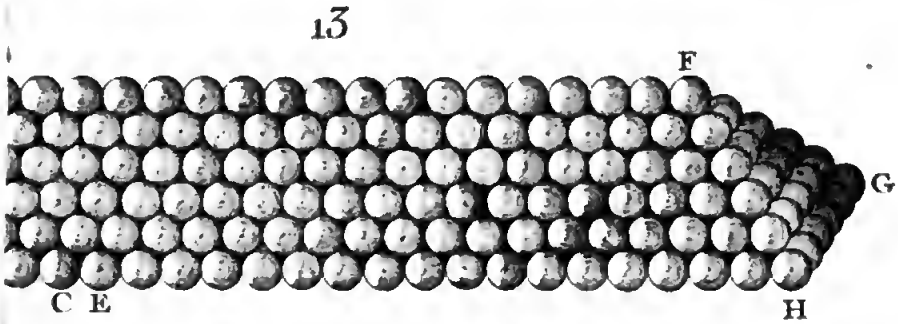
Dans toute progression géométrique, le premier & le troisiéme terme sont entr'eux comme les quarrés des deux premiers, le premier & le quatriéme sont entr'eux comme les cubes des deux premiers, le premier & le cinquiéme sont entr'eux comme les quatriémes puissances des deux premiers, &c. (*N.* 327.) d'où il suit que le premier est au dernier comme le premier élevé à une puissance dont l'exposant est égal au nombre des termes moins un, est au second élevé à la même puissance. Cela posé.

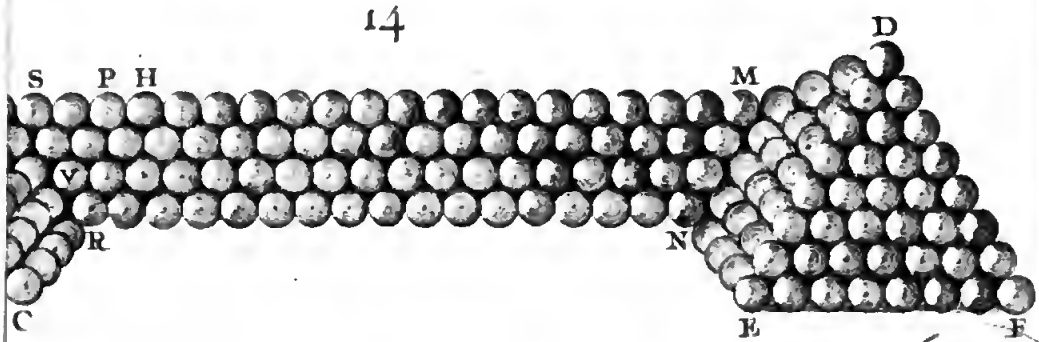
Soient les deux premiers termes 1, 2, & le dernier 8192, je nomme le premier terme a, le second b, le dernier c, & le nombre des termes moins un x donc $a^x . b^x :: a . c$.

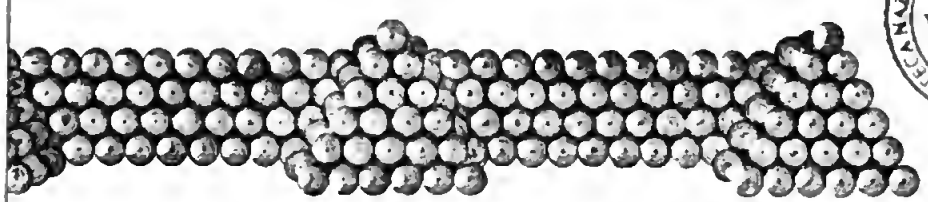
Je nomme la le logarithme de a, lb le logarithme de b, & lc le logarithme de c ; donc le logarithme de a^x, c'est-à-dire le

logarithme









NAPOLI

N.° I

logarithme de a élévé à la puiſſance x eſt $x\,la$; car quand on éleve une grandeur à une puiſſance, on multiplie ſon logarithme par l'expoſant de cette puiſſance (*N.* 346.) par la même raiſon le logarithme de b^x eſt $x\,lb$; ainſi les logarithmes de la proportion géométrique $a^x . b^x :: a . c$, ſont $x\,la . x\,lb . la . lc$, & ces quatre logarithmes ſont en proportion arithmétique, puiſque les grandeurs dont ils ſont les logarithmes ſont en proportion géométrique. Faiſant donc la ſomme des extrêmes & la ſomme des moyens, j'ai $x\,la + lc = x\,lb + la$, & faiſant paſſer $x\,la$ du premier membre dans le ſecond, & la du ſecond dans le premier, j'ai $lc - la = x\,lb - x\,la$, & diviſant tout par $lb - la$, je trouve $x = \frac{lc - la}{lb - la}$, ce qui me fait voir que le nombre des termes diminué de l'unité, eſt égale à la différence du logarithme du dernier au logarithme du premier, diviſée par la différence du logarithme du ſecond terme au logarithme du premier.

Je prens donc le logarithme du dernier terme 8192, lequel eſt 3.9133899, ou 3.9133900, ce qui n'altere point ce logarithme comme on a vû dans le problême précédent, & en retranchant le logarithme du premier terme qui n'eſt compoſé que de zeros, le reſte eſt encore 3.9133900. Je prens de même le logarithme 0.3010300 du ſecond terme 2, duquel retranchant le logarithme du premier, le reſte eſt encore 0.3010300 ; je diviſe 3.9133900 par 0.3010300, & le quotient 13 me fait voir que le nombre des termes moins un eſt 13, & que par conſéquent la progreſſion eſt compoſée de 14 termes.

356. Ce ſeroit ici le lieu de parler des fractions décimales ; mais comme nous n'avons point parlé des toiſes quarrées & cubiques auſquelles on applique quelquefois ce calcul, nous ne traiterons cette matiere que lorſque nous expliquerons le toiſé.

ELEMENS
DES PRINCIPALES PARTIES DES MATHEMATIQUES.

LIVRE SECOND.

Qui contient les Elémens de la Géométrie Théorique & Pratique des Lignes, des Surfaces & des Solides, de la Trigonométrie, des Sections Coniques, du Toisé de la Maçonnerie & des bois, & du Calcul des Fractions décimales.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

1. LA *matiere* ou le *corps*, eſt ce qui a de parties unies les unes aux autres; tout ce que nous voyons des yeux corporels, eſt de cette nature.

2. Le *point* eſt une portion de matiere ſi petite, qu'on peut la conſiderer comme n'ayant point de parties, ou comme *indiviſible*.

3. La *ligne* ou *longueur*, eſt la trace que laiſſeroit un point A (*Fig.* 1.) qui iroit d'un lieu A à un autre lieu B; ou ſi l'on veut, c'eſt une ſuite de points rangés ſur cette trace. Les lieux A, B ſe nomment les *extremités* de la ligne.

4. La ligne étant compoſée de parties peut être diviſée tranſverſalement en autant de parties AC, CD, BD que l'on voudra; (*Fig.* 1.) mais à cauſe que les points qui la compoſent ſont regardés comme indiviſibles, nous devons conſiderer la ligne comme ne pouvant être diviſée ou fenduë de l'extrémité A à l'extrémité B, ainſi que l'on fend un bâton d'un bout à l'autre, & par conſéquent toute ligne AB ne doit point être dite longue que d'une extrémité à l'autre, & nullement de droite à gauche.

5. La *ligne droite* eſt le plus court chemin que prendroit un poit A (*Fig.* 1.) en allant d'un lieu A à un autre lieu B; la ligne *courbe* eſt celle qui n'eſt pas le plus court chemin entre ſes extrémités A, B. (*Fig.* 2.)

6. Par le mot de *plus court chemin*, on entend le chemin que prendroit un homme qui étant en A (*Fig.* 1.) & fixant toujours la vuë vers B, iroit devant lui ſans ſe détourner ni à gauche ni à droite juſqu'à ce qu'il fût arrivé en B.

7. Or, de cette idée du plus court chemin, il s'enſuit clairement qu'il ne ſçauroit y avoir deux plus courts chemins entre deux extrémités A, B. Car un homme qui va de A en B, en fixant toujours ſa vuë ſans ſe détourner ni à gauche ni à droite, ne ſçauroit prendre deux routes différentes, quand il recommenceroit cent fois le voyage de la même façon.

8. *Prolonger* une ligne droite, c'eſt la continuer de façon que ſa continuation ou ſon prolongement, ajoûté à la ligne droite, ne faſſe qu'une ſeule ligne droite.

9. La *diſtance* d'une grandeur matérielle ou corporelle, à une autre grandeur matérielle, eſt le plus court chemin qui ſe trouve entre ces deux grandeurs. Ainſi la diſtance entre les deux points A, B (*Fig.* 1.) eſt la ligne droite AB menée entre ces deux points, &c.

10. La *ſurface* eſt la trace d'une ligne AB (*Fig.* 3.) qui iroit d'une poſition AB à une autre poſition CD, ſoit que cette ligne AB pendant ſon mouvement, ſoit toujours de même grandeur, (*Fig.* 3.) ou qu'elle aille en diminuant, (*Fig.* 4.) ou qu'elle aille en augmentant, (*Fig.* 5.) ou tantôt en augmentant & tantôt en diminuant, (*Fig.* 6.) on peut dire que la ſurface eſt une ſuite de

lignes miſes ſur la trace de la ligne AB, qui iroit de la poſition BA à la poſiton CD.

11. La ſurface a deux longueurs, l'une ſelon la ligne AB, & l'autre ſelon l'éloignement de la ligne AB à la ligne DC; mais parce que toutes les lignes qui comprenent la ſurface, ſont regardées comme ne pouvant ſe diviſer ou ſe fendre d'un bout à l'autre, (*N.* 4.) il eſt viſible qu'une ſurface ABDC doit être regardée comme ne pouvant ſe fendre d'une extrémité AB à l'autre extrémité CD, ainſi qu'on fendroit une planche ABDC qui auroit de l'épaiſſeur : donc la ſurface ne doit point être dite avoir de la longueur dans ce ſens; c'eſt-à-dire de l'épaiſſeur, comme on dit ordinairement à l'égard d'une planche.

12. Des deux longueurs de la ſurface, l'une garde le nom de *longueur*, & l'autre ſe nomme *largeur*. Suppoſé donc que les deux lignes AB, AC (*Fig.* 3.) ſoient les deux longueurs de la ſurface ABDC, & qu'on nomme *longueur* la ligne AB, la *largeur* ſera la ligne AC; que ſi l'on nomme *longueur* la ligne AC; car cela eſt indifférent, la ligne AB ſera la longueur. Quelquefois la longueur ſe nomme *baſe*, & la largeur ſe nomme *hauteur*.

13. La ſurface *plane*, eſt celle dont toutes les parties ne hauſſent ni ne baiſſent pas plus les unes que les autres; telle eſt la ſurface d'un miroir ordinaire, celle d'une table bien unie, &c. & la ſurface *courbe* eſt celle dont toutes les parties ne ſont pas diſpoſées comme il vient d'être dit; telle eſt la ſurface d'une colonne, d'un pain de ſucre, &c.

14. Le *corps* ou ſolide, eſt la trace d'une ſurface ABCD (*Fig.* 7.) qui iroit d'une poſition ou d'un lieu ABCD, à une autre poſition ou un lieu EFGH; ſoit que cette ſurface ABCD, pendant ſon mouvement, ſoit toujours de la même grandeur, (*Fig.* 7.) ou qu'elle aille en diminuant, (*Fig.* 8.) ou qu'elle aille en augmentant, (*Fig.* 9.) ou tantôt en diminuant & tantôt en augmentant. (*Fig.* 10.) On peut dire que le corps eſt une ſuite de ſurfaces miſes les unes ſur les autres, à peu près comme les feuillets d'un Livre, ſur la trace de la ſurface ABCD qui iroit de la poſition ABCD à la poſition EFGH.

15. Le corps a donc trois longueurs, à ſçavoir les deux longueurs de la ſurface ABCD, & celle de l'éloignement de la partie ABCD à la poſition EFGH.

16. Des trois longueurs du corps, l'une conſerve le nom de *longueur*, l'autre ſe nomme *largeur*, & la troiſiéme ſe nomme

profondeur, & il eſt indifférent de prendre laquelle on voudra pour la longueur, ou pour la largeur, ou pour la profondeur; quelquefois on nomme *baſe*, la ſurface qui a deux de ces longueurs, & la troiſiéme longueur ſe nomme alors hauteur. Par exemple, ſi l'on nomme la ſurface ABCD, *baſe* du ſolide, la ligne qui marquera la diſtance de cette baſe ABCD à l'autre poſition EFGH, ſe nomme la *hauteur*. Nous enſeignerons dans la ſuite comment on doit trouver la ligne droite qui marque la diſtance entre deux lignes, entre deux ſurfaces, entre deux corps, &c.

17. La longueur, largeur & profondeur, ſe nomme les *trois dimenſions* des corps ou des ſolides.

18. Quoique les trois dimenſions du corps ſoient réellement inſéparables, qu'il n'y ait point de lignes ſans largeur & profondeur, ni de ſurfaces ſans profondeur; cependant on peut conſiderer l'une de ces dimenſions ſans faire attention aux autres. Par exemple; je puis conſiderer la longueur d'un chemin, la couper en pluſieurs parties, lui faire prendre des détours, &c. ſans m'embarraſſer de ſa largeur, & il n'en ſera pas moins vrai que cette longueur ſera double de ſa moité, triple de ſon tiers, &c. qu'elle ſera devenuë courbe de droite qu'elle étoit, &c. de même que je puis conſiderer la ſurface d'une place, la couper en pluſieurs parties, lui faire changer de figure, &c. ſans penſer le moins du monde à ſa profondeur; ce qui n'empêchera pas de conclurre que cette ſurface ſera devenuë longue, de quarrée qu'elle étoit, &c. ainſi l'on auroit tort de ne vouloir pas admettre ces ſortes de ſuppoſitions ou plûtôt d'abſtractions, puiſqu'on en tire des conſéquences qui ſont autant de vérités inconteſtables, dont l'utilité n'eſt pas à mépriſer.

19. La *Géométrie* eſt la Science qui apprend à connoître les propriétés des corps, ſelon leurs trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur. On la diviſe en *Géométrie ſimple* & en *Géométrie compoſée*.

20. Il ne ſçauroit y avoir de lignes droites plus droites les unes que les autres, puiſqu'elles prennent toutes le plus coutt chemin entre leurs extrémités; mais on peut trouver une infinité de lignes courbes de différente eſpece, ſelon qu'elles prendront des chemins plus longs ou plus courts entre leurs extrémités, & dont les parties ſeront diſpoſées entr'elles de différentes manieres. Or, la Géométrie ſimple ne conſidere entre toutes ces

lignes courbes, que la ſeule ligne circulaire, & par conſéquent elle ſe borne à la conſidération des ſurfaces terminées par des lignes droites & circulaires, & à celles des corps ou ſolides dont les ſurfaces ſont compoſées de ſurfaces planes, ou de ſurfaces qui ſont une ſuite de lignes circulaires. Au contraire la Géométrie compoſée, s'étend à toutes les lignes courbes de quelque eſpece qu'elles ſoient, aux ſurfaces bornées par ces ſortes de lignes, & aux ſolides dont les ſurfaces ont quelqu'unes de ces lignes pour une de leur dimenſions. Il faudroit des Volumes ſans fin, pour traiter à fond la Géométrie compoſée, à cauſe du nombre infini de courbes qu'on peut imaginer; c'eſt pourquoi, quand nous aurons vû les Elémens de la Géométrie ſimple, je me bornerai à parler des trois courbes des ſections coniques, qui ſont celles dont l'uſage eſt le plus fréquent & le plus néceſſaire.

21. Le *cercle* eſt un eſpace plan ABCD (*Fig.* 11.) terminé par une ligne courbe ABCD, dont tous les points ſont également éloignés d'un point O pris dans cet eſpace. Le point O ſe nomme centre du cercle, la courbe ABCD ſe nomme *circonférence*, & toutes les lignes droites AO, BO, &c. menées du centre aux points de la circonférence, ſe nomment rayons; ainſi tous les rayons d'un cercle ſont égaux; car ces rayons étant des lignes droites, meſurent les diſtances des points de la circonférence au centre, & ces diſtances ſont égales par la définition du cercle.

22. Toute ligne droite qui paſſe par le centre O d'un cercle, & qui ſe termine de part & d'autre à la circonférence, ſe nomme *diamétre*, & ce diamétre eſt toujours double du rayon, car il eſt compoſé de deux rayons AO, OC.

23. Tout diamétre AC (*Fig.* 12.) diviſe le cercle en deux parties égales, & la circonférence auſſi : concevons que le plan du cercle ABCD ſoit fendu le long de la ligne AC, qu'il y ait une charniere en A & une autre en C, & qu'on face tourner autour de ces charnieres la partie ABC du plan du cercle, juſqu'à ce qu'elle vienne tomber ſur l'autre partie ADC de ce plan; les points A, C de la droite AC ne bougeant point de leur place, tous les autres points de la ligne AC ne bougeront pas non plus; car autrement la ligne AC ceſſeroit d'être droite entre ſes extrémités; ainſi le centre O reſtera où il eſt: Or, ſi le plan ABC tombant ſur le plan ADC ne lui étoit parfaitement égal, la

partie de circonférence ABC ne tomberoit pas non plus ſur l'autre partie de circonférence ADC, ainſi elle tomberoit, ou toute entiere entre le diamétre AC & la partie de circonférence ADC, ou toute entiere en dehors de ADC, ou partie en dedans & partie en dehors. Si elle tomboit en dedans comme ARC, le rayon OD mené du centre O à un point D de la portion de circonférence ADC couperoit auparavant la portion de circonférence ARC en un point R, & par conſéquent le rayon OR ſeroit plus petit que le Rayon OD, c'eſt-à-dire on pourroit mener dans un cercle deux rayons inégaux; ce qui eſt contre la nature du cercle. De même ſi ABC tomboit en dehors comme en ASC, le rayon OS mené à la portion de circonférence ASC couperoit auparavant ADC en un point D, & l'on auroit encore dans un même cercle deux rayons inégaux OD, OS; enfin ſi ABC en tombant ſur ADC avoit une partie AMD en dedans de ADC (*Fig.* 13.) & une partie DSC en dehors, le rayon OM mené ſur la partie intérieure AMD ne pourroit couper la partie de circonférence ADC, à moins qu'on ne le prolongeât en R, & par conſéquent OM ſeroit plus court que OR; & le rayon OS mené ſur la partie extérieure DSC couperoit auparavant ADC en N & OS ſeroit plus grand que ON; ainſi nous aurions encore des rayons inégaux OM, OR, OS, dans un même cercle; ce qui eſt impoſſible. Donc, il faut abſolument que la portion ABC de circonférence, tombe ſur l'autre portion ADC, & lui ſoit égale, & que par conſéquent le cercle & la circonférence ſoient coupés chacun en deux, également.

24. Si une ligne droite AO (*Fig.* 11.) qui eſt en dedans un plan, tourne ſur ce plan autour de ſon extrémité O, qui ne change jamais de place, ſon autre extrémité A décrira une circonférence de cercle, ABCD dont le centre ſera le point O; de même ſi l'on prend avec le compas la grandeur AO de la ligne AO, & qu'ayant fixé l'une de ſes pointes en O, on faſſe tourner l'autre A autour de ce point, en tenant toujours le compas élevé à plomb ſur le plan, la pointe A décrira la même circonférence ABCD. Toute partie AB ou AD, &c. d'une circonférence ſe nomme *Arc*.

25. *Si l'on ſuppoſe qu'un rayon de cercle* DO (Fig. 11.) *tourne autour de ſon centre* O *d'un mouvement toujours égal, les arcs de cercle* DA, AB, *&c. que ſon extrémité* D *décrira dans des tems égaux, ſeront égaux.* Suppoſons que le Rayon DO ait paſſé

dans une minute de la poſition DO, à la poſition AO, & que dans une autre minute il paſſe de la poſition AO à la poſition BO; il eſt clair qu'il fait le même chemin dans cette ſeconde minute, que ſi à la fin de la premiere on l'avoir remis dans ſa premiere poſition DO, & qu'il eût continué à ſe mouvoir pendant la ſeconde minute: or, en ce cas, ſon extrémité D auroit décrit dans la ſeconde minute le même arc DA qu'elle auroit décrit dans la premiere, à cauſe de ſon mouvement égal. Donc l'arc AB qu'il a décrit en paſſant de la poſition AO, à la poſition BO dans la ſeconde minute, avec le même mouvement, doit être auſſi égal à l'arc DO.

26. Les Géometres diviſent la circonférence du cercle en 360 parties égales ou petits arcs égaux, qu'ils nomment degrés; chaque degré ſe diviſe en 60 parties égales qu'on nomme *minutes*; chaque minute en 60 parties égales nommées *ſecondes*; chaque ſeconde en 60 parties égales nommées *tierces*; & ainſi de ſuite.

27. *Si une ligne* AO (Fig. 14.) *tourne autour de ſon extrémité* O, *comme autour d'un centre, toutes les circonférences que ſes points* A, B, C, *&c. décriront, ſeront décrites dans un même tems, de même que leur moitiés, leur tiers, leur quarts*, &c. 1°. La ligne AO en tournant autour du point O ne peut pas revenir à la premiere poſition AO que tous ſes points ABC &c. ne reviennent en même tems à leurs poſitions; car autrement cette ligne ceſſeroit d'être droite : or, quand ces points ſont revenus à leur premiere poſition, leur circonférence ſont décrites; donc les circonférences ſont toutes décrites dans un même tems. 2°. Suppoſons que la ligne AO ait paſſé de la poſition AO à la poſition EO, & que l'arc AE décrit par le point A, ſoit, par exemple, la cinquiéme partie de ſa circonférence; donc le point A dans cinq tems égaux à celui qu'il a employé à décrire l'arc AE, décrira la circonférence entiere; or, le point B aura décrit l'arc BH dans le même tems que le point A aura décrit l'arc AE; ainſi ſi cet arc BH étoit moindre que la cinquiéme partie de ſa cironférence, le point B dans cinq tems égaux à celui qu'il a employé à parcourir l'arc BH, décriroit cinq parties égales de ſa circonférence, moindres chacune que la cinquiéme partie; donc il ne décriroit pas les cinq cinquiémes de ſa circonférence, c'eſt-à-dire ſa circonférence entiére; ce qui eſt impoſſible, puiſqu'il faut qu'il décrive ſa circonférence dans le même tems que le point A décrit la ſienne.

ſienne. De même ſi l'arc BH étoit plus grand que la cinquiéme partie de ſa circonférence, le point B dans cinq tems égaux à celui qu'il a employé a décrire cet arc, décriroit cinq parties égales de ſa circonférence plus grande chacune que la cinquiéme; donc il décriroit plus de cinq cinquiémes, c'eſt-à-dire plus que ſa circonférence; ce qui eſt encore impoſſible par la même raiſon : donc, &c.

Et delà, il ſuit que les arcs CR, BH, &c. décrits par tous les points de la ligne AO entre une de ſes poſitions AO & une autre poſition EO valent tous un même nombre de degrés de leurs circonférences; car ſi l'arc AE vaut, par exemple, la ſixiéme partie de ſa circonférence, tous les autres arcs CR, BH, &c. vaudront auſſi la ſixiéme partie de leur circonférence; or, ces circonférences ſont diviſées chacune en 360 degrés; donc tous les arcs vaudront la ſixiéme partie de 360 degrés, & par conſéquent ils vaudront un même nombre de degrés de leurs circonférences

28. Les axiomes ou les principes ſur leſquels la Géométrie fonde tous ſes raiſonnemens, ſont les ſuivans, 1°. *Il eſt impoſſible qu'une choſe ſoit & ne ſoit pas dans un même tems.* 2°. *Les parties d'un tout, priſes enſemble, ſont égales au tout.* 3°. *Si deux grandeurs ſont égales à une troiſiéme elles ſont égales entre elles.* 4°. *Si à deux grandeurs égales on ajoûte ou on retranche des grandeurs égales, les ſommes ou les reſtes ſeront égaux, & ſi on leur ajoûte ou retranche des grandeurs inégales, les ſommes ou les reſtes ſeront inégaux.* 5°. *Si on multiplie ou ſi l'on diviſe des grandeurs égales par des grandeurs égales, les produits ou les quotients ſeront égaux, & ſi on les multiplie ou diviſe par des grandeurs inégales, les produits ou les quotiens ſeront inégaux.* 6°. *Si deux grandeurs étant miſes l'une ſur l'autre, conviennent parfaitement, en ſorte que les parties de l'une n'excedent pas les parties de l'autre, ces deux grandeurs ſont parfaitement égales.* Il n'eſt pas étonnant qu'une ſcience qui n'employe que des principes auſſi clairs & évidens que ceux-ci, en tirent des conſéquences d'une parfaite certitude; mais ce qu'il y a d'admirable, c'eſt qu'avec la ſeule ſimplicité de ces principes, elle puiſſe élever l'eſprit à de ſi belles & profondes connoiſſances.

29. Lorſqu'on prouve l'égalité de deux grandeurs en les mettant l'une ſur l'autre; cela s'appelle *démontrer par la Superpoſition.* Quelques Auteurs ont prétendu que cette façon de démontrer

n'étoit pas assez géométrique ; mais il est aisé de faire voir qu'ils ont eu tort de penser ainsi ; en effet, si la Géométrie est la science qui démontre les vérités par les voyes les plus simples & les plus courtes ; je n'en vois point de plus convenables à cette fin, pour faire voir que deux grandeurs sont égales, que de montrer qu'elles conviennent parfaitement lorsqu'on les met l'une sur l'autre. Aussi ceux qui ont eu ce scrupule, ont-ils été obligés d'user de détours longs & ennuyans pour prouver des vérités qui sautent aux yeux.

30. On ne doit point trouver à redire que j'employe quelque fois le cercle à l'égard des lignes droites, ni me reprocher qu'en agissant ainsi, je n'observe pas l'ordre naturel des matiéres. Je n'use du cercle en parlant des lignes droites, que comme d'un instrument dont on ne peut se passer dant la plûpart des Problêmes qui concernent les lignes droites, & dont il faut connoître du moins la formation pour s'en servir avec connoissance de cause ; mais ce même cercle considéré comme une figure géométrique qui renferme grands nombre de belles propriétés utiles à la Géométrie, est traité dans un Chapitre à part selon l'ordre des matiéres.

31. AVERTISSEMENT. Pour abréger le discours, je supposerai toujours dans les Chapitres suivans, que les différentes lignes que je comparerai entr'elles, ou que je menerai dans les figures, sont dans un même Plan, c'est-à-dire une même surface plane, à moins que je n'avertisse expressément du contraire ; & l'on fera bien de faire attention à ceci ; car autrement la plûpart des propositions & des démonstrations seroient absolument fausses.

CHAPITRE II.

Des lignes droites, des Angles qu'elles forment, des lignes perpendiculaires & des lignes paralleles.

32. PROPOSITION Ire. *Entre deux points* A, B (Fig. 1.) *on ne peut mener qu'une seule ligne droite.*

La ligne AB est le plus court chemin entre ses extrémités A, B ; or, il ne sauroit y avoir deux chemins plus courts entre deux points. (*N.* 7.) Donc on ne sauroit mener plus d'une ligne

de A à B ; c'eſt-à-dire que ſi après avoir mené AB, on veut en mener une autre, cette ſeconde tombera ſur la premiere, & n'en ſera pas différente.

33. COROLLAIRE Ier. *Toutes les parties* AC, CD, &c. *d'une ligne droite* AB (Fig. 1.) *ſont auſſi des lignes droites, & ſont entre elles en ligne droite.*

La ligne AB eſt droite par la ſuppoſition ; donc le point A, a décrit cette ligne en allant de A en B, toujours devant lui, ſans s'écarter un moment ni à droite ni à gauche ; (*N.* 6.) donc auſſi en allant de A en C, il ne s'eſt point écarté ni à gauche ni à droite, & le chemin AC qu'il a pris eſt une ligne droite, & on prouvera la même choſe des autres parties CD, &c. de la ligne AB ; par la même raiſon, le chemin que le point A, a pris de A en D eſt une ligne droite ; mais AD eſt compoſée des deux parties AC, CD ; donc ces deux parties AC, CD ſont en ligne droite, & ainſi des autres.

34. COROLLAIRE II. *Si deux lignes droites* AB, DE (Fig. 1.) *ont deux points communs* D, B ; *c'eſt-à-dire ſi ces deux points appartiennent également aux deux lignes, ces deux lignes* AB, DE *ne ſont enſemble qu'une ſeule ligne droite* AE.

Concevons que le point A mis en A ait décrit la droite AB, & que ce même point mis en D ait décrit la droite DE ; ce point A aura décrit les parties AD, BD de la droite AB, en allant toujours devant lui ſans s'écarter un moment ni à droite ni à gauche ; car ces deux parties ſont en ligne droite. (*N.* 33.) Par la même raiſon le point A aura auſſi décrit les parties DB, BE de la droite DE, en allant toujours devant lui ſans s'écarter ni à gauche ni à droite ; donc le point A aura décrit les trois lignes AD, BD, BE ſans s'écarter ni à gauche ni à droite, & partant la ligne AE compoſée de ces trois lignes, ſera droite ; or, la ligne AE eſt la même que les deux droites AB, DE qui ont la partie commune DB ; donc ces deux lignes ſont en ligne droite.

35. COROLLAIRE III. *Donc ſi deux lignes droites ſe coupent elles ne ſe coupent qu'en un point* ; ſi elles ſe coupoient en deux points, elles auroient deux points communs, & ne formeroient qu'une ſeule ligne droite, & par conſéquent elles ne ſe couperoient pas.

36. PROBLEME. *Entre deux points donnés* A, B (Fig. 1.) *mener une ligne droite & la prolonger tant qu'on voudra.*

Je prens un fil délié que je noircis avec du charbon ; je tens

ce fil avec les mains, autant qu'il ſe peut, ſans le caſſer, & dans cet état, je le couche ſur le Plan où ſont les points donnés A, B, de façon que ce fil paſſe par ces deux points; la trace noire qu'il laiſſe ſur le Plan entre A & B, eſt la droite demandée; car ce fil ne pouvant être plus tendu qu'il n'eſt, prend le plus court chemin entre A & B.

Je prens ſur la trace AB un point D entre A & B, & tenant mon fil auſſi tendu qu'auparavant, je le fais paſſer par les points D, B, enſorte que la trace qu'il laiſſe, s'étende au-delà de B, comme de B en E, & la partie BE de cette trace, eſt le prolongement de la ligne AB du côté de B; car la trace DE & la trace AB ſont deux lignes droites qui ont deux points communs D, B, & par conſéquent elles ne forment qu'une ſeule ligne droite, (*N.* 34.) & on prolongera de la même façon, la ligne AB, tant qu'on voudra de part & d'autre.

Ceci ſuppoſe que le Plan ſur lequel ſont les deux poinrs A, B ſoutienne le fil dans toutes ſes parties, ainſi que feroit un Plan qui ſeroit horizontal; mais ſi ce Plan étoir élevé au-deſſus de l'horizon comme un mur, alors le fil n'étant pas ſoutenu partout, la peſanteur de ſes parties lui feroit décrire une ligne courbe: or, en ce cas, il faudroit ſe ſervir de l'inſtrument nommé *Regle*.

Pour conſtruire cet inſtrument, on prend une planche bien unie, qui n'ait pas beaucoup d'épaiſſeur, ou une lame de cuivre, d'argent, &c. on trace ſur cette planche ou ſur cette lame, une ligne droite, après quoi on la coupe le long de cette ligne, & l'inſtrumenr eſt fait.

Pour mener donc une ligne droite entre deux points A, B, (*Fig.* 15.) on poſe la régle RS ſur le Plan où ſont les points donnés A, B de façon que ces deux points touchenr le côté RS qui a été fait en ligne droite; puis mettant le crayon ou la plume ſur l'un des points A, on mene le crayon ou cette plume de A vers B en ſuivant toujours la droite RS, & par ce moyen la ligne AB qu'on trace ſur le Plan, eſt une ligne droite, puiſqu'elle ſuit la droite RS ſans s'écarter ni à droite ni à gauche.

Pour ſçavoir ſi une régle eſt bien faite, on trace ſur un Plan une droite AB, par le moyen d'un fil, puis on met ſur le Plan la réglé RS, & l'on examine ſi ſon côté RS s'ajuſte à la droite AB ſans s'écarter ni d'un côté ni d'autre; & ſi cela eſt, la regle eſt juſte.

37. COROLLAIRE. *Deux points* A, B (Fig. 1.) *d'une ligne droite étant donnés, la poſition ou la direction de cette ligne eſt facile à reconnoître ;* il n'y a qu'à mener une ligne droite entre ces deux points, & ce ſera certainement la ligne droite à qui ces deux points appartiennent, puiſqu'il n'eſt pas poſſible de mener quelqu'autre ligne droite entre ces deux points (*N.* 32.)

38. PROPOSITION. II. *Si des extrémités* A, B, *d'une droite* AB (Fig. 16.) *on mene deux droites* AC, BC *qui ſe coupent en* C, *& deux autres droites* AE, BE *qui ſe coupent en* E, *en dedans des deux autres, les deux premieres* AC, BC *priſes enſemble, ſont plus grandes que les deux autres* AE, BE *priſes enſemble.*

Il paroît naturel de dire que les deux AC BC prenant un plus grand détour que les deux AE, BE doivent être auſſi plus grandes; mais comme bien des gens n'admettroient pas ceci pour une démonſtration géométrique ; voici comme on le prouvera.

Je prolonge l'une des intérieures BE juſqu'à ce qu'elle coupe l'extérieure oppoſée AC en H ; la ligne AE étant droite entre ſes extrémités A, E, eſt plus courte que les deux AH, EH qui partent des mêmes extrémités A, E & qui ne prennent pas le même chemin ; ainſi j'ai $AE < AH + EH$; de même la ligne BH ou $BE + EH$ étant droite entre ſes extrémités B, H eſt plus courte que les deux enſemble BC, CH, & partant $BE + EH < BC + CH$; ajoûtant donc enſemble la plus courte AE avec la plus courte $BE + EH$, & la plus longue $AH + EH$ avec la plus longue $BC + CH$, j'aurai $AE + BE + EH < AH + EH + BC + CH$; retranchant de part & d'autre la droite EH, j'aurai $AE + BE < AH + CH + BC$; mais $AH + HC = AC$; donc $AE + BE < AC + BC$.

39. PROPOSITION III. *Si une droite* AB (Fig. 17.) *coupe une autre droite* CD *en un point* B, *cette droite* AB, *étant prolongée du côté de* B *paſſera de l'autre côté de la droite* CD.

Du point B pris pour centre, je décris avec une ouverture de compas priſe à diſcrétion, une circonférence de cercle ADEC ; la droite CD qui paſſe par le centre B & qui coupe la circonférence aux points C, D eſt donc un diametre, & les deux arcs CAD, CED valent chacun la moitié de la circonférence ; (*N.* 22. 23.) de même la ligne AB étant rayon du cercle, ſi on la prolonge, elle deviendra diametre, & coupera la circonférence en deux parties égales. Or, les parties CA, AD de la

demi circonférence CAD, ſont moindres chacune que la demi circonférence; donc les demi circonférences ACE, ADE que la ligne AB prolongée, coupera, ſeront plus grande chacune que les deux parties AC, AD & par conſéquent le point E ou les deux demi circonférences ſe joindront, & par lequel la ligne AB prolongée doit paſſer, ſera au-delà ligne CD par rapport à la ligne AB.

40. *Definition.* Si deux lignes AB, CB (*Fig.* 18.) qui n'ont pas la même direction, c'eſt-à-dire qui ne ſont pas en ligne droite, ſe coupent en un point B; l'eſpace indéfini ABC compris entre ces lignes, ſe nomme *Angle.* Le point B où les lignes ſe coupent, ſe nomme *ſommet* de l'angle, & les deux lignes AB, CB ſont les *côtés* ou les jambes de l'angle. Il eſt clair qu'un angle ABD eſt plus ou moins grand, ſelon que les côtés AB, CB ſont plus ou moins écartés l'un de l'autre, ou ce qui revient au même, ſelon que la ligne AB eſt moins ou plus inclinée ſur la ligne CB.

41. On déſigne un angle par les trois lettres A, B, C miſes aux extrémités de ſes côtés & au ſommet, en obſervant d'écrire la lettre A du ſommet entre les deux autres; ainſi pour exprimer l'angle formé par les droites AB, CB, on dit l'angle ABC.

42. Probleme. *Meſurer les Angles, c'eſt-à-dire trouver le rapport qu'ils ont entr'eux.*

Soient les angles BAC, DAB (*Fig.* 19.) qui ont leurs ſommets au même point A; du point A pris pour centre, je décris avec une ouverture de compas priſe à diſcretion, une circonférence de cercle CBDC que je diviſe en ſes 360 degrés, & ſi par exemple l'arc CB compris entre les côtés de l'angle BAC vaut 30 degrés, & que l'arc DB compris entre les côtés de l'angle DAB en vaille 60. Je dis que les deux angles BAC, DAB ſont entre eux, de même que 30 eſt à 60, ou comme 1 à 2, & ainſi desautres, en obſervant que le ſommet de l'angle ſoit toujours au centre du cercle.

Dans l'uſage ordinaire, on dit que l'arc CB de 30 degrés eſt la meſure de l'angle CAB, & que l'arc BD de 60 degrés eſt la meſure de l'angle DAB; ce que l'on doit entendre dans le ſens que je viens d'expliquer.

Pour rendre raiſon de cette pratique, concevons que le côté CA prolongé indéfiniment du côté de C, tourne ſur ſon extré-

Digitized by Google

mité A, & tombe ſucceſſivement ſur les côtés BA, DA; tous les points de CA décriront entre les côtés CA, BA de l'angle BAC des arcs NQ, MS &c. infiniment proches, & qui couvriront totalement l'eſpace BAC, lequel par conſéquent ſera la même choſe que la ſomme de ces arcs : or, comme on ſuppoſe que l'arc CB vaut 30 degrés ou la douziéme partie de ſa circonférence, tous les autres arcs NQ, MS, &c. vaudront auſſi 30 dégrés, ou la douziéme partie de leurs circonférences; (*N.* 27.) ainſi la ſomme des arcs, ou l'angle BAC vaudra la douziéme partie de la ſomme des circonférences; de même comme ou ſuppoſe que l'arc BD compris entre les côtés BA, DC de l'angle DAC vaut 60 degrés, tous les arcs décrits par les points de la ligne CA entre les côtés BA, DA vaudront auſſi 60 degrés, c'eſt-à-dire la ſixiéme partie de leurs circonférences; ainſi l'angle DAB égal à la ſomme de tous ces arcs, vaudra la ſixiéme partie de la ſomme des circonférences; or, nous venons de voir que l'angle BAC vaut la douziéme partie de cette ſomme des circonférences; donc l'angle BAC eſt à l'angle BAD, comme $\frac{1}{12}$ eſt à $\frac{1}{6}$, ou comme $\frac{1}{12}$ eſt à $\frac{2}{12}$, c'eſt-à-dire comme 1 eſt à 2, & par conſéquent comme l'arc CB de 30 degrés, eſt à l'arc DB de 60 degrés.

43. *Remarque.* La meſure d'un ou pluſieurs angles n'eſt donc pas comme on pourroit penſer la meſure de leur grandeur; mais c'eſt la meſure du rapport de leur grandeur, ou ſi l'on veut, la meſure de l'inclination de leurs côtés; car il eſt viſible que plus l'arc compris entre les côtés d'un angle, ſera petit, plus ces côtés ſeront proches l'un de l'autre, & que par conſéquent ils ſeront plus inclinés l'un ſur l'autre, & qu'au contraire plus l'arc compris ſera grand, moins les côtés ſeront inclinés.

Et il faut remarquer que le plus ou le moins de longueur des jambes des angles ne change rien dans leur valeur, non plus que le plus ou le moins de grandeur de la circonférence, dont les arcs doivent meſurer le rapport de ces angles; car, 1°. Les angles étant des eſpaces indéfinis du côté oppoſé à leurs ſommets, le plus ou le moins de longueur de leurs côtés ne les détourne point, & l'on doit regarder ces côtés comme prolongés à l'infini, 2°. Tous les arcs grands ou petits compris entre les jambes d'un angle, valent un même nombre de degrés de leur circonférences; ainſi les arcs BC, MS compris entre les jambes de l'angle BAC valent également 30 degrés, & les arcs DB,

VS compris entre les jambes de l'angle DAB valent également 60 degrés ; donc, soit que je me ſerve des arcs CB, BD de la circonférence CDBC ou des arcs MS, SV de la circonférence MSVM ; je trouverai toujours que les deux angles BAC, DAB ſont entr'eux comme 30 degrés à 60 degrés.

44. *Definition.* Tout angle DAM (*Fig.* 20.) qui embraſſe le quart DM de la circonférence, ſe nomme *Angle droit* ; tout angle BAC qui embraſſe un arc BC moindre que le quart de la circonférence, ſe nomme *Angle aigu*, & tout angle MAB qui embraſſe un arc MB plus grand que le quart de la circonférence, ſe nomme *Angle obtus.*

45. Tous les angles droits ſont égaux, car ils embraſſent tous le quart de la circonférence ou 90 degrés ; mais tous les aigus ne ſont pas égaux non plus que tous les obtus ; car il peut y avoir des angles aigus qui embraſſent plus ou moins de degrés au deſſous de 90, & des angles obtus qui en embraſſent plus ou moins au deſſus de 90.

46. Probleme. *A l'extrémité* D *d'une ligne droite donnée* DE (Fig. 21) *faire un angle égal à un angle donné* ABC.

Du point B pris pour centre & d'une ouverture de compas priſe à diſcrétion, je décris une circonférence CAHC. Je conſerve la même ouverture de compas, & portant l'une des pointes en D, je décris avec l'autre une circonférence de cercle EMNE ; je prens avec le compas la grandeur CA de l'arc CA compris entre les côtés de l'angle ABC, & je porte cette grandeur de E en M ſur la circonférence EMNE ; du point M je mene au point D la droite MD, & l'angle MDE eſt égal à l'angle donné ABC.

Car par la conſtruction, le rayon DE de la circonférence EMNE eſt égal au rayon BC de la circonférence CAHC, c'eſt pourquoi mettant le rayon DE ſur le rayon BC, enſorte qu'ils s'ajuſtent parfaitement, la circonférence EMNE s'ajuſtera parfaitement ſur la circonférence CAHC, & l'arc EM ſur ſon égal CA ; donc la droite MD tombera ſur la droite AB, puiſque les extrémités M, D de la droite MD tomberont ſur les extrémités A, B de la droite AB, & qu'entre deux points on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite ; ainſi l'angle MDE tombera ſur l'angle ABC & lui ſera égal.

47. Proposition IV. *Si deux angles* ABC *abc* (Fig. 22.) *ſont égaux & que les jambes* AB, CB *de l'un, ſoient égales aux jambes* ab, cb

ab, cb *de l'autre, la droite* AC *qui joint les extrémités* A, C *des jambes du premier, ſera égal à la droite* ac *qui joint les extrémités* a, c *des jambes du ſecond, & les angles que la droite* AC *fera avec les côtés* AC, CB *du premier, ſeront égaux chacun à chacun aux angles que la droite* ac *fera avec les côtés* ab, cb *du ſecond.*

Je mets le côté BC du premier, ſur le côté *bc* du ſecond qui lui eſt égal; le côté BA tombera auſſi ſur le côté *ba* qui lui eſt égal; s'il tomboit en dedans de l'angle *abc*, l'angle ABC ſeroit plus petit que l'angle *abc*, & s'il tomboit en dehors, l'angle ABC ſeroit plus grand que l'angle *abc*, & l'un l'autre eſt contre la ſuppoſition; donc les points A, C tomberont ſur les points *a*, *c*, & la droite AC mené entre les points A, C tombera ſur la droite *ac* menée entre les points *a*, *c* & lui ſera égale; d'où il ſuit que l'angle BAC tombera ſur l'angle *bac*, & l'angle ACB ſur l'angle *acb*.

48. *Definition.* Si l'on prolonge l'un des côtés CB (*Fig.* 23.) d'un angle CBA au-delà du ſommet B en E l'angle ABE fait par le prolongement BE avec l'autre côté AB, & l'angle ABC ſe nomment *Angles de ſuite*, & ſi l'on prolonge les deux CB, AB au-delà du ſommet, l'angle HBE fait par les deux prolongemens, & l'angle ABC ſe nomment *Angles oppoſés au ſommet.*

49. Proposition V. *Les Angles de ſuite valent enſemble deux angles droits, & les angles oppoſés au ſommet ſont égaux.*

Du ſommet B (*Fig.* 23.) pris pour centre, & avec une ouverture du compas à diſcrétion, je décris une circonférence de cercle qui coupe les côtés des angles aux points C, A, E; le côté CB & ſon prolongement BE forment une ligne droite qui paſſe par le centre B, & qui par conſéquent eſt un diametre, lequel coupe la circonférence en deux demi-circonférences CAE, CHE. Or, la meſure de l'angle ABC, eſt l'arc AC compris entre ſes côtés, (*N.* 42.) & la meſure de l'angle ABE eſt l'arc AE, & ces deux arcs AC, AE pris enſemble, valent la demi-circonférence CHE ou deux quarts de circonférence; donc la meſure totale des angles de ſuite CBA, ABE eſt deux quarts de circonférence; mais deux quarts de circonférence ſont la meſure de deux angles droits; donc les angles de ſuite CBA, ABE, valent enſemble deux angles droits; ce qu'il falloit premierement démontrer.

L'angle ABE & ſon angle de ſuite EBH, valent enſemble deux droits, comme on vient de voir; le même angle ABE & ſon angle de ſuite ABC, valent auſſi deux droits; donc les deux en-

ſe. b'e ABE EBH ſont égaux aux deux enſemble ABE, ABC; retranchant donc de part & d'autre l'angle ABE, il reſtera l'angle EBH égal à l'angle ABC qui lui eſt oppoſé au ſommet.

50. *Definition.* Une ligne droite AB (*Fig.* 24.) eſt dite *Perpendiculaire* ſur une autre ligne droite CD lorſqu'elle n'eſt pas plus inclinée ſur CD d'un côté que de l'autre.

51. Corollaires. Donc, 1°. *Les deux angles* ABD, ABC *qu'une perpendiculaire* AB *fait avec la droite* CD *du même côté ſont chacun droits.* Ces deux angles ſont angles de ſuite, & valent enſemble deux angles droits: (*N.* 49.) or, ils ſont égaux, puiſque AB n'eſt pas plus inclinée ſur CD d'un côté que de l'autre; donc chacun d'eux eſt droit.

Donc, 2°. *Toute ligne* AB *qui fait un angle droit* ABD *avec une autre droite* BD, *eſt perpendiculaire ſur cette ligne* BD; car ſi l'on prolonge DB en C, les angles de ſuite ABD, ABC vaudront deux droits, (*N.* 49.) & comme ABD en vaut un, ABC en vaudra un auſſi & ſera égal à ABD, (*N.* 45.) ainſi AB n'inclinera pas plus d'un côté que d'un autre ſur CD.

Donc, 3°. *Si l'on prolonge la perpendiculaire* AB *au-delà de* CB *en* E, *ſon prolongement* BE *ſera auſſi perpendiculaire ſur* CD. Les angles de ſuite ABD, DBE valent enſemble deux droits; or, ABD eſt droit; donc DBE l'eſt auſſi, & partant BE eſt perpendiculaire ſur CD.

Donc, 4°. *Si une ligne* AE *eſt perpendiculaire ſur une autre* CD, *réciproquement celle-ci eſt perpendiculaire ſur* AE; les angles ABD, DBE ſont droits, comme on vient de voir, & par conſéquent égaux; (*N.* 45.) donc CD n'eſt pas plus inclinée ſur AE d'un côté que d'un autre.

Donc, 5°. *D'un même point* B *pris ſur une droite* CD, *on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire* BA *ſur cette droite.* Si on en pouvoit mener une autre comme BH, il faudroit qu'elle paſſât ou à droite ou à gauche de la perpendiculaire BA, & cependant il faudroit que les angles HBD, HBC qu'elle feroit avec CD, fuſſent égaux; ce qui n'eſt pas poſſible, puiſque l'angle HBD eſt plus petit que l'angle ABD qui le renferme, lequel angle eſt droit, à cauſe que AB eſt perpendiculaire ſur CD.

Donc, 6°. *Si d'un même point* B *pris ſur une droite* CD *on mene de part & d'autre deux droites* BA, BE *perpendiculaires ſur* CD; *ces deux droites ne feront enſemble qu'une ligne droite*; puiſque AB eſt perpendiculaire ſur CD, ſon prolongement BE de l'autre côté

de CD eſt auſſi perpendiculaire ſur CD, comme on vient de voir. Or, du même point B on ne peut pas mener du même côté deux perpendiculaires; donc la perpendiculaire BE eſt le prolongement de la perpendiculaire AB, & ces deux lignes ſont enſemble une ſeule ligne droite.

52. PROPOSITION VI. *D'un point* A (Fig. 25.) *pris hors d'une ligne droite* CD, *& qui n'eſt pas dans le prolongement de cette droite, on ne peut mener ſur* CD *qu'une ſeule perpendiculaire* AB.

Si l'on veut que du point A on puiſſe mener ſur CD une autre ligne AH qui lui ſoit auſſi perpendiculaire; je prolonge la perpendiculaire AB en E de l'autre côté de CD; je fais BE = AB, & je mene la droite EH; la droite AB & ſon prolongement BE ſont perpendiculaires ſur CD; donc les angles ABH, EBH ſont droits (*N.* 51.) & partant égaux; (*N.* 45.) or, les côtés AB, BH du premier de ces angles ABH, ſont égaux chacun à chacun aux côtés BE, BH du ſecond EBH, & les lignes AH, EH joignant les extrémités de ces côtés égaux ſeront égales; donc, l'angle AHB que la ligne AH fait avec le côté BH du premier angle ABH, eſt égal à l'angle EHB que la ligne EH fait avec le côté BH du ſecond angle EBH; (*N.* 47.) mais AHB doit être droit, puiſqu'on ſuppoſe que AH eſt perpendiculaire ſur CD; donc EHB ſera auſſi droit, & la droite EH ſera auſſi perpendiculaire ſur CD; (*N.* 51.) ainſi les perpendiculaires AH, EH qui partent du même point H de la ligne CD, ne feront enſemble qu'une ſeule ligne droite AE entre les extrémités A, E; mais la ligne ABE eſt auſſi droite entre les mêmes extrémités; donc entre deux points il ſe trouveroit deux lignes droites; ce qui eſt impoſſible: donc il eſt impoſſible auſſi que AH ſoit perpendiculaire ſur CD.

53. COROLLAIRE Ier. *Si du point* A (Fig. 26.) *pris hors d'une ligne droite* CD, *& qui n'eſt pas ſur le prolongement de cette ligne, on mene une perpendiculaire* AB, *& pluſieurs autres lignes que nous nommerons obliques, parce qu'elles ne ſauroient être perpendiculaires ſur* CD; *je dis* 1°. *Que la perpendiculaire* AB *ſera la plus courte de toutes les lignes menées du point* A *ſur* CD, 2°. *Que les autres ſeront d'autant plus longues qu'elles couperont la ligne* CD *en des points* H, D, &c. *plus éloignés du point* B *où la perpendiculaire coupe cette ligne*, 3°. *Qu'on trouvera tant d'obliques que l'on voudra égales deux à deux; mais jamais trois d'égales.*

Je prolonge la perpendiculaire AB au-delà de la ligne CD en E; je fais BE = AB, & je mene la ligne EH, la ligne AB &

ſon prolongement BE étant perpendiculaires ſur CD, les angles ABH, EBH ſont droits, (*N.* 51.) & par conſéquent égaux; (*N.* 45.) or, les côtés AB, BH de l'angle ABH ſont égaux chacun à chacun aux côtés EB, BH de l'angle EBH; donc la ligne AH qui joint les extrémités des côtés AB, BH eſt égale à la ligne EH qui joint les extrémités des côtés EB, BH; (*N.* 47.) or, les deux lignes droites AB, BE ne ſont enſemble qu'une ligne droite entre les points A, E; donc les deux droites AH, HE ne ſont pas enſemble une ligne droite entre les mêmes points A, E, & ſont par conſéquent plus longues que les deux enſemble AB, BE; ainſi la ligne AH moitié des deux AH, HE; eſt plus longue que la moitié AB des deux AB, BE, & partant la perpendiculaire AB eſt plus courte que l'oblique AH, & on prouvera de même que la perpendiculaire AB eſt plus courte que l'oblique AD, &c. ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Du point E, je mene la droite ED à l'extrémité D d'une autre oblique AD, & je prouverai de même qu'auparavant que ED = AD. Or, les deux droites égales AH, HE menées des extremités A, E de la droite AE ſe coupent en dedans des deux droites AD, ED menées des mêmes points A, E; donc les deux AH, HE priſes enſemble, ſont moindres que les deux AD, DE, (*N* 38.) & partant la droite AH, moitié des deux AH, HE eſt moindre que la droite AD moitié des deux AD, DE; ainſi l'oblique AD qui coupe CD, en un point D plus éloigné du pied B de la perpendiculaire AB eſt plus longue que l'oblique AH qui coupe CD en un point H plus proche du même pied B; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

Je prens ſur CD de l'autre côté du pied B de la perpendiculaire AB la diſtance BM égale à la diſtance BH, la diſtance BC égale à la diſtance BD, & du point A je mene les droites AM, AC, la droite AB étant perpendiculaire ſur CD, l'angle ABH eſt égal à l'angle ABM, (*N.* 51.) & les côtés AB, BH de l'angle ABH ſont égaux chacun à chacun aux côtés AB, BM de l'angle ABM; donc l'oblique AH qui joint les extrémités des côtés AB, BH eſt égale à la droite AM qui joint les extrémités des côtés AB, BM, (*N.* 47.) c'eſt-à-dire que les deux obliques AH, AM qui coupent la droite CD en des points H, M également éloignés du pied B de la perpendiculaire AB ſont égales; & on prouvera de même que les deux obliques AC, AD ſont égales pour la même raiſon; & comme de part

& d'autre du pied B de la perpendiculaire, on peut trouver tant de points que l'on voudra également distans deux à deux du point B, on trouvera aussi tant d'obliques égales deux à deux que l'on voudra; mais on n'en trouvera jamais trois qui soient égales, car si cela étoit, il faudroit qu'il y en eût deux qui fussent du même côté de la perpendiculaire AB, & comme ces deux lignes ne pourroient couper la ligne CD en deux points également éloignés du point B, elles ne sauroient être non plus égales; ce qui seroit contre la supposition.

54. COROLLAIRE II. Donc, *si d'un point* A *pris hors d'une droite* CD *on mene sur cette ligne une perpendiculaire* AB, *& deux obliques égales* AH, AM *la perpendiculaire* AB *coupera la droite* CD *en un point* B *également éloigné des points* H, M *où les obliques coupent la même ligne* CD. C'est une suite du Corollaire précédent; & delà il est aisé de conclure que *si deux lignes* AH, AM *menées sur une droite* CD *d'un point extérieur* A *sont égales; ces deux lignes sont deux obliques entre lesquelles la perpendiculaire menée du point* A *sur* CD *doit passer.* Car si l'une de ces lignes étoit perpendiculaire sur CD, elle seroit plus courte que l'autre : ce qui seroit contre la supposition.

55. COROLLAIRE III. *La perpendiculaire* AB *menée du point extérieur* A *sur une ligne droite* CD *est la distance du point* A *à cette droite* CB, cette perpendiculaire est la plus courte ligne qu'on puisse mener du point A sur CD, (*N.* 53.) donc elle est la distance du point A à cette ligne (*N.* 9.).

COROLLAIRE IV. *Si un point quelconque, d'une droite* ABE (Fig. 27.) *perpendiculaire sur une autre droite* CD, *est également éloigné des deux points* C, D *de la droite* CD, *cette perpendiculaire prolongée de part & d'autre à l'infini, passera par tous les points également éloignés des points* C, D.

Il faut ici démontrer deux choses, 1°. Que tous les points de la perpendiculaire ABE prolongée de part & d'autre, à l'infini, sont également éloignés des points C, D, 2°. Qu'il ne peut se trouver aucun point également éloigné des points C, D, qui ne soit sur la perpendiculaire; ce que je prouve ainsi.

Si le point de la perpendiculaire également éloigné des points C, D est le point B où cette perpendiculaire coupe la droite CD; je prens un autre point quelconque A sur cette perpendiculaire, & de ce point, je mene les droites AC, AD aux points C, D. Ces droites seront deux obliques menées du point A de

la perpendiculaire AB, & ces obliques ſeront égales, puiſqu'elles coupent la droite CD en des points également éloignés de la perpendiculaire; (*N.* 53.) mais ces droites meſurent les diſtances du point A aux points C; D; donc le point A eſt également éloigné des points C, D; & comme on prouvera la même choſe à l'égard de tout autre point pris ſur la perpendiculaire, il s'enſuit que tous les points de cette droite ſont également éloignés de C & D.

Que ſi le point de la perpendiculaire également éloigné des points C, D eſt hors de la ligne CD tel que le point A; je mene les droites AC, AD qui ſeront par conſéquent deux obliques égales; donc la perpendiculaire coupera CD en un point B également éloigné des points C & D, & partant je prouverai comme auparavant que tous les autres points de la perpendiculaire ſont également éloignés de C & D; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Maintenant, ſi l'on prétend que quoique tous les points de la perpendiculaire AE (*Fig.* 28.) ſoient également éloignés des points C, D de la droite CD, il puiſſe néanmoins ſe trouver quelque point H hors de la perpendiculaire AE qui ſoit auſſi également éloigné des points C, D; je mene de ce point H les droites HC, HD qui ſeront égales & par conſéquent obliques l'une & l'autre ſur CD; (*N.* 54.) ainſi la perpendiculaire menée du point H ſur CD coupera cette ligne CD en un point également éloigné des points C & D, & partant, elle la coupera au point B où la perpendiculaire AE la coupe; donc il s'enſuivroit que ſur un même point B pris ſur CD, on pourroit mener deux droites AB, BH perpendiculaires ſur la ligne CD; ce qui n'eſt pas poſſible, (*N.* 51.) par conſéquent il n'eſt pas poſſible non plus que le point H ſoit également éloigné de C & D.

57. COROLLAIRE V. *Une même ligne ne peut être perpendiculaire ſur deux lignes* AB, CD (Fig. 29.) *qui ſe coupe en un point* L. Si on veut que la droite DB qui coupe les droites AB, CD en deux points D, B différens du point L où ces droites ſe coupent, ſoit perpendiculaire ſur l'une & l'autre de ces droites; réciproquement ces lignes ſeront perpendiculaires ſur elle, (*N.* 51) & par conſéquent il s'enſuivra que du point L où ces lignes ſe coupent hors de la ligne DB, on pourra mener deux perpendiculaires LD, LB ſur cette droite DB; ce qui eſt impoſſible (*N.* 52.).

Et ſi on veut que la droite ML qui paſſe par le point où les deux lignes ſe coupent, ſoit perpendiculaire ſur l'une & l'autre, réciproquement les deux lignes ſeront perpendiculaire ſur elles; (*N.* 51.) donc il s'enſuivra que d'un même point L d'une droite LM, on pourroit mener deux perpendiculaires LD, LB d'un même côté; ce qui ſeroit encore impoſſible (*N.* 51.).

58. COROLLAIRE VI. *Si une droite* AE (Fig. 27.) *eſt tellement diſpoſée à l'égard d'une autre droite, que deux de ſes points quelconques ſoient également éloignés de deux points* C, D *de la droite* CD, *c'eſt-à-dire que le point* A *ſoit également éloigné de* C *&* D, *& le point* E *auſſi également éloigné de* C & D, *la droite* AB, *eſt perpendiculaire ſur* CD. Du point A je conçois une perpendiculaire menée ſur CD; cette perpendiculaire prolongée de part & d'autre, à l'infini, paſſera par tous les points également éloignés de C & D, (*N.* 56.) & partant elle paſſera par le point E, mais la droite AE paſſe auſſi par les points A, E; donc cette droite n'eſt pas différente de la perpendiculaire, car entre deux points on ne peut mener qu'une droite (*N.* 32.).

59. LEMME. *Si des extrémités* A, B *d'une droite* AB (Fig. 30.) *priſes pour centres, & avec des rayons* AE, BN, *qui, pris enſemble ſoient plus grands que la droite* AB, *on décrit deux circonférences* EPLQ, NPSQ; *ces deux circonférences ne ſe couperont qu'en deux points* P, Q *dont l'un ſera d'un côté de la droite* AB, *& l'autre de l'autre côté.*

En premier lieu, il eſt clair que ces deux circonférences ne ſe couperont point ſur la droite AB, car leurs rayons AE, BN étant enſemble plus grands que la droite AB, ces deux rayons tombant ſur AB anticiperont l'un ſur l'autre, & l'extrémité E du premier AE tombera plus près du point B que l'extrémité N du ſecond BN, 2°. Ces deux circonférences ſe couperont, car l'extrémité E du rayon AE, en décrivant la demi circonférence EPL du côté de P, s'éloigne de plus en plus du centre B, & va trouver la ligne AB prolongée au-delà de A par rapport à B. Et au contraire l'extrémité N du rayon BN, en décrivant la demi circonférence, s'éloigne de plus en plus du centre A, & va couper la ligne AB prolongée au-delà du point B; ainſi les deux demi circonférences prenant des routes oppoſées, doivent ſe couper quelque part, & la même choſe doit ſe dire des deux autres demi circonférences qui ſont de l'autre côté de la ligne AB.

Suppoſant donc que le point ou les deux demi circonférences EPL, NPS ſe coupent, ſoit le point P; je conçois que de ce point, ſoit menée une perpendiculaire PH ſur la droite AB, & du centre A des lignes droites AR, AR, &c. ſur tous les points de cette ligne; la droite AH étant perpendiculaire ſur PH, les droites AR, AR, &c. ſont obliques & toutes plus courtes que le rayon AP qui eſt plus éloigné qu'elles de la perpendiculaire AH; (*N.* 53.) ainſi ces obliques ne vont pas aboutir juſqu'à l'arc PE compris entre le point P & la droite AB; car ſi cela étoit, elles ſeroient égales au rayon AP; & par conſéquent l'arc PE eſt tout entier à droite de la ligne PH. De même ſi l'on mene de l'autre centre B des lignes droites BR, BR, &c. ſur tous les points de PH, toutes ces lignes ſeront plus courtes que le rayon, & n'iront pas aboutir ſur l'arc PN, lequel, par conſéquent ſera tout entier à gauche de la droite PH, c'eſt pourquoi les deux arcs PE, PN des demi circonférences EPL, NPS ne ſe coupent point ailleurs qu'en P, puiſqu'ils ſont ſéparés par la droite PH.

Je prolonge la droite PH en X du côté de P, & du centre A je mene ſur tous les points du prolongement PX des droites AZ, AZ, &c. toutes ces lignes ſont des obliques plus longues que le rayon AP qui eſt plus proche qu'elles de la perpendiculaire; ainſi elles coupent l'arc PL avant de couper la droite PX, & par conſéquent l'arc PL eſt tout entier à gauche de PX. De même ſi de l'autre centre B on mene des droites BZ, BZ, &c. ſur PX, ces droites couperont l'arc PS avant de couper PX, & partant cet arc ſera tout entier à droite de PX; donc les arcs PL, PS des demi circonférences EPL, NPS ne ſe couperont point ailleurs qu'en P, puiſqu'ils ſont ſéparés par la droite PZ: or, nous venons de voir que les autres deux arcs PE, PN ne ſe coupent qu'en P; donc les demi citconférences EPL, NPS, compoſées de ces arcs ne ſe coupent auſſi qu'en P, & on prouvera la même choſe des autres demi circonférences EQL, NQS, & partant les deux circonférences entieres ne ſe coupent qu'en deux points, l'un au deſſus, & l'autre au deſſous de la droite AB.

6c. LEMME. *Une circonférence de cercle ne peut couper une ligne qu'en deux points.*

Si la ligne AB (*Fig.* 31.) qui coupe la circonférence aux points A, B paſſe par le centre O du cercle: la propoſition eſt évidente;

car

AB eſt compoſée de deux rayons AO, OB, ainſi la circonférence pourroit couper le diametre en quelque point pris entre ſes extrémités A, B : par exemple en P, la droite OP compris entre le centre & ce point P, ſeroit un rayon, & partant nous aurions deux rayons inégaux OP, OB dans un même cercle; ce qui eſt impoſſible. De même ſi la circonférence coupoit les prolongemens de AB en un point quelconque Q; la droite OQ ſeroit un rayon, & nous aurions encore deux rayons inégaux OQ, OB; ce qui eſt impoſſible.

Mais ſi la droite CD qui coupe la circonférence en deux points C, D ne paſſe par le centre O; je mene du centre O aux extrémités C, D de cette ligne, les deux rayons OC, OD leſquels étant égaux ſeront par conſéquent deux obliques égales menées du point extérieur O ſur la droite CD, (*N.* 54.) & la perpendiculaire du point O ſur CD coupera cette ligne en un point D également éloigné de C & D; or, toutes les lignes OR, OR, &c. menées du point O ſur tous les points de la droite CD pris entre les deux rayons OC, OD ſeront plus courtes que ces rayons, puiſqu'elles ſeront plus proches de la perpendiculaire, (*N.* 53.) & n'iront pas aboutir à la circonférence; donc la circonférence ne ſauroit couper cette ligne dans aucun de ces points; de même toutes les lignes OS, OS, menées du point O ſur les prolongemens de la droite CD, ſeront plus longues que les rayons, puiſqu'elles ſeront plus éloignées de la perpendiculaire; donc la circonférence ne paſſera pas par leur extrémité S, S, &c. partant elle ne coupe la ligne CD qu'aux deux points C, D.

61. Lorſque d'un point B (*Fig.* 27.) pris ſur une droite CD, on mene une droite BA perpendiculaire ſur CD; cela s'appelle *élever une perpendiculaire*, & lorſque d'un point A pris hors d'une ligne droite CD & qui n'eſt pas dans ſon prolongement, on mene une perperpendiculaire CD; cela s'appelle *abaiſſer une perpendiculaire.*

62. PROBLEME. *D'un point* B (Fig. 32.) *pris ſur une droite* CD *élever une perpendiculaire ſur cette ligne.*

Je prens une ouverture de compas à diſcrétion que je porte ſur la ligne CD, de B en M & de B en N pour avoir les deux points M, N également éloignés du point B; des points M, N & avec une ouvertute de compas, mais plus grande que la précédente; c'eſt-à-dire plus grande que MB ou BN; je décris deux

arcs PQ, RS qui ſe coupent d'un même côté de la ligne CD en un point A, à cauſe que les deux rayons pris enſemble ſont plus grands que la droite MN, (*N.* 59.)& du point A où ces arcs ſe coupent, je mene au point B la droite AB qui eſt la perpendiculaire demandée.

Car à cauſe que les arcs ont été décrits avec des rayons égaux, les droites AM, AN ſont égales, & le point A de la ligne AB également éloigné des points M, N de la droite CD; or, le point B de cette même ligne AB eſt auſſi également éloigné des points M, N; donc AB eſt perpendiculaire ſur CD (*N.* 58.).

63. PROBLEME. *D'un point* A *pris hors d'une droite* CD (Fig. 33.) *& qui n'eſt pas dans ſes prolongemens, abaiſſer une perpendiculaire ſur* CD.

Du point A pris pour centre, & avec une ouverture de compas aſſez grande pour pouvoir couper la ligne CD, je décris un arc qui coupe cette ligne en deux points M, N; de ces points pris pour centres avec une même ouverture de compas plus grande que la moitié de MN, je décris deux arcs PQ, RS qui ſe coupent au point O, & du point A par le point O, je mene la droite AO que je prolonge juſqu'à ce qu'elle coupe CD en B, & la droite AB eſt la perpendiculaire demandée.

Car les rayons AM, AN de l'arc MN étant égaux, le point A eſt également éloigné des points M, N de la droite CD; de même les rayons MO, NO des arcs PQ, RS étant égaux, le point O eſt encore également éloigné des mêmes points M, N; donc la droite AB qui paſſe par les deux points AO eſt perpendiculaire ſur CM (*N.* 58.).

64. PROBLEME. *Couper une droite* CD (Fig. 34.) *en deux parties égales.*

Des extrémités C & D de la droite CD priſes pour centre, & avec une même ouverture de compas plus grande que la moitié de CD, je décris deux arcs de cercle PQ, RS qui ſe coupent en deux points A, B de part & d'autre de CD, à cauſe que les deux rayons pris enſemble ſont plus grands que CD, (*N.* 59.) & des points A, B je mene la droite AB, laquelle coupe CD en E en deux parties égales.

Car les rayons CA, DA étant égaux par la conſtruction, le point A eſt également éloigné des mêmes extrémités C, D de la droite CD, & de même à cauſe de l'égalité des rayons CB, DB, le

point B eſt également éloigné des mêmes extrémités C, D; donc la droite AB qui paſſe par les deux points A, B eſt perpendiculaire ſur CD, (*N.* 58.) & paſſe par tous les points également éloignés de C & D; (*N.* 56.) ainſi le point E ou la droite AB coupe CD, eſt également éloigné de C & D, & la droite CD eſt coupée en deux également en E.

65. PROBLEME. *Diviſer un angle* ABC (Fig. 35.) *en deux parties égales.*

Du ſommet B pris pour centre, & avec une ouverture de compas à diſcrétion, je décris un arc ANC entre les jambes de l'angle donné, des extrémités A, C de cet arc, & avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de la droite AC menée entre ces extrémités, je décris deux arcs PQ, RS qui ſe coupent en H, & du point H par le ſommet B, je mene la droite AB qui coupe l'angle ABC en deux parties égales.

Car les rayons AB, CB étant égaux par la conſtruction, le point B de la droite HB eſt également éloigné des extrémités A, C de la droite AC, & à cauſe de l'égalité des rayons AH, CH, le point H de la même droite HC eſt également éloigné des extrémités A, C; donc la ligne HB coupe AC en deux parties égales en M, (*N.* 64.) & lui eſt perpendiculaire; (*N.* 58.) ainſi les angles AMB, CMB ſont droits & égaux entr'eux, & les côtés AM, MB du premier, ſont égaux chacun à chacun aux côtés CM, MB du ſecond; or, les droites AB, CB joignent les extrémités de ces côtés, donc l'angle ABM eſt égal à l'angle CBM (*N.* 47.) mais ces deux angles ABM, CBM compoſent enſemble l'angle ABC; donc cet angle eſt diviſé en deux également par la droite HB.

66. PROPOSITION VII. *Si une ligne droite* AB (Fig. 36.) *ſe meut de façon que ſon extrémité* A *parcoure ſucceſſivement tous les points d'une droite* AC, *prolongée ſi l'on veut à l'infini, & que pendant le mouvement la droite* AB *ſoit toujours perpendiculaire ſur la droite* AC; *l'autre extrémité* B *de la ligne* AB *décrira une ligne* BM *indéfinie qui ſera une ligne droite.*

Puiſque la ligne AB eſt toujours perpendiculaire ſur AC, & que ſon extrémité A n'abandonne jamais cette ligne, tous les points de la ligne BM ſont à égale diſtance de AC. (*N.* 55.) Ainſi ſi nous concevons que la ligne BM ſe meuve vers la ligne AC, de façon que tous ſes points ne faſſent pas plus de chemin l'un que l'autre, il eſt clair que lorſque l'un de ſes points ſera parvenu

ſur la ligne AC, tous ſes autres points ſeront auſſi parvenus ſur AC, & que par conſéquent BM tombera toute entiere ſur AC, mais AC eſt droite; donc BM l'eſt auſſi.

67. DEFINITION. Deux lignes droites AC, BM (*Fig.* 36.) ſont dites *Paralelles entr'elles* lorſqu'elles ſont partout à égale diſtance, c'eſt-à-dire lorſque les perpendiculaires menées de tous les points de l'une BM ſur l'autre AC, ſont égales, ou enfin lorſque l'une d'entr'elles BM eſt formée par le mouvement d'une droite AB, toujours perpendiculaire ſur l'autre; & dont l'extrémité A n'abandonne jamais AC, comme il a été dit dans la Propoſition précédente.

68. COROLLAIRES. Donc, 1°. *Toute perpendiculaire* BA *menée d'un point quelconque* B, *de l'une des paralelles* BM *ſur l'autre paralelle* AC, *meſure la diſtance des deux paralelles.* Tous les points de BM ſont éloignés de AC d'une quantité égale à BA; donc BA eſt la diſtance de la droite BM à ſa paralelle AC; or la diſtance de la droite AC à la droite BM ne peut pas être différente de la diſtance de la droite BM à la droite AC; donc BA meſure auſſi la diſtance de AC à BM.

Donc, 2°. *Toute ligne* BA *compriſe entre les deux paralelles & perpendiculaire ſur l'une* AC, *eſt auſſi perpendiculaire ſur l'autre* BM.

Les droites BM, AC étant partout à égale diſtance; ſi du point A je mene une perpendiculaire ſur BM, cette perpendiculaire meſurera la diſtance de AC à BM. Or, la diſtance de AC à BM ne peut être différente de la diſtance de BM à AC, c'eſt-à-dire de la droite BA qui a été menée perpendiculaire ſur AC; donc la perpendiculaire menée de A ſur BM doit être égale à BA; mais cela ne ſçauroit être, ſi la perpendiculaire menée du point A, tomboit en un autre point que B; car en ce cas, AB ſeroit oblique ſur BM, & plus grande que la perpendiculaire; (*N.* 53.) donc BA doit être perpendiculaire ſur BM de même que ſur AC.

Et delà il eſt aiſé de prouver *l'inverſe*, c'eſt-à-dire *que ſi une ligne* AB *eſt perpendiculaire ſur deux autres* BM, AC, *ces deux lignes* BM, AC *ſont paralelles entr'elles*; car ſi on veut que BM ne ſoit paralelle à AC; concevons que par le point B on faſſe paſſer une paralelle à AC, la droite AB étant perpendiculaire ſur AC, ſera auſſi perpendiculaire ſur ſa paralelle; mais AB eſt auſſi perpendiculaire ſur BM; donc il faut que BM & la paralelle menée du point B ſoient la même ligne; autrement une droite AB ſeroit

perpendiculaire ſur deux différentes lignes en un même point B; ce qui eſt impoſſible (*N.* 57.).

Donc, 3°. *D'un même point* B *on ne ſauroit mener deux paralelles à une même ligne* AC, par la raiſon qu'on vient de voir.

Donc, 4°. *Deux perpendiculaires* AB, TR *entre deux paralelles* AC, BM *ſont paralelles entrelles*, puiſque la ligne AC, ou AT eſt perpendiculaire ſur l'une & ſur l'autre.

Donc, 5°. *Les parties* AT, BR *des paralelles compriſes entre deux perpendiculaires* AB, TR *ſont égales entr'elles.* Les perpendiculaires AB, TR ſont paralelles entr'elles comme on vient de voir, & les parties AT, BR ſont perpendiculaires ſur elles; donc les parties AT, BR ſont égales par la définition des paralelles.

69. DEFINITION. Si une lignedroite RS (*Fig.* 37.) coupe deux paralelles BM, AC, 1°. Les angles BHE, CEH qu'elle fait en dedans des paralelles, l'un BHE en haut & à gauche, & l'autre CEH en bas & à droite ſe nomment *angles alternes*; ainſi les angles MHE, AEH ſont auſſi alternes, 2°. Les angles MHR, CER que la droite RS fait du même côté avec les paralelles, ſe nomment *angles du même côté*; les angles MHS, CES ſont donc auſſi *angles du même côté*, de même que les angles BHR, AER & les angles BHS, AES. 3°. Les angles MHE, CEH, que RS fait en dedans des paralelles du même côté, ſe nomment *angles internes oppoſés*; ainſi les angles AEH, BHE ſont auſſi *internes oppoſés.*

70. PROPOSITION VIII. *Si une droite* RS (Fig. 38.) *coupe deux paralelles* BM, AC, *les angles alternes* BHE, CEH *ſont égaux.*

Du point E j'abaiſſe ſur BM la perpendiculaire EV, & du point H ſur AC la perpendiculaire HT; les angles droits EVH, HTE ſont égaux, & à cauſe que les perpendiculaires EV, HT ſont égales. (*N.* 67.) & que les parties VH, ET des paralelles compriſes entre ces perpendiculaires ſont auſſi égales (*N.* 68.) les deux angles égaux EVH, HTE ont les côtés égaux chacun à chacun; or, la droite HE paſſe par les extrémités de ces côtés; donc l'angle EHV que cette droite fait avec le côté EH du premier angle EVH eſt égal à l'angle HET qu'elle fait avec le côté ET du ſecond angle HTE; (*N.* 47.) mais les angles EHV, HET ſont les mêmes que les angles alternes BHE, CEH; donc les angles alternes ſont égaux.

71. COROLLAIRE Ier. *Les angles du même côté* RHM, HET *ſont égaux*; l'angle BHE eſt égal à l'angle RHM qui lui eſt oppoſé au ſommet, (*N.* 49.) & le même angle BHE eſt égal à

ſon alterne HET ; (*N.* 70.) donc les angles RHM, HET ſont égaux.

72. COROLLAIRE II. *Les angles internes oppoſés* MHE, CEH *valent enſemble deux droits ;* l'angle RHM & ſon angle de ſuite MHE valent enſemble deux droits : (*N.* 49.) or, l'angle CEH eſt égal à l'angle RHM; (*N.* 71.) donc l'angle CEH & l'angle MHE valent auſſi enſemble deux droits.

73. COROLLAIRE III. L'inverſe de cette Propoſition & de ſes Corollaires eſt auſſi véritable, c'eſt-à-dire *ſi une ligne droite* RS *qui coupe deux autres lignes droites* BM, AC, *fait les angles alternes égaux ou les angles du même côté égaux, ou les angles internes oppoſés, égaux enſemble à deux droits, les lignes* BM, AC *ſont paralelles.* Car ſi l'on veut que BM ne ſoit pas paralelle à AC, concevons que par le point H on mene une paralelle à la droite AC, la ligne RS qui coupera les deux paralelles fera donc avec elles les angles alternes égaux, &c. & par conſéquent l'angle que la paralelle menée du point H fera avec la ligne RS du côté de S, ſera égal à l'angle TEH ; mais l'angle que la ligne BH fait avec RS du côté de S, eſt auſſi égal à l'angle TEH; donc la ligne BH ſera néceſſairement la même que la paralelle menée du point H, & par conſéquent les droites BH ou BM & AC ſont paralelle.

74. COROLLAIRE IV. *Si deux lignes droites* HE, SR (Fig. 39. 40.) *ſont également inclinées ſur l'une des paralelles* AC, *elles ſont auſſi également inclinés ſur l'autre* BM.

Les deux lignes HE, SR peuvent être également inclinées ſur AC ou d'un même côté ou d'un ſens différent ; ſi elles ſont également inclinées d'un même côté, (*Fig.* 39.) les angles HEC, SRC ſont donc égaux, (*N.* 71.) & partant les angles EHB, RSB qui ſont égaux à leurs alternes HEC, SRC, ſont auſſi égaux, & les droites HE, SR ſont également inclinées ſur BM; & ſi les droites HE, SR ſont également inclinées ſur AC d'un ſens différent (*Fig.* 40.) les angles HER, SRE ſeront donc égaux, & partant leurs alternes EHB, RSM le ſeront auſſi, & les deux droites HE, RS ſeront également inclinées ſur BM dans un ſens différent.

75. PROPOSITION. IX. *Les droites* EH, RS (Fig. 39.) *également inclinées d'un même côté entre deux paralelles* AC, BM *ſont paralelles entr'elles & égales.*

La ligne AC qui coupe les droites EH, RS fait les angles

HEC, SRC du même côté égaux, à cauſe que les lignes ſont également inclinées du même côté; donc EH, RS ſont paralelles (*N.* 73.) ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Des points H, S, j'abaiſſe ſur AC les perpendiculaires HT, SV; ainſi les angles BHT, BSV ſont droits (*N.* 68.) & égaux; c'eſt pourquoi retranchant de ces angles, les angles égaux BHE, BSR (*N.* 74.) les angles reſtans EHT, RSV ſont égaux; or, les angles droits HTE, SVR ſont égaux; mettant donc la figure RVS ſur la figure ETH, en ſorte que la perpendiculaire SV tombe ſur ſon égale HT, l'angle droit RVS tombera ſur ſon égal ETH, & l'angle RSV ſur ſon égal EHT; donc les deux lignes SR, RV tomberont ſur les deux HE, ET & leur ſeront égales chacune à chacune; donc les inclinées EH, SR ſont égales, ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Et cette ſeconde partie de la Propoſition eſt encore vraye, quand les également inclinées entre les paralelles ſont inclinées dans un ſens différent (*Fig.* 40.) ce qu'on démontrera de la même façon.

76. COROLLAIRE Ier. *Les parties* SH, ER (Fig. 39.) *des paralelles compriſes entre les également inclinées d'un même côté, ſont égales.* Nous venons de voir que les droites ET, RV ſont égales. Ajoutant donc à chacune de ces lignes droites TR, nous aurions ER = TV; mais à cauſe des perpendiculaires HT, SV nous avons TV = HS; donc HS = ER.

77. COROLLAIRE II. *Si deux lignes* HE, SR (Fig. 39.) *ſont paralelles entre deux paralelles* BM, AC *elles ſont également inclinées entre ces paralelles, & égales.*

Les deux lignes HE, SR étant paralelles entr'elles, la ligne droite AC qui les coupe fait les angles HEC, SRC du même côté égaux; (*N.* 71.) donc ces lignes ſont également inclinées du même côté, & puiſqu'elles ſont également inclinées, elles ſont égales (*N.* 75.)

78. PROPOSITION X. *Si deux points* H, S, (Fig. 39.) *d'une droite* BM, *prolongée, ſi l'on veut, à l'infini, ſont également éloignés d'une droite* AC, *auſſi prolongée à l'infini, qui eſt d'un même côté par rapport à ces points; la droite* BM *eſt paralelle à* AC, *& cette droite* BM *paſſe par tous les points qui ſont autant éloignés de* AC *du même côté que les points* H, S.

Puiſque les points H, S ſont à égale diſtance de AC, les perpendiculaires HT, menées de ces points ſur AC, ſont égales;

(*N.* 55.) concevons donc que la perpendiculaire HT, ſe meuve de façon que ſon extrémité T parcoure tous les points de la droite AC, & que pendant ce mouvement la droite HT ſoit toujours perpendiculaire ſur AC, il eſt clair que lorſque le point T tombera ſur le point V, la perpendiculaire HT tombera ſur la perpendiculaire SV qui lui eſt égale, car autrement d'un même point V on pourroit élever deux perpendiculaires ſur AC; ce qui eſt impoſſible; (*N.* 51.) or, pendant ce mouvement, l'autre extrémité H de la perpendiculaire HT décrira une ligne HS qui ſera droite, (*N.* 66.) & cette droite prolongée à l'infini, ſera paralelle à AC; (*N.* 67.) donc la droite BM qui paſſe par les deux points H, S de la droite HS, & qui par conſéquent n'eſt pas différente de la droite HS prolongée à l'infini, (*N.* 34.) eſt auſſi paralelle à AC; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Maintenant puiſque BM eſt paralelle à AC, il eſt clair que tous ſes points ſont autant éloignés de AC que les points H, S; mais ſi l'on veut que malgré cela il ſe trouve du même côté quelque point tel que P, qui ſoit autant éloigné de AC que les points H, S, & qui cependant ne ſoit pas ſur BM; je mene du point H au point P, la droite HP, laquelle ſera paralelle à AC à cauſe de ſes deux points H, P également éloignés de AC, & partant d'un même point H, on pourra mener deux paralelles HP, HM à une même droite AC; ce qui eſt impoſſible (*N.* 68.).

79. PROBLEME. *D'un point donné* H (Fig. 39.) *pris hors d'une droite* AC *& qui n'eſt pas dans ſon prolongement, mener une paralelle à la droite* AC.

Du point H j'abaiſſe une perpendiculaire HT ſur AC; d'un autre point V pris ſur AC, j'éléve ſur AC une perpendiculaire VS que je fais égale à HT, la ligne droite HS menée par les extrémités H, S des perpendiculaires, eſt la paralelle demandée; car les deux points H, S par leſquels elle paſſe, ſont également éloignés de la droite AC; ce qui la rend paralelle (*N.* 78.)

Ou bien du point donné H, (*Fig.* 41.) je mene ſur AC une oblique HR, & faiſant en H un angle RHP égal à l'angle HRA, le côté HP de l'angle RHP eſt la paralelle demandée à cauſe des angles alternes égaux RHP, HRA.

80. REMARQUE. On ajoute ordinairement à la définition des paralelles *qu'elles ne ſe rencontreront jamais quand même on les prolongeroit à l'infini*; mais il m'a paru qu'il ſuffiſoit de dire qu'elles *étoient toujours à égale diſtance*; car il eſt viſible que ſi elles ſont toujours

toujours à égale diſtance, elles ne peuvent jamais ſe rencontrer.

81. PROPOSITION XI. *Si une droite* PQ (Fig. 42. 43.) *eſt paralelle à l'une des deux paralelles* BM, AC, *elle eſt auſſi paralelle à l'autre.*

Il peut ſe faire que la droite PQ paralelle à BM ſoit entre les paralelles BM, AC (*Fig.* 42.) ou au-delà de AC (*Fig.* 43.) ou au-delà de BM (*Fig.* 44.).

Si PQ paſſe entre les paralelles BM, AC, je mene entre ces paralelles la perpendiculaire HT qui coupe PQ en E, & à cauſe que PQ & BM ſont paralelles par ſuppoſition; la droite HE perpendiculaire ſur BM eſt auſſi perpendiculaire ſur PQ; (*N.* 68.) or, le prolongement ET de la droite HE eſt encore perpendiculaire ſur PQ (*N.* 51.) & ce même prolongement ET eſt auſſi perpendiculaire ſur AC, puiſque la ligne HET eſt perpendiculaire ſur AC; donc les droites PQ, AC ſont paralelles (*N.* 68.).

Si PQ paralelle à BM eſt au-delà de AC, je mene entre ces deux lignes la perpendiculaire HE, & la partie HT de cette perpendiculaire, ſera perpendiculaire ſur AC, à cauſe que BM, AC ſont paralelles : (*N.* 51.) or, le prolongement TE de HT eſt encore perpendiculaire ſur AC, (*N.* 51.) & le même prolongement eſt perpendiculaire ſur PQ, puiſque la ligne entiere HE eſt perpendiculaire ſur PQ; donc les lignes AC, PQ ſont paralelles, (*N.* 68.) enfin ſi PQ paralelle à BM eſt au-delà de BM (*Fig.* 44.) je mene entre ces deux lignes la perpendiculaire HE, & par conſéquent le prolongement HT de cette perpendiculaire étant encore perpendiculaire ſur BM (*N.* 51.) ſera auſſi perpendiculaire ſur AC paralelle à BM (*N.* 68.) donc la ligne droite EHT ſera perpendiculaire ſur PQ & AC, & ces deux droites ſeront paralelles (*N.* 68.).

82. COROLLAIRE. *Donc ſi deux droites* BM, AC *ſont paralelles à une troiſiéme* PQ, *elles ſont paralelles entr'elles.* Car, 1°. Si la droite PQ eſt entre les deux BM, AC, (*Fig.* 42.) je prens ſur PQ un point E, duquel j'éleve de part & d'autre des perpendiculaires ſur PQ qui aillent couper les droites BM, AC; ainſi, à cauſe que BM & PQ ſont paralelles, la perpendiculaire EH ſera auſſi perpendiculaire ſur BM (*N.* 68.) & à cauſe que AC & PQ ſont auſſi paralelles, la perpendiculaire ET ſera auſſi perpendiculaire ſur AC : (*N.* 68.) or, les deux perpendiculaires EH, ET ſur PQ ne font qu'une même ligne droite HE : (*N.* 51.) donc, à cauſe que cette droite HE eſt perpendiculaire ſur les deux BM, AC, ces deux lignes ſont paralelles, (*N.* 68.) 2°.

Si la droite PQ eſt au-delà des deux BM, AC : par exemple, au-delà de AC, (*Fig.* 43.) je mene entre PQ & la paralelle BM la perpendiculaire EH, & à cauſe que AC eſt auſſi paralelle à PQ, la partie ET de la perpendiculaire EH ſera auſſi perpendiculaire ſur AC; (*N.* 68.) donc le prolongement TH de la partie ET étant encore perpendiculaire ſur AC de même qu'il l'eſt ſur BM, les droites BM & AC ſeront paralelles, (*N.* 68.) & on démontreroit la même choſe ſi PQ étoit au-delà de BM.

83. PROPOSITION XII. *Si d'un point quelconque* A (Fig. 45.) *pris hors d'une droite* BM *prolongée même à l'infini, on mene une perpendiculaire ſur cette droite, & pluſieurs inclinées*, AB, AD, AH, &c. *la perpendiculaire ſera toujours du côté des moindres Angles que les obliques font avec la droite* BM, *& les obliques les plus longues ſeront les plus inclinées.*

Du point H où l'oblique AH coupe la droite BM, j'éleve la perpendiculaire HL laquelle laiſſera le point A ſur ſa gauche ou ſur ſa droite; car ſi elle paſſoit par A, elle auroit les deux points H, A communs avec la droite AH, & par conſéquent elle ſeroit la même que l'oblique AH (*N.* 34.) & ne ſeroit pas perpendiculaire ſur BM; ſuppoſons donc que le point A ſoit à gauche de HL, les angles LHB, LHM que la perpendiculaire fait ſur BM ſont droits, (*N.* 51.) par conſéquent ils valent enſemble deux droits, de même que les angles de ſuite AHB, AHM que l'oblique AH fait avec la même droite BM: (*N.* 49.) or, à cauſe que le côté AH de l'angle AHB eſt à gauche de la perpendiculaire, l'angle AHB eſt moindre que l'angle droit LHB; donc l'autre angle AHM eſt plus grand que l'autre angle droit LHM; ainſi l'angle AHB eſt le plus petit des deux angles que l'inclinée AH fait ſur BM; maintenant ſi la perpendiculaire abaiſſée du point A ſur BM coupoit cette droite du côté du plus grand angle AHM, il faudroit qu'elle coupât auparavant la perpendiculaire HL en quelque point S, & partant, il s'enſuivroit que d'un même point S pris hors d'une droite BM, on pourroit mener deux perpendiculaires SH, SM; ce qui eſt impoſſible; (*N.* 52.) donc il faut que la perpendiculaire menée du point A coupe BM en quelque point E du côté du moindre angle AHB que l'oblique AH fait avec BM, & ainſi des autres; ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Soient les deux obliques AB, AD du même côté de la perpendiculaire AB; du point B où la plus éloignée coupe la ligne BM, je

mene une droite BR paralelle à l'autre oblique AD; ainſi à cauſe que BM coupe les paralelles BR, DA, les angles du même côté RBM, ADM ſont égaux; (*N.* 71.) or, à cauſe que l'oblique BA coupe ces deux paralelles, l'angle ABM eſt moindre que l'angle RBM; donc il eſt auſſi plus petit que l'angle ADM, & partant l'oblique AB plus longue que l'oblique AD, eſt auſſi plus inclinée ſur BM que AD.

Si l'oblique la plus longue AB eſt du côté de B par rapport à la perpendiculaire AE, & que l'autre oblique plus courte AH ſoit de l'autre côté, je prends de ce même côté une oblique AM égale à l'oblique AB; ainſi les diſtances EB, EM du pied de la perpendiculaire AE aux points B, M des obliques ſont égales (*N.* 54.) & les angles égaux AEB, AEM ont les côtés AE, EB égaux chacun à chacun aux côtés AE, EM : donc l'angle ABM fait avec le côté BE par la ligne AB qui joint les extrémités des côtés du premier angle AEB, eſt égal à l'angle AME fait avec le côté ME par la ligne AM qui joint les extrémités des côtés du ſecond angle AEM : (*N.* 47.) or, à cauſe que l'oblique AM eſt plus grande que l'oblique AH qui eſt du même côté; elle eſt auſſi plus inclinée ſur BM que AH, comme nous venons de le prouver; donc l'oblique AB qui eſt autant inclinée que l'oblique AM, eſt auſſi plus inclinée que AH qui eſt plus courte qu'elle, ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

84. COROLLAIRE. *Donc les obliques égales ſont également inclinées ſur* BM, *& font avec elles des angles égaux;* ce qu'on démontrera, comme nous avons fait à l'égard des obliques égales AB, AM.

85. *REMARQUE.* On a toujours reproché à Euclide d'avoir pris pour axiome *que deux lignes qui ne ſont pas paralelles, étant prolongées de part & d'autre doivent ſe couper*, & la raiſon en eſt, a-t-on dit, parce qu'il y a dans la Géométrie des lignes qui s'approchent de plus en plus, & qui cependant ne ſe coupent jamais, & que d'ailleurs Euclide pouvoit démontrer cet axiome : or, ſi ce reproche étoit légitime, on pourroit le faire auſſi à quiconque avanceroit ſans preuve que *deux lignes droites qui ſe coupent, s'éloignent de plus en plus entr'elles, à meſure qu'elles s'éloignent du point où elles ſe coupent & que deux lignes qui ſont plus proches d'un côté que d'un autre, s'éloignent de plus en plus, en allant de la moindre diſtance à la plus grande, & s'approchent de plus en plus, en allant de la plus grande diſtance à la moindre.* Car ces deux propoſitions peuvent ſe

démontrer; & d'ailleurs il y a dans la Géométrie des lignes qui n'ont pas ces propriétés; afin donc qu'on ne m'accuſe pas d'uſer de ſuppoſitions, & pour faire voir qu'on peut fort bien prouver ce qu'on avance, ſans avoir recours à la méthode, ſans ordre, dont Euclide s'eſt ſervi; voici comment je démontre ces trois propoſitions.

86. PROPOSITION. XIII. *Si deux lignes droites ſe coupent, elles s'éloignent entr'elles de plus en plus, à meſure qu'elles s'éloignent du point où elles ſe coupent.*

Les deux droites AB, AC (*Fig.* 46.) ſe coupent en A; ſi l'on veut que ces droites ne s'éloignent pas de plus en plus, à meſure qu'elles s'éloignent du point A, il faudra donc qu'il ſe trouve ſur AB des points tels que D & E qui ſoient également éloignés de la droite AC, ou dont le plus éloigné E du point A ſe trouve plus proche de la droite AC que le moins éloigné D.

Si l'on veut donc que les points D, E ſoient à égale diſtance de AC, la droite DE qui paſſera par ces deux points ſera paralelle à AC, (*N.* 78.) or, cette droite DE eſt partie de la droite AB qui coupe AC; donc il s'enſuivroit qu'une droite AB auroit une partie DE paralelle à une droite AC, & une autre partie DA qui couperoit cette même droite; ce qui eſt impoſſible, puiſque deux paralelles prolongées à l'infini, ſont toujours à égale diſtance.

Si l'on veut que le point E de la droite AB, lequel eſt plus éloigné du point A que le point D ſoit cependant plus proche de la droite AC que le point D, je mene du point D une droite DM paralelle à AC, & par conſéquent tous les points de cette paralelle ſeront autant diſtans de la droite AC que le point D; & comme on ſuppoſe que le point E eſt plus proche de AC que le point D, il faudroit néceſſairement que le point E fut entre les paralelles DM, AC comme en P; or la droite AB coupe la paralelle DM en D, & par conſéquent cette droite étant parvenuë en D, paſſe au-delà de la paralelle; donc, afin qu'elle paſſât par P, il faudroit qu'elle coupât la paralelle DM en un autre point; mais une droite ne peut pas couper un autre droite en deux points; (*N.* 35.) donc il n'eſt pas poſſible que le point E ſoit plus proche de AC que le point D; ainſi il faut néceſſairement que tous les points de AB s'éloignent de plus en plus de AC, à meſure qu'ils s'éloignent du point A.

87. PROPOSITION XIV. *Si deux droites* AB, CD (Fig. 47.)

ne ſont pas partout à égale diſtance, ces droites prolongées à l'infini, s'éloignent de plus en plus, en allant de la petite diſtance vers la grande, & s'approchent de plus en plus en allant du ſens contraire.

Le point A de la ligne AB eſt plus proche de la ligne CD que l'autre point B; je mene du point A la droite AM paralelle à CD, & dont par conſéquent tous les points ſont autant éloignés de CD que le point A : ainſi le point B de la ligne AB, étant plus éloigné de CD que le point A, la ligne AB eſt en deçà de la ligne AM par rapport à CD. Or, AB coupe la ligne AM; donc par la propoſition précédente, tous ſes points en allant de A en B & au-delà de B, s'éloignent de plus en plus de CD, paralelle à AM.

Maintenant, ſi je prolonge BA au-delà du point A en S, & AM auſſi au-delà de A en R, le prolongement AS, de BA paſſera de l'autre côté de la paralelle MR qu'elle coupe, & par conſéquent le prolongement ſera entre les deux paralelles RM, CD, & comme AS s'éloignera de plus en plus de AR, à meſure qu'elle s'éloignera du point A par la propoſition précédente, il s'enſuit que AS s'approchera de plus en plus de CD prolongée; donc, &c.

88. PROPOSITION XV. *Si deux droites* AB, CD (Fig. 48.) *ne ſont pas partout à égale diſtance, ces deux droites prolongées du côté de leurs moindres diſtances doivent ſe couper.*

Des points A, B de la droite AB, j'abaiſſe ſur la droite CD prolongée, s'il le faut, les perpendiculaires AR, BD, & trouvant que AR eſt plus courte que BD, je vois que le point A de la ligne AB eſt plus proche de CD que l'autre point B. Du point le plus proche A, j'abaiſſe ſur BD la perpendiculaire AM; ainſi la ligne BD étant perpendiculaire ſur les deux AM, CD, ces deux lignes ſont paralelles, (*N.* 68.) & par conſéquent le point M de la ligne AM étant à même diſtance de la ligne CD que le point A, doit être moins éloigné de CD que le point B de la droite AB; c'eſt-à-dire que la perpendiculaire AM coupe ſur BD une partie BM. Je porte la partie BM ſur BD pluſieurs fois juſqu'à ce que je paſſe au-delà du point D; par exemple, ici de M en N & de N en P qui eſt au-delà de D; ce que je puis toujours faire, à cauſe que la ligne BD n'étant pas infinie, puiſqu'elle pourroit encore être prolongée au-delà des points B & D, ne ſauroit contenir ſa partie BM une infinité de fois; des points de diviſion N, P, j'éléve des perpendiculaires indéfinies NS, PV ſur BP, leſquelles

ſeront paralelles aux droites AM, CD, à cauſe que BD eſt perpendiculaire ſur toutes ces lignes, (*N.* 68.) cela poſé.

Les droites ARL, BDP étant perpendiculaires ſur DC ſont paralelles entr'elles (*N.* 68.) & perpendiculaires ſur les droites AM, NS, PV paralelles à CD; (*N.* 68.) ainſi leurs parties AQ, MN compriſes entre les paralelles AM, NS ſont égales, (*N.* 77.) & comme MN eſt égal à BM par la conſtruction, AQ eſt auſſi égal à BM; prenant donc ſur NS la partie QS égale à MA, les angles BMA, AQS ſont égaux & ont les côtés égaux chacun à chacun; c'eſt pourquoi menant la ligne SA qui joint les extrémités des côtés de l'angle AQS, cette ligne fera avec le côté AQ de cet angle AQS un angle SAQ égal à l'angle, ABM fait avec le côté BM de l'autre angle BMA par la droite AB; (*N.* 47.) or, la ligne BA étant entre les deux paralelles BD, AR, cette ligne prolongée du côté de A feroit en A avec la paralelle AQ un angle égal à l'angle du même côté ABM, (*N.* 71.) & par conſéquent égal à l'angle SAQ; donc le prolongement de BA ne peut pas être différent de la ligne AS, & la ligne BA prolongée doit couper la droite SN.

Je mene du point S la droite ST perpendiculaire ſur CD prolongée, & cette droite ST étant prolongée en X, eſt auſſi perpendiculaire ſur PV paralelle à DT; (*N* 68.) de plus, la même droite ST ſera paralelle à BP qui eſt auſſi perpendiculaire ſur DT; (*N.* 68.) ainſi les droites SX, NP perpendiculaires entre les paralelles SN, TD ſont égales, (*N.* 67.) & à cauſe de NP=BM nous aurons SX=BM; prenant donc ſur PV la partie XV égale à AM, & menant la droite VS, les angles BMA SXV ſont égaux, & ont les côtés égaux chacun à chacun; c'eſt pourquoi je prouverai comme ci-deſſus, que l'angle ABM eſt égal à l'angle VSX; mais ſi la droite BA déja prolongée en S, étoit encore prolongée au-delà de S, elle feroit en S avec la droite SX paralelle à BP un angle égal à l'angle ABP, (*N.* 71.) & par conſéquent égal à l'angle VSX; donc le ſecond prolongement SV de la droite AB ne doit pas être différent de la droite SV, & partant AB prolongée en S puis au-delà de S doit couper la droite PV; donc, à plus forte raiſon, la droite AB prolongée coupera en quelque point E la droite CD prolongée, puiſque celle-ci étant toujours entre ſes deux paralelles SN, PV, la droite AB ne peut couper SN & PV ſans couper DE.

CHAPITRE III.

Des Triangles & des Figures de pluſieurs côtés conſidérés par rapport à leur côtés & à leurs Angles.

89. *Definitions.* Tout eſpace plan renfermé par pluſieurs lignes, ſe nomme *Figure*; ſi les lignes qui renferment cet eſpace ſont droites, la figure ſe nomme *Figure rectiligne*; ſi ces lignes ſont courbes, la figure eſt dite *curviligne*, & ſi les unes ſont droites & les autres courbes, la figure ſe nomme *mixtiligne*. Nous ne parlerons ici que des rectilignes.

90. La plus ſimple de toutes les figures rectilignes, eſt celle qui eſt compriſe ſous trois lignes droites & qu'on nomme *Triangle*; car il eſt clair qu'il faut au moins trois lignes droites pour renfermer un eſpace.

91. Le triangle conſidéré par rapport à ſes côtés eſt *Equilatéral* lorſque ſes trois côtés ſont égaux; *Iſocele* lorſqu'il n'y en a que deux égaux, & *Scalene* lorſque ſes trois côtés ſont inégaux.

92. Le triangle conſidéré par rapport à ſes angles, ſe nomme *Rectangle* lorſque l'un de ſes angles eſt droit, *Ambligone* ou *Obtusangle* lorſqu'il y a un angle obtus; *Oxigone* ou *Acutangle*, lorſque ſes trois angles ſont aigus.

93. La *baſe* d'un triangle eſt le côté ſur lequel on conçoit qu'il s'appuye, & il eſt indifférent de prendre pour baſe lequel on voudra de ſes côtés; mais ordinairement dans le triangle rectangle, on prend pour baſe le côté oppoſé à l'angle droit, & cette baſe ſe nomme *Hypothénuſe*, & dans un triangle iſocele, on prend pour baſe le côté qui eſt inégal aux autres.

94. La hauteur d'un triangle ABC (*Fig.* 49. 50.) eſt la perpendiculaire BD abaiſſée ſur la baſe AC de l'angle oppoſé B, qu'on nomme alors le *ſommet* du triangle, & il n'importe pas que cette perpendiculaire tombe ſur la baſe en dedans du triangle, (*Fig.* 49.) ou ſur la baſe prolongée en dehors; (*Fig.* 50.) car, par le mot de *hauteur*, on entend la diſtance du ſommet à la baſe, laquelle doit ſe meſurer par le chemin le plus court, c'eſt-à-dire par la perpendiculaire.

95. Lorſqu'on prolonge l'un des côtés AC (*Fig.* 50.) d'un

triangle, l'angle BCD fait par ſon prolongement CD, avec ſon côté voiſin BC, ſe nomme *Angle externe*, & les trois angles du triangle ſe nomment *Angles internes*.

95. PROPOSITION XVI. *Dans tout triangle* ABC (Fig. 49.) *deux côtés quelconque pris enſemble, ſont plus grands que le troiſiéme.*

Le côté AB eſt droit entre ſes extrêmités A, B, donc il eſt plus court que les deux autres BC, AC, qui pris enſemble ſe terminent aux mêmes extrêmités, & ainſi des autres.

96. PROBLEME. *Avec trois lignes droites données conſtruire un triangle.*

Si les trois lignes données ne ſont pas telles qu'en les prenant deux à deux, elles ſoient toujours plus grande que la troiſiéme, le Problême eſt impoſſible, car c'eſt une condition néceſſaire dans tout triangle (*N.* 95.) mais ſi cette condition eſt remplie, je prens l'une des droites données AC (*Fig.* 51.) pour baſe; de l'extrêmité A priſe pour centre, & avec une ouverture de compas égale à la ſeconde des lignes données, je décris un arc PQ; de l'autre extrêmité C priſe pour centre, je décris un autre arc RS du même côté que l'arc PQ; & comme les deux rayons pris enſemble ſont plus grand que la baſe AC, les deux arcs PQ, RS ſe coupent en un ſeul point B hors de la ligne AC (*N.* 59.). C'eſt pourquoi menant du point B les droites BA, BC le triangle ABC eſt le triangle demandé; car le rayon BA de l'arc PQ eſt égale à la ſeconde des lignes données, le rayon BC de l'arc RS eſt égal à la troiſiéme, & la baſe AC eſt égale à la premiere.

97. PROPOSITION XVII. *Dans tout triangle* (Fig. 52.) *l'angle externe* BCD *vaut les deux internes oppoſés* CBA, BAC, *& les trois angles du triangle pris enſemble valent deux angles droits.*

De l'angle B oppoſé au côté polongé AC, je mene MN parallelle à ce côté AC; l'angle BCD eſt donc égal à ſon alterne MBC (*N.* 70); or l'angle MBC vaut les deux angles MBA, ABC, & l'angle MBA eſt égal à ſon alterne BAC, donc l'angle externe BCD égal à l'angle MBC, eſt égal aux deux internes oppoſés BAC, ABC ce qu'il falloit 1°. démontrer:

L'angle BCA eſt égal à ſon alterne CBN & l'angle BAC eſt égal à ſon alterne MBA, donc les trois angles MBA, ABC, CBN valent enſemble les trois angles du triangle; décrivant donc du ſommet commun B pris pour centre & avec un rayon quelconque une circonference de cercle, les trois arcs MR, RS, SN, compris entre ces angles & qui ſont leur meſure, compoſent enſemble

ſemble une demi-circonference MRSN, à cauſe que la droite MN qui paſſe par le centre eſt un diametre, ainſi les trois angles pris enſemble vaudront la demi circonference ou deux angles droits, & par conſequent les trois angles d'un triangle valent enſemble deux angles droits ; ce qu'il falloit 2°. démontrer.

98. COROLLAIRES. Donc 1°. *deux angles d'un triangle ſont toujours moindres que deux droits*, puiſque les trois enſemble n'en valent pas davantage. 2°. *Si dans un triangle l'un des angles eſt droit ou obtus, les deux autres ſont chacun aigus*, car s'il s'en trouvoit un autre qui fut droit ou obtus, les trois enſemble vaudroient plus de deux droits. 3°. *Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles ou la ſomme de deux angles égale à la ſomme des deux angles, le troiſiéme angle ſera égal au troiſiéme* ; car autrement la ſomme totale des trois angles de l'un des triangles ne ſeroit pas égale à la ſomme des trois angles de l'autre ; & partant l'une ou l'autre de ces ſommes vaudroit plus ou moins de deux droits.

99. DEFINITION. Je dirai que deux triangles ſont *parfaitement égaux*, lorſqu'en les mettant l'un ſur l'autre, les côtés tombent ſur les côtés & les angles ſur les angles, & ce qui me fait ajouter le terme de *parfaitement* à celui d'*égaux*, c'eſt qu'il y a des triangles, qui ſans pouvoir s'ajuſter les uns ſur les autres, ſont cependant égaux, c'eſt-à-dire, que les eſpaces que leurs lignes renferment ſont égaux entr'eux, comme on verra dans la ſuite.

100. PROPOSITION XVIII. *On peut toujours conclure que deux triangles* ABC, abc *ſont parfaitement égaux, ſi l'on ſait que les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés de l'autre chacun à chacun ; ou que deux côtés* AB, BC *ſont égaux à deux côtés* ab, bc, *chacun à chacun, & l'angle compris* ABC *égal à l'angle compris* abc, *ou enfin que l'un des côtés* AC *eſt égal à l'un des côtés* ac, *& les angles faits aux extrêmités* A, C *égaux aux angles faits aux extrêmités* a, c.

Si les trois côtés ſont égaux, des extrêmités A, C de la baſe AC priſes pour centres, & avec des rayons égaux aux deux autres côtés AB, BC, je décris des demi-circonferences RBH, SBM du même côté de la baſe AC prolongée de part & d'autre, je fais la même choſe à l'égard de l'autre triangle *abc* ; ainſi mettant la baſe AC ſur ſon égale *ac*, les centres A, C des demi-circonferences RBH, SBM, tomberont ſur les centres *a*, *c* des demi-circonferences *rbh*, *sbm*, les rayons AR, CS, ſur les rayons *ar*, *cs* qui leur ſont égaux chacun à chacun ; donc les demi-circonferences RBH, SBM, tomberont ſur les demi-circonferences *rbh*,

sbm, & le point B où les deux premieres ſe coupent ſur le point *b* où ſe coupent les deux dernieres. Donc les droites BA, BC tomberont ſur les droites *ba*, *bc*, & partant les deux triangles ABC, *abc* s'ajuſteront & ſeront parfaitement égaux. Ce qu'il falloit 1°. démontrer :

Si les côtés AB, BC ſont égaux chacun à chacun aux côtés *ab*, *bc*, & l'angle compris ABC, égal à l'angle compris *abc*, je mets l'angle ABC ſur ſon égal *abc*, & partant les côtés AB, BC tomberont ſur leur égaux *ab*, *bc*, & la droite AC ſur la droite *ac*; & les deux triangles ſeront parfaitement égaux. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Si la baſe AC eſt égale à la baſe *ac*, & les angles faits en A & C égaux chacun à chacun aux angles faits en *a* & *c*, je mets BC ſur ſon égale AC, les angles A & C tomberont ſur leur égaux *a* & *c*, & partant les droites AB, BC, ſur les droites *ab*, *bc*, & le point B où les deux premiéres ſe coupent ſur le point *b* où les deux autres ſe coupent; ainſi les deux triangles s'ajuſteront & ſeront parfaitement égaux.

101. COROLLAIRE. *On ne peut conclure que deux triangles ſont parfaitement égaux, quoique l'on ſache que les trois angles ſont égaux aux trois angles chacun à chacun, ou qu'un côté & un angle ſont égaux à un côté & un angle, ou qu'un côté & deux angles ſont égaux à un côté & deux angles, à moins que les deux angles de part & d'autre ne ſoient faits aux extrêmités des côtés égaux.*

Soit le triangle ABC (*Fig.* 54); je coupe l'un des côtés AB en un point D, & de ce point je mene une droite DE paralelle à l'un des côtés AC, & qui coupe l'autre côté BC en un point E; ainſi le côté AB coupant les deux paralelles AC, DE, fait les angles BAC, BDE du même côté égaux (*N.* 71); de même le côté BC coupant les deux paralelles AC, DE, les angles BCA, BED du même côté ſont égaux. Or l'angle B eſt commun aux deux triangles ABC, DBE, donc ces deux triangles ont les trois angles égaux chacun à chacun; mais il eſt viſible que ces deux triangles ne ſont pas égaux, donc on ne peut conclure l'égalité des triangles de l'égalité de leurs angles. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Soit le triangle ABC (*Fig.* 55) de l'extrêmité C de l'un des côtés, je mene ſur tous les points du côté oppoſé AB prolongé même, des droites CP, CM, & ainſi j'ai les triangles APC, ABC, AMC, & qui ſont tous inégaux, car les uns ſont parties des au-

tres; cependant tous ces triangles ont le même côté AC, & un angle A commun; donc de l'égalité d'un côté & d'un angle, on ne peut pas conclure l'égalité de deux triangles. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Enfin ſoit le triangle ABC (*Fig.* 56.) dont je ſuppoſe que l'angle B n'eſt pas égal à l'angle C; je fais en C un angle égal à l'angle B, & la jambe CM de cet angle tombera ſur AB ptolongé en M, ſi l'angle B eſt plus grand que l'angle ACB, & au contraire la jambe CP de l'angle fait en C tombera ſur AB entre A & B, ſi l'angle B eſt plus petit que l'angle ACB. Ot dans l'un & l'autre cas, le triangle ABC, ne ſera égal ni au triangle ACM ni au triangle ACP, quoique les uns & les autres de ces triangles ayent un côté AC commun & deux angles égaux; donc de l'égalité d'un côté & de deux angles quelconques, on ne peut pas conclure l'égalité de deux triangles. Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

102. PROPOSITION XVIII. *Deux triangles rectangles* ACB, acb (Fig. 57.) *ſeront toujours parfaitement égaux entr'eux ſi l'hypothenuſe* AB *& l'un des côtés* AC *de l'un ſont égaux chacun à chacun à l'hypothenuſe* ab *& au côté* ac *de l'autre, ou ſi les deux côtés* AC, CB, *ſont égaux aux côtés* ac, cb *de l'autre; mais ſi l'hypothenuſe* AB *& le côté* AC *de l'un* (Fig. 58.) *ſont égaux aux deux côtés* cb, ac *de l'autre chacun à chacun, les deux triangles ne ſont pas parfaitement égaux.*

Si l'Hypothenuſe AB & le côté AC ſont égaux chacun à chacun à l'hypothenuſe *ab* & au côté *ac*, je mets le côté AC ſur ſon égal *ac* & à cauſe de l'angle droit ACB égal à l'angle droit *acb*, le côté CB tombera ſur la direction du côté *cb*, & tous les deux ſeront égaux, car ſi CB étoit plus grand que *cb*, le point B tomberoit au-delà de *b* par exemple en *e* & l'hypothenuſe AB tomberoit ſur *ae*; & comme elle ſeroit plus éloignée de la droite *ac* perpendiculaire ſur *ce* que l'hypothenuſe *ab*, elle ſeroit plus longue que cette hypothenuſe (*N.* 53.) ce qui eſt contre la ſuppoſition. De même ſi CB étoit plus courte que *cb*, ſon point B tomberoit entre *b* & *e*, & l'hypothenuſe AB couperoit *cb* en un point plus proche de la perpendiculaire que l'hypothenuſe *ab*, d'où il s'enſuivroit que AB ſeroit moindre que *ab* (*N.* 53.) ce qui eſt encore contre la ſuppoſition; donc CB doit tomber ſur *cb* & les deux triangles doivent être parfaitement égaux. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Si les deux côtés AC, CB ſont égaux chacun à chacun aux

deux côtés *ac*, *cb* les deux triangles ſeront parfaitement égaux à cauſe de l'angle droit compris B égal à l'angle droit compris *b* (*N.* 100.) Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Si l'Hypothenuſe AB (*Fig.* 58.) & le côté AC ſont égaux chacun à chacun aux côtés *cb*, *ac*; le côté CB étant perpendiculaire ſur AC eſt plus court que l'hypothenuſe AB (*N.* 59.) ainſi dans l'autre triangle *abc*, le côté *cb* égal à AB, eſt plus grand que le côté CB du premier triangle, & comme *cb* étant perpendiculaire ſur *ac* eſt plus petit que l'oblique *ab*, il s'enſuit que l'hypothenuſe *ab* du ſecond triangle eſt plus grande que le côté AC du premier, ainſi ces deux triangles n'ayant pas les côtés égaux chacun à chacun ne ſont pas parfaitement égaux. Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

103. PROPOSITION XIX. *Dans tout triangle iſoſcele les deux angles ſur la baſe, c'eſt-à-dire ſur le côté inégal ſont égaux; dans tout triangle équilateral les trois angles ſont égaux; dans tout triangle ſcalene, les trois angles ſont inégaux, le plus grand eſt celui qui eſt oppoſé au plus grand côté, & le moindre eſt celui qui eſt oppoſé au plus petit côté.*

Si le triangle ABC (*Fig.* 59.) eſt iſoſcele & que AC ſoit le côté inégal, les deux côtés égaux AB, BC ſont deux obliques égales menées du point A ſur la droite AC; (*N.* 54.) donc ces obliques ſont également inclinées ſur AC (*N.* 84.), & partant les angles BAC, BCA ſur la baſe ſont égaux. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Si le triangle ABC (*Fig.* 60.) eſt équilateral, je le conſidere comme iſoſcele ſur l'un de ſes côtés AC, & par conſéquent les angles A, C ſont égaux, je le conſidere auſſi comme iſoſcele ſur le côté AB, & partant les angles A, B, ſont égaux, donc les trois angles A, C, B ſont égaux. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Si le triangle ABC eſt ſcalene (*Fig.* 61.), & que le côté AC ſoit le plus grand, & le côté AB le moindre. Je prolonge le côté moyen en E juſqu'à ce que CE ſoit égal à AC; & je tire la ligne EA. Le triangle ACE eſt donc iſoſcele & les angles CEA, CAE ſont égaux. Or l'angle ABC externe au triangle AEB étant égal aux deux internes oppoſés AEB, EAB (*N.* 97.) eſt plus grand que le ſeul AEB ou CEA, donc il eſt auſſi plus grand que l'angle CAE, & à plus forte raiſon eſt-il plus grand que l'angle CAB qui n'eſt qu'une partie de l'angle CAE. Ainſi dans le triangle ſcalene ABC l'angle ABC oppoſé au plus grand côté AB eſt plus grand que l'angle CAB oppoſé au côté moyen CB.

Je prolonge le petit côté BA en M, juſqu'à ce que BM ſoit égal au côté moyen BC, & je mene la droite MC, le triangle MBC eſt donc iſoſcele & l'angle BMC eſt égal à l'angle BCM ; or l'angle BAC externe au triangle AMC étant égal aux deux internes oppoſés BMC, ACM (*N.* 97.) eſt plus grand que le ſeul AMC ou BMC, donc il eſt plus grand auſſi que l'angle BCM, & à plus forte raiſon eſt-il plus grand que l'angle BCA qui n'eſt qu'une partie de l'angle BCM, ainſi dans le triangle BAC ſcalene, l'angle BAC oppoſé au côté moyen BC eſt plus grand que l'angle BCA oppoſé au plus petit côté ; mais nous venons de voir que l'angle ABC oppoſé au plus grand côté AC eſt plus grand que l'angle BAC oppoſé au moyen, donc à plus forte raiſon l'angle ABC eſt plus grand que l'angle BCA oppoſé au petit. Donc, & ce qu'il falloit 3°. démontrer.

104. COROLLAIRE I. *En général dans tout triangles les plus grands angles ſont oppoſés aux plus grands côtés.* Nous venons de démontrer ceci à l'égard du triangle ſcalene, nous avons vû auſſi que dans le triangle équilateral tous les angles ſont égaux, à cauſe que les côtés auſquels ils ſont oppoſés ſont égaux ; & que dans le triangle iſoſcele les angles oppoſés aux côtés égaux ſont égaux ; il ne reſte donc qu'à faire voir que dans le triangle iſoſcele, l'angle oppoſé à la baſe eſt plus grand que chacun des deux égaux, ſi la baſe eſt plus grande que chacun des côtés égaux, & plus petit ſi la baſe eſt plus petite. Ce que je fais ainſi :

Si la baſe AC (*Fig.* 62.) du triangle iſoſcele ABC eſt moindre que chacun des côtés égaux AB, BC, je prolonge cette baſe en D, juſqu'à ce que AD ſoit égal à AB, & je mene la droite BD ; ainſi le triangle BAD eſt iſoſcele & les angles ABD, ADB ſont égaux ; or l'angle ACB externe au triangle CBD étant égal aux deux internes oppoſés CDB & CBD (*N.* 97.) eſt plus grand que CDB ou ADB, donc l'angle ACB eſt auſſi plus grand que l'angle ABD, & à plus forte raiſon plus grand que l'angle ABC qui n'eſt qu'une partie de l'angle ABD ; ainſi dans le triangle iſoſcele ABC l'angle ACB oppoſé au côté AB plus grand que la baſe AC eſt plus grand que l'angle ABC oppoſé à cette baſe.

Si la baſe AC (*Fig.* 63.) eſt plus grande que chacun des deux côtés égaux AB, BC ; je prolonge l'un des côtés AB juſqu'à ce que AD ſoit égal à AC ; ainſi dans le triangle iſoſcele DAC, j'ai l'angle ADC égal à l'angle ACD, & comme l'angle ABC externe au triangle CBD eſt plus grand que le ſeul interne CDB,

puiſqu'il vaut les deux internes oppoſés (*N.* 97.) ce même angle ABC eſt plus grand auſſi que l'angle ACD égal à CDB ou ADC, & à plus forte raiſon plus grand que l'angle ACB qui n'eſt qu'une partie de l'angle ACD. Ainſi dans le triangle iſoſcele ABC, l'angle ABC oppoſé à la baſe AC plus grande que chacun des côtés égaux AB, BC eſt plus grand que l'angle ACB oppoſé au côté AB. Donc, & ce qu'il falloit démontrer.

105. COROLLAIRE II. *Dans tout triangle les plus grands côtés ſont oppoſés aux plus grands angles.* Dans le triangle ſcalene ABC, (*Fig.* 61.) l'angle B eſt le plus grand, l'angle A eſt le moyen, & l'angle C eſt le moindre. Si le côté BC oppoſé à l'angle moyen étoit égal au côté AC oppoſé au plus grand, le triangle ſeroit iſoſcele & les angles A & B ſeroient égaux (*N.* 103.) ce qui eſt contre la ſuppoſition; & ſi BC étoit plus grand que AC l'angle A oppoſé à BC ſeroit plus grand que l'angle B oppoſé à AC (*N.* 104.) ce qui eſt encore contre la ſuppoſition; Donc il faut néceſſairement que BC ſoit moindre que CA. De même ſi le côté AB oppoſé au moindre angle C étoit égal au côté BC oppoſé à l'angle moyen A, le triangle ſeroit iſoſcele, & les angles A, C ſeroient égaux (*N.* 103.) ce qui eſt contre la ſuppoſition, & ſi AB étoit plus grand que BC, l'angle C oppoſé à AB ſeroit plus grand que l'angle A oppoſé à BC (*N.* 104.) ce qui eſt encore contre la ſuppoſition, donc AB doit être plus petit que BC. Donc, &c.

106. COROLAIRE III. Donc l'*hypothenuſe d'un triangle rectangle eſt plus grande que chacun des deux autres côtés.* Car elle eſt oppoſée au plus grand angle, & par la même raiſon dans tout triangle obtus angle, le côté oppoſé à l'angle obtus eſt le plus grand.

107. PROPOSITION XIX. *Dans tout triangle iſoſcele la perpendiculaire menée ſur la baſe du ſommet de l'angle oppoſé, diviſe cette baſe en deux parties égales; dans tout triangle équilateral les perpendiculaires menées des ſommets des angles ſur les côtés oppoſés diviſent chacun en deux également; & dans tout triangle ſcalene, les perpendiculaires menées des angles ſur les côtés oppoſés diviſent ces côtés chacun en deux parties inégales.*

Si le triangle ABC (*Fig.* 59.) eſt iſoſcele & que le côté AC ſoit la baſe, les deux côtés BA, BC, ſont deux obliques égales menées ſur AC du point extérieur B; donc la perpendiculaire menée du même point ſur AC doit couper AC en un point également éloigné des points A, C (*N.* 54.), & par conſéquent

AC doit être coupée en deux également. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Si le triangle ABC (*Fig.* 60.) eſt équilateral, je conſidére ce triangle comme iſoſcele ſur le côté AC, & par conſéquent la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé B ſur AC coupera AC en deux également. Par la même raiſon, ſi je le conſidére comme iſoſcele ſur le côté AB, le côté ſera coupé en deux également par la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé C, & de même de l'autre côté BC. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Enfin, ſi le triangle ABC (*Fig.* 61.) eſt ſcalene, les deux côtés BA, BC ſeront deux obliques inégales menées ſur AC d'un point extérieur B, donc la perpendiculaire menée du même point B ſur AC ne coupera pas AC en un point également éloigné des extrêmités A, C des obliques, car autrement ces obliques ſeroient égales (*N.* 54.) donc AC ſera coupée en deux parties inégales, & de même des autres côtés. Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

108. PROPOSITION XX. *Si deux triangles* ABC, abc (Fig. 64.) *ont les côtés* AB, BC *égaux chacun à chacun aux côtés* ab, bc, *mais que l'angle* B *compris par les deux premiers, ſoit moindre que l'angle* b *compris par les deux autres, la baſe* AC *du premier eſt plus petite que la baſe* ac *du ſecond, & ſi l'angle* B *eſt plus grand que l'angle* b, *la baſe* AC *eſt plus grande que la baſe* ac.

Je fais en B avec la jambe AB un angle ABD égal à l'angle *b*, & je fais la jambe BD égale au côté *bc* du ſecond triangle *abc*. Je mene les droites AD, DC; les triangles ABD, *abc* ſont parfaitement égaux à cauſe des côtés AB, BD égaux chacun à chacun aux côtés *ab*, *bc* & de l'angle ABD égal à l'angle *abc* (*N.* 100); donc la baſe AD eſt égale à la baſe *ac*. Or le triangle CBD eſt iſoſcele à cauſe du côté BD égal à *bc*, lequel eſt égal à BC; donc l'angle BDC eſt égal à l'angle BCD (*N.* 103.) mais l'angle DCA eſt plus grand que l'angle BCD qui n'eſt qu'une de ſes parties, donc l'angle DCA eſt auſſi plus grand que l'angle BDC & à plus forte raiſon plus grand que l'angle ADC qui n'eſt qu'une partie de l'angle BDC. Ainſi dans le triangle ADC l'angle ACD étant plus grand que l'angle CDA, le côté AD oppoſé à l'angle ACD eſt plus grand que le côté AC oppoſé à l'angle ADC (*N.* 104.) & partant la baſe AC du premier triangle, eſt plus petite que la baſe AD ou *ac* du ſecond.

Que ſi l'angle B étoit plus grand que *b*, on prouveroit de même que nous venons de faire, que la baſe *ac* oppoſée au plus

Des Figures compriſes ſous plus de trois côtés.

111. Toute figure de quatre côtés, ſe nomme *Quadrilatere.*

112. Si les quatre côtés ſont égaux & les quatre angles droits, le quadrilatere ſe nomme *Quarré.* D'où il ſuit que les côtés oppoſés d'un quarré (*Fig.* 65.) ſont paralelles entr'eux, car les côtés AB, DC du quarré ABCD étant perpendiculaires ſur le côté AD à cauſe des angles droits A, D ſont paralelles entr'eux (*N.* 68.) & de même les côtés oppoſés AD, BC étant perpendiculaires ſur le côté CD à cauſe des angles droits D, C ſont paralelles.

113. Si les quatre angles ſont droits ſans que les quatre côtés ſoient égaux, le quadrilatere ſe nomme *Rectangle*; & alors les côtés oppoſés ſont égaux; car les côtés oppoſés AB, DC du rectangle ABCD (*Fig.* 66.) étant paralelles entre les côtés oppoſés AD, BC qui ſont auſſi paralelles à cauſe des angles droits, doivent être égaux (*N.* 77.) & par la même raiſon les deux côtés oppoſés AD, BC doivent être égaux.

114. Si les quatre angles ne ſont pas droits ni les quatre côtés, mais que les côtés oppoſés ſoient paralelles, le quadrilatere ſe nomme *Paralellogramme* (*Fig.* 67.) & alors les côtés oppoſés ſont égaux par la raiſon que nous en avons donnée au ſujet du rectangle (*N.* 113.)

115. Le *Rhombe* ou *Lozange* (*Fig.* 68.) eſt un quadrilatere qui n'a pas les angles droits, mais dont les quatre côtés ſont égaux; & dans cette figure les côtés oppoſés ſont paralelles, car menant de deux angles oppoſés B, D la droite BD, le Rhombe eſt diviſé en deux triangles parfaitement égaux BAD, BCD, puiſqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun (*N.* 100.); & de plus ces deux triangles étant iſoſceles, ont les angles ſur la baſe BD égaux (*N.* 73.); ainſi ADB étant égal à ſon alterne CBD, les côtés AD, BC du Rhombe ſont paralelles (*N.* 73.); de même l'angle ABD étant égal à ſon alterne CDB, les côtés AB, CD ſont auſſi paralelles.

116. Le *Trapeze* (*Fig.* 69.) eſt un quadrilatere dont les quatre angles ne ſont pas tous égaux, & les côtés oppoſés ne ſont pas paralelles; & le *Trapezoïde* (*Fig.* 70.) eſt un quadrilatere dont les quatre angles ne ſont pas tous égaux, & dont il n'y a que deux côtés qui ſoient paralelles.

117. Dans tout quadrilatere (*Fig.* 65. 66. 67. 68. 69. 70.) la

droite BD menée d'un angle B à ſon oppoſé D, ſe nomme *Diagonale.*

Les figures qui ont plus de quatre côtés, ſe nomment en général *Polygones*, & en particulier le polygone ſe nomme *Pentagone*, lorſqu'il a cinq côtés, *Hexagone*; lorſqu'il en a ſix, *Eptagone*; lorſqu'il en a ſept, *Octogone*; lorſqu'il en a huit, *Enneagone*; lorſqu'il en a neuf, *Decagone*; lorſqu'il en a dix, *Ondécagone*; lorſqu'il en a onze, *Dodecagone*, lorſqu'il en a douze. Les autres ſe nomment polygones de 13 côtés, de 14, de 15, de 16, &c.

Lorſque les polygones ont tous les angles & les côtés égaux, ils ſe nomment *réguliers*, & lorſque cela n'eſt pas, ils ſe nomment *irréguliers.*

118. PROPOSITION. XXI. *Tous les quadrilateres* (Fig. 65, 66, 67, 68.) *à l'exception du trapeze & du trapezoïde, ſont coupés en deux également par l'une ou l'autre de leur diagonale* AC, BD, *& les deux diagonales ſe coupent en deux parties égales.*

Par la formation du quarré, du rectangle, du paralellogramme, & du lozange, les côtés oppoſés ſont paralelles & égaux; donc ſi l'on mene la diagonale BD, les triangles BCD, BAD qu'elle forme avec les côtés ſont parfaitement égaux, puiſque le côté BC eſt égal à ſon oppoſé AD, le côté CD à ſon oppoſé AB, & que le troiſiéme côté BD eſt commun à l'un & l'autre triangle (*N.* 100.); or ces deux triangles compoſent la figure entiere. Donc la figure eſt coupée en deux également par la diagonale. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Les deux diagonales BD, AC étant menées, les triangles BOC, AOD oppoſés au ſommet O, ont le côté BC égal au côté AD oppoſé à BC, l'angle OBC égal à ſon alterne ODA, & l'angle OCB égal à ſon alterne OAD; ainſi ces deux triangles ayant un côté égal à un côté, & les angles ſur ces côtés égaux chacun à chacun ſont parfaitement égaux (*N.* 100.), donc le côté BO du premier triangle oppoſé à l'angle OCB eſt égal au côté OD oppoſé à l'angle OAD égal à l'angle OCB, & partant la diagonale BD eſt diviſée en deux également en O, de même le côté OC du premier triangle oppoſé à l'angle OBC, eſt égal au côté OA du ſecond triangle oppoſé à l'angle ODA, égal à l'angle OBC, & partant la diagonale AC eſt auſſi diviſée en deux également en O; ce qu'il falloit 3°. démontrer.

119. PROPOSITION XXII. *Tout polygone régulier ou irrégulier en y comprenant le triangle & le quadrilatere peut être diviſé en au-*

tant de triangles qu'il a de côtés, ou en autant de triangles moins un qu'il a de côtés, ou en autant de triangles moins deux qu'il a de côtés, mais le triangle n'eſt pas ſuſceptible de ce dernier cas.

Soit le pentagone irrégulier ABCDE (*Fig.* 72.). Je prens un point O dans l'eſpace que ſes côtés renferment, & de ce point, je mene aux angles les droites OA, OB, OC, OD, OE, & le pentagone eſt diviſé en autant de triangles qu'il a de côtés, ce qui eſt évident, & de même des autres polygones réguliers ou irréguliers.

Soit le même pentagone ABCDE (*Fig.* 73.). Je prens un point R ſur l'un de ſes côtés BC, & qui ne ſoit ni l'une ni l'autre des extrêmités B, C. Je mene de ce point des droites RA, RE, RD à tous les angles où j'en puis mener, ce qui diviſe le pentagone en triangles. Or le premier triangle RBA, emporte le côté AB du pentagone, & la partie BR du côté BC, & le dernier triangle RCD emporte le côté CD du pentagone, & la partie RC du côté de BC; ainſi il faut trois côtés du pentagone pour les deux triangles RBA, RCD, & au contraire il ne faut qu'un côté du pentagone pour chacun des autres triangles RAE, RED. C'eſt pourquoi comme le pentagone n'a que cinq côtés, il ne doit y avoir que quatre triangles, c'eſt-à-dire $5 - 1$ ou autant qu'il y a de côtés moins un, & ainſi des autres.

Soit encore le même pentagone ABCDE (*Fig.* 74.); de l'un de ſes angles B, je mene des droites BE, BD aux autres angles où j'en puis mener, ce qui diviſe le pentagone en triangles; or les deux triangles extrêmes BAE, BCD, emportent chacun deux côtés du pentagone, & par conſéquent il faut qu'il y ait deux triangles de moins qu'il n'y a de côtés, & il eſt viſible que le triangle ou polygone des trois côtés eſt le ſeul qui ne peut pas ſe diviſer de cette troiſiéme façon.

120. PROPOSITION XXIII. *Tout polygone régulier* ABCDEF (Fig. 75.) *peut ſe diviſer en autant de triangles iſoſceles & parfaitement égaux qu'il a de côtés, & les ſommets de ces triangles ſeront tous en un même point* O *également éloignés de tous les angles du polygone.*

Je diviſe tous les angles en deux également par les droites AO, BO, CO, DO, &c. ainſi à cauſe que tous les angles du polygone ſont égaux puiſqu'il eſt régulier, tous les angles OAB, OAF, &c. que les lignes AO, BO, &c. font avec les côtés du polygone, ſont auſſi égaux. Or chaque angle BAF, &c. du po-

lygone vaut moins que deux droits, puiſque cet angle & ſon angle de ſuite RAF ne valent que deux droits (*N.* 49.) ; donc les angles OAB &c. faits par les droites AO, BO, &c. avec les côtés du polygone ſont moindres chacun qu'un droit ; mais ſi le côté AB coupoit les deux droites AO, BO, de façon que les angles internes du même coté OAB, OBA fuſſent enſemble égaux à deux droits, les lignes AO, BO ſeroient paralelles (*N.* 73), donc puiſque ces deux angles OAB, OBA, valent enſemble moins de deux droits, les deux lignes AO, BO doivent s'approcher, & par conſéquent ſe couper en un point O, & le triangle AOB doit être iſoſcele à cauſe des angles égaux ſur la baſe AB. On prouvera de même que les lignes BO, CO doivent ſe couper & former un triangle iſoſcele BOC, à cauſe des angles égaux ſur la baſe BC. Or les triangles iſoſceles AOB, BOC ayant la baſe AB égale à la baſe BC, & les deux angles ſur la baſe AB égaux chacun à chacun aux deux angles ſur la baſe BC, ſont parfaitement égaux (*N.* 100.) ; donc les deux côtés égaux AO, BO du premier doivent être égaux aux côtés égaux BO, CO du ſecond, & par conſéquent le côté BO doit être commun aux deux triangles, & le point O doit être leur ſommet commun ; & on démontrera de la même façon que les autres triangles COD, &c. ſont iſoſceles & parfaitement égaux aux deux dont nous venons de parler, & que le ſommet O doit être commun à tous ; & delà il ſuit que tous les côtés AO, BO, &c. de ces triangles étant égaux, le point O eſt également éloigné de tous les angles du polygone.

121. COROLLAIRE. Donc ſi du point O pris pour centre & avec un rayon égal à l'une des droites AO, on décrit une circonference ; cette circonference paſſera par les extrêmités B, C, D, &c. des autres lignes BO, CO, &c. & par conſéquent par tous les angles du polygone.

122. PROPOSITION XXIV. *Si après avoir diviſé un polygone régulier* ABCDEF (Fig. 75.) *en autant de triangles iſoſceles & parfaitement égaux qu'il a de côtés, on mene du ſommet* O *commun à tous les triangles des perpendiculaires* OS, OT *& ſur les côtés, ces perpendiculaires ſeront égales.*

Les triangles AOF, FOE ſont iſoſceles, donc les perpendiculaires menées des ſommets ſur les baſes, coupent les baſes AF, FE chacune en deux également en S & T (*N.* 107.). Or ces deux baſes ſont égales, donc leurs moitiés SF, FT le ſont

auſſi; ainſi les triangles OFS, OFT ayant l'angle OFS égal à l'angle OFT, & les côtés OF, FS, qui comprennent l'angle OFS, égaux chacun à chacun aux côtés OF, FT, qui comprennent l'angle OFT, ſont parfaitement égaux (*N.* 100.); donc la perpendiculaire OS eſt égale à la perpendiculaire OT, & ainſi des autres.

123. *Definition.* Lorſqu'un polygone (*Fig.* 75.) eſt diviſé en autant de triangles iſoſceles, & parfaitement égaux qu'il a de côtés. Le point O qui eſt le ſommet commun des triangles, ſe nomme centre du polygone, les angles ABC, &c. formés par les côtés du polygone, ſe nomment *Angles de la Figure*, les angles OAB, OBA de l'un des triangles ſur un côté AB, ſe nomment *angles ſur la baſe*, les côtés OA, OB, &c. des triangles ſe nomment *rayons*, & les perpendiculaires OS, OT, &c. ſe nomment *Apothêmes* ou *rayons droits*.

124. Proposition XXV. *Tous les angles d'un polygone regulier valent autant de fois deux angles droits moins quatre que le polygone a de côtés.*

Tout polygone régulier peut ſe diviſer en autant de triangles iſoſceles & égaux qu'il a de côtés; or les trois angles de chacun de ces triangles valent enſemble deux angles droits (*N.* 97.†); donc tous les angles des triangles pris enſemble valent autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés : or de cette ſomme il faut retrancher les angles au ſommet O à cauſe que les angles du polygone ne comprennent que les angles des baſes des triangles, & tous les angles au ſommet valent enſemble quatre angles droits, puiſqu'ils embraſſeroient la circonference entiere qui ſeroit décrite du centre O; donc les angles du polygone valent autant de fois deux angles droits moins quatre que le polygone a des côtés.

Par exemple, l'exagone étant compoſé de ſix triangles, tous les angles de ces triangles valent enſemble ſix fois 2 angles droits, c'eſt-à-dire 12 angles droits, deſquels retranchant les 4 angles droits qui ſont la valeur des ſix angles faits en O. Il reſtera huit angles droits pour la valeur de la ſomme des angles de l'Hexagone, & ainſi des autres.

125. Proposition XXVI. *Si l'on prolonge tous les côtés d'un polygone* (Fig. 75.) *d'une ſeule part en* R, X, *&c. tous les angles extérieurs ſont égaux; chacun d'eux eſt égal à l'angle au centre, & tous enſemble valent* 4 *angles droits.*

Tous les angles du polygone ſont égaux entr'eux : or chacun de ces angles BAF, &c. & ſon angle de ſuite RAF, &c. valent enſemble deux droits (*N.* 49.). Donc tous les angles extérieurs ſont égaux.

L'angle BAF, & ſon angle de ſuite RAF, valent enſemble deux droits, & les trois angles OAF, OFA, AOF du triangle AOF, valent enſemble auſſi deux droits. Donc les angles BAF, RAF ſont enſemble égaux à la ſomme des trois OAF, OFA, AOF, mais l'angle BAF eſt égal à la ſomme des deux OAF, OFA, puiſque chacun de ceux-ci vaut la moitié de BAF ; donc l'angle RAF extérieur eſt égal à l'angle au centre AOF, & ainſi des autres.

Il y a autant d'angles extérieurs, que d'angles au centre, & tous les angles au centre valent enſemble quatre droits ; donc à cauſe que chaque extérieur eſt égal à chaque angle au centre, la ſomme des extérieurs eſt égale à quatre angles droits.

126. PROBLEME. *Un polygone* ABCDE (Fig. 76.) *étant donné, trouver la valeur de l'angle au centre, de l'angle ſur la baſe, & de l'angle de la figure.*

Suppoſons que le polygone ſoit un pentagone ; du centre O & avec le rayon OA, je décris un cercle qui paſſe par tous les angles du polygone (*N.* 122.), & qui eſt diviſée en cinq parties égales par les cinq angles égaux du centre ; ainſi chacun de ces angles vaut la cinquiéme partie de la circonference ou de 360 degrés, & partant l'angle au centre vaut 72 degrés. Or les trois angles du triangle AOB valent enſemble deux droits (*N.* 97.) ou 180 degrés. Retranchant donc de 180 la valeur 72 de l'angle au centre AOB, le reſte 108 eſt la valeur des deux angles ſur la baſe pris enſemble ou la valeur de l'angle BAE de la figure, lequel eſt égal aux deux angles OAB, OBA, puiſqu'il eſt le double de chacun d'eux ; donc chacun des angles OAB, OBA ſur la baſe vaut 54 degrés ; & on trouvera de la même façon les angles des autres polygones.

127. COROLLAIRE I. *Dans l'exagone* (Fig. 75.) *les angles ſur la baſe & l'angle au centre ſont égaux, & tous les triangles qui le compoſent ſont équilateraux.* L'angle au centre AOB embraſſe la ſixiéme partie de la circonférence, & vaut le ſixiéme de 360 degrés, c'eſt-à-dire 60. Retranchant donc cette valeur 60, de la valeur 180 des trois angles du triangle AOB, il reſtera 120 pour la valeur des deux angles ſur la baſe, & par conſéquent

chacun d'eux vaudra 60, de même que l'angle au centre. Ainſi les trois angles du triangle AOB étant égaux, les trois côtés le ſeront auſſi ; car s'il y avoit de côtés inégaux, les angles oppoſés à ces côtés ſeroient auſſi inégaux (*N.* 104.).

128. COROLLAIRE II. *Dans le decagone ou polygone de* 10 *côtés, l'angle au centre eſt la moitié de l'angle ſur la baſe.* L'angle au centre embraſſe la dixiéme partie de la circonference ou de 360 degrés, & partant cet angle vaut 36 degrés, & cette valeur étant retranchée de la valeur 180 du triangle, le reſte 144 eſt la valeur des deux angles ſur la baſe ; ainſi chacun de ces angles eſt 72 : or 36 eſt la moitié de 72, donc l'angle au centre eſt la moitié de l'angle ſur la baſe.

129. PROBLEME. *Le côté* AB *d'un polygone* (Fig. 76.) *étant donné, conſtruire ce polygone.*

Je fais à chacune des extrêmités A, B un angle égal à l'angle ſur la baſe du polygone demandé. Par exemple, ſi c'eſt un pentagone, je fais en A un angle OAB de 54 degrés (*N.* 128.), & un autre OBA en B d'un même nombre de degrés ; du point O où les côtés OA, OB de ces angles ſe coupent, & avec une ouverture du compas égale à OA ou OB ; je décris une circonférence, ſur laquelle portant encore quatre fois le côté AB de B en C, de C en D, &c. j'ai le pentagone demandé.

Car le triangle AOB eſt iſoſcele à cauſe des angles égaux OBA, OAB ſur la baſe AB, & comme ces deux angles valent enſemble 108 degrés, & qu'il en faut 180 pour les trois angles de ce triangle (*N.* 97.) ; il s'enſuit que l'angle AOB en vaut 72, ou la cinquiéme partie de la circonférence. Ainſi en portant ſur la circonférence le côté AB encore 4 fois, la circonférence s'eſt trouvée diviſée en ſes cinq parties égales ; c'eſt pourquoi ſi des points des diviſions C, D, &c. nous menons des rayons au centre, nous trouverons cinq triangles égaux au premier AOB, rangés autour du même ſommet O, & partant la figure compoſée de ces cinq triangles, eſt un pentagone régulier dont le côté eſt AB, tel qu'on le demandoit.

REMARQUE. On trouve dans les étuis, nommés étuis de Mathématiques, un demi-cercle gradué, c'eſt-à-dire diviſé en ſes 180 degrés, & par le moyen de ce demi-cercle on décrit aiſément un angle de tel nombre de degrés que l'on veut.

130. PROBLEME. *L'apothême* OR (Fig. 76.) *d'un polygone étant donné, conſtruire ce polygone.*

Suppoſons que le polygone demandé ſoit un pentagone ; j'éleve ſur l'extrêmité R de l'apotheme OR, une perpendiculaire indéfinie AE, & comme l'angle au centre d'un pentagone eſt de 72 degrés; je fais à l'autre extrêmité O de l'apotheme OR deux angles AOR, EOR, l'un d'un côté & l'autre de l'autre, chacun de 36 degrés, c'eſt-à-dire de la moitié de 72 ; ainſi ces angles étant aigus, leurs côtés AO, EO ſont inclinés ſur OR, du côté de la perpendiculaire AE, & par conſéquent ils doivent couper cette perpendiculaire en des points A, E; & comme dans les triangles ARO, ERO, le côté OR eſt commun, & que les angles AOR, ARO faits ſur ce côté, ſont égaux chacun à chacun aux angles ERO, EOR, faits ſur le même côté, il s'enſuit que ces deux triangles ſont égaux (*N.* 100.) ; donc l'angle OAR eſt égal à l'angle OER, & partant le triangle AOE eſt iſoſcele, & l'angle de ſon ſommet eſt de 72 degrés, ou la cinquiéme partie de la circonférence. Ainſi du point O pris pour centre, & avec le rayon OA ou OE, décrivant une circonférence, & portant encore quatre fois la baſe AE ſur cette circonférence de E en D, de D en C, &c. on aura un pentagone régulier, dont l'apotheme eſt OR, tel qu'on le demandoit; ce qui ſe démontre comme dans le Problême précedent.

131. PROBLEME. *Conſtruire un quarré ſur une ligne donnée* AD (Fig. 65.)

Aux extrêmités A, D de la ligne AD, j'éleve deux perpendiculaires AB, DC, que je fais égales chacune à la droite AD. Des extrêmités B, C, de ces perpendiculaires, je mene la droite BC & la figure ABCD, eſt le quarré demandé.

Car à cauſe que la droite AD eſt perpendiculaire ſur les droites AB, DC, ces deux lignes ſont paralelles entr'elles (*N.* 68.), & à cauſe que les deux points B, C de la droite BC ſont également éloignés de la droite AD, les deux lignes BC, AD ſont paralelles (*N.* 78.) égales & également inclinées entre les paralelles AB, CD (*N.* 77.); mais AD eſt perpendiculaire entre les deux AB, CD, donc BC l'eſt auſſi, & par conſéquent tous les angles de la figure étant droits, & tous les côtés égaux, cette figure eſt en quarré (*N.* 112.) fait ſur le côté demandé.

132. PROBLEME. *Deux des côtés inégaux* AD, AB (Fig. 66.) *d'un rectangle étant donnés, conſtruire ce rectangle.*

J'éleve AB perpendiculairement ſur l'extrêmité A, du côté AD, puis du point B, je mene une paralelle à la droite AD, & du point

point D une paralelle à la droite AB, laquelle coupe l'autre paralelle en C, & la figure ABCD eſt le rectangle demandé.

Car les deux droites AB, DC étant paralelles entre les paralelles AD, BC, ſont égales & également inclinées; (*N.* 77.) or, AB eſt perpendiculaire ſur AD; donc DC l'eſt auſſi, & par la même raiſon, les droites AD, BC ſont égales & également inclinées, & la droite BC eſt perpendiculaire ſur les deux AB, DC; donc la figure a ſes quatres angles droits, & les côtés oppoſé, paralelles; donc elle eſt un rectangle, (*N.* 113.) & ce rectangle eſt tel qu'on le demandoit.

133. PROBLEME. *Deux des côtés inégaux* AD, AB *d'un paralellogramme* (Fig. 67.) *étant donnés, conſtruire ce paralellogramme.*

Je fais faire aux deux côtés donnés un angle BAD égal à l'angle donné; de l'extrémité B je mene une paralelle à AD, & de l'extrémité D une paralelle à AB, laquelle coupe l'autre paralelle en C, & la figure ABCD eſt le paralellogramme demandé; ce qui ſe démontre comme à l'égard du rectangle.

CHAPITRE IV.

De la puiſſance des Lignes.

134. PAr le mot de *Puiſſance* d'une ligne, nous n'entendons ici que ſa ſeconde puiſſance, c'eſt-à-dire le quarré d'une ligne, & ce que nous nous propoſons, c'eſt de ſçavoir combien le quarré d'une ligne diviſée en pluſieurs parties égales ou inégales contient de quarrés de ſes parties, & de produits des unes par les autres, & auſſi quel eſt le rapport de quarrés de ces parties à quelques produits des unes par les autres, &c. ce que l'on entendra mieux par les Propoſitions ſuivantes.

135. PROBLEME. *Faire le produit de deux lignes données* AB, AC (Fig. 77.)

J'éleve AB perpendiculairement ſur AC; je mene BD paralelle à AC & CD paralelle à AB; ce qui forme un rectangle ABDC (*N.* 132.) lequel eſt la même choſe que le produit demandé; & en voici la démonſtration.

Multiplier la ligne AB par la ligne AC, c'eſt prendre la ligne AB autant de fois qu'il y a d'unités dans la ligne AC. (Livre

premier; (*N.* 11.) or, la ligne AC étant une ſuite de points, le point eſt ſon unité, & par conſéquent pour multiplier AB par AC, il faut prendre AB autant de fois qu'il y a de points dans AC. Concevons donc que ſur tous les points de la ligne AC, s'élevent des perpendiculaires égales chacune à AB; ces perpendiculaires ſeront paralelles entr'elles, (*N.* 68.) & comme elles ſe toucheront les unes & les autres dans toute leur longueur, leur ſomme formera un eſpace qui eſt le rectangle ABDC; or, la ſomme de ces lignes n'eſt pas différente de la premiere priſe, autant de fois qu'il y a d'unités dans AC ou multipliée par AC; donc le rectangle ABCD, eſt égal au produit de AB par AC.

136. *Remarque.* On demandera peut-être pourquoi je fais faire un angle droit aux deux lignes AB, AC plûtôt qu'un angle aigu ou obtus; & en effet il paroît d'abord que ſi nous faiſons former aux deux lignes AB, AC un angle aigu BAC, (*Fig.* 78.) & que nous achevions le paralellogramme ABCD, comme il a été dit ci-deſſus; (*N.* 133.) ce paralellogramme contiendra autant de lignes égales à AB qu'il y a de points dans AB, & que par conſéquent le paralellogramme doit être auſſi égal au produit des deux lignes; cependant comme ce ſeroit ici une erreur groſſiere, il faut faire voir en quoi elle conſiſte, en montrant qu'il n'y a que le rectangle qui ſoit égal au produit de ces lignes.

Le point étant conſidéré comme indiviſible doit avoir une longueur & une largeur infiniment petite, & partant, nous devons le conſidérer comme un quarré moindre que tout ce que nous pouvons imaginer de plus petit, ou comme un petit cercle dont le diametre eſt moindre que tout ce qu'on pourroit aſſigner ou concevoir; or, les lignes ne ſont autre choſe que les traces du point; c'eſt pourquoi nous devons les conſidérer comme ayant toutes une même largeur infiniment petite, & égale à la largeur ou à la longueur du point, ou comme des rectangles tels que ABEH (*Fig.* 79.) qui peuvent être égaux ou inégaux en longueur; mais dont la largeur, c'eſt-à-dire la diſtance des paralelles AB, EH, ou la perpendiculaire AH entre ces deux paralelles eſt toujours la même & infiniment petite; cela poſé.

Suppoſons que le rectangle infiniment mince ABEH (*Fig.* 79.) ſoit la ligne qu'on veut multiplier par la ligne AC; ſi nous mettons ce rectangle perpendiculairement ſur la ligne AC, il eſt clair qu'il ne prendra ſur cette ligne que la longueur AH d'un point,

c'eſt pourquoi, concevant qu'il y ait une infinité de rectangles égaux au rectangle ABEH, les uns auprès des autres, le long de la ligne AC, & qui lui ſoient tous perpendiculaires; il y en aura certainement autant que la ligne AC contient de points, & par conſéquent leur ſomme, ou le premier pris autant de fois qu'il y a de points dans AC, ſera le produit demandé, & ce produit ſera un rectangle.

Maintenant, concevons qu'une infinité de rectangles infiniment minces & égaux chacun au précédent, ſoient tous également inclinés ſur la ligne AC; (*Fig.* 80.) il faudra néceſſairement que tous ces rectangles ne s'appuyent ſur AC que ſur un angle de leurs baſes, & qu'ils laiſſent des petits triangles rectangles tels que HTV, VXZ qui ſeront tous égaux entr'eux, (*N.* 100.) ayant le côté TV égal au côté XZ, l'angle droit HTV égal à l'angle droit VXZ, & l'angle TVH égal à l'angle XZV, à cauſe des baſes TV, XZ également inclinées ſur AC; mais pour remédier à l'inconvénient de ces triangles vuides, je prolonge le côté RB en A; ce qui donne encore un petit triangle rectangle égal à chacun des triangles vuides HTV, &c. & du point E, je mene ES paralelle à AH; les triangles rectangles ESB, HAR ſont parfaitement égaux, (*N.* 102.) à cauſe des hypothénuſes ES, AH paralelles entre les paralelles AB, HE, & par conſéquent égales, (*N.* 77.) & des côtés BE, RH auſſi égaux pour la même raiſon; retranchant donc du rectangle RBEH le triangle ESB, & lui donnant en ſa place le triangle AHR, le paralellograme ASEH ſera encore égal au rectangle RBEH, & faiſant la même choſe à l'égard des autres rectangles, nous aurons le paralellogramme ASDC égal à la ſomme des petits paralellogrammes ou à la ſomme des rectangles. Or, les parties égales AH, HV, &c. que ces paralellogrammes prennent ſur AC ſont plus grandes que les épaiſſeurs RH, TV &c. des rectangles infiniment minces; donc il y a néceſſairement moins de paralellogrammes ou de rectangles que la ligne AC ne contient de points, & par conſéquent le premier rectangle pris autant de fois que la ligne AC a de points, doit faire une ſomme plus grande que la ſomme des petits paralellogrammes contenus dans le paralellagramme ASDC; ainſi ce paralellogramme n'eſt pas le produit qu'on demande, & on trouvera toujours qu'en inclinant une ligne ſur l'autre, le paralellogramme ſera moindre que le produit demandé.

137. *Remarque II.* J'ai dis plus haut (*N.* 35.) que ſi deux lignes droites ſe coupent, elles ne ſe coupent qu'en un point, & dans la Remarque précédente, j'ai fait voir qu'une ligne droite qui coupe obliquement une autre, prend une partie plus grande ſur cette ligne que ſi elle la coupoit perpendiculairement; d'où il paroît qu'on peut conclurre que deux lignes droites peuvent ſe couper en plus d'un point. Or, de peur qu'on ne me reproche de me contredire moi-même, je vais faire voir que ces deux Propoſitions n'ont rien d'oppoſé, pourvû qu'on les entende comme elles doivent être entenduës.

Nous avons démontré (*N.* 34.) que ſi deux lignes droites ont deux points communs, ces deux lignes ne ſont qu'une ſeule & même ligne droite; & delà nous avons conclu que deux lignes droites ne peuvent ſe couper en deux points; c'eſt-à-dire que ſi deux points de l'une s'ajuſtent ſur deux points de l'autre, les deux lignes peuvent ſe couper : ainſi il ne s'agit que de faire voir, que quoique deux lignes qui ſe coupent obliquement, ſe coupent en une partie plus grande que ſi elles ſe coupoient perpendiculairement; cependant il n'y a jamais deux points de l'une qui s'ajuſtent ſur deux points de l'autre, de la façon dont nous venons de l'expliquer.

Concevons donc que deux lignes droites ſoient repréſentées par les rectangles AB, CD (*Fig.* 81. 82.) dont les largeurs ſont infiniment petites & égales, ou ſi l'on veut par les ſuites des petits cercles infiniment petits & égaux compris dans ces rectangles, & mettons ces deux rectangles ou ces deux ſuites de cercles perpendiculairement l'un ſur l'autre, enſorte qu'ils ſe coupent; (*Fig.* 81.) le petit quadrilatere dans lequel ces rectangles ſe couperont, ſera un quarré, puiſque les quatre côtés ſe coupent à angles droits, & qu'ils ſont égaux, à cauſe qu'étant perpendiculaires entre les longs côtés des rectangles, ils en expriment les largeurs qui ſont égales par la ſuppoſition; & comme les diamétres des petits cercles égaux, ſont égaux chacun à la largeur des rectangles, il eſt clair que le petit quarré ne peut contenir que l'un de ces cercles E; ainſi, ſi nous regardons les rectangles comme repréſentant des lignes qui ſe coupent perpendiculairement, ces lignes ne ſe couperont qu'en un point qui ſera le petit quarré; & ſi nous regardons les ſuites de cercles, comme repréſentans ces lignes, elles ne ſe couperont auſſi qu'en un point qui ſera le petit cercle E; & par conſéquent les deux lignes n'auront de commun que le point E.

Maintenant, concevons que les deux obliques AB, CD ſoient obliques l'une ſur l'autre, (*Fig.* 82.) ou, (ce qui revient au même) que la ligne CD tourne autour du point fixe E; enſorte que l'angle DEB devienne oblique, les points H, S de la ligne CD, voiſins du point E, pourront bien anticiper un peu ſur les points R, T de la droite AB, voiſins du point E; mais les deux premiers ne tomberont abſolument ſur les deux ſeconds, que lorſque la ligne CD tombera ſur la ligne AB, & par conſéquent, tant que cela ne ſera pas, la droite HS menée entre les deux points H, S de la ligne CD, ne tombera pas ſur la droite RT menée entre les deux points R, T de la droite AD; ainſi, ni les points H, S, ni les points R, T ne pourront être dits communs aux deux lignes, puiſque leurs directions ſont différentes, & il n'y aura que le point E qui ſera abſolument commun, & à l'un & à l'autre; donc ces deux lignes ne ſe couperont qu'en un point commun, quoique la partie dans laquelle ils ſe coupent, ſoit plus grande que ſi elles ſe coupoient perpendiculairement

A la vérité il peut ſouvent arriver que les lignes AB, CD (*Fig.* 82.) ſe coupent obliquement, & que néanmoins les points H, R n'anticipent pas l'un ſur l'autre, non plus que les points T, S, & alors il ſemble qu'on puiſſe dire que les deux obliques AB, CD ne ſe coupent pas en une partie plus grande que ſi elles étoient perpendiculaires entr'elles. Mais il faut obſerver que le point H étant tout entier hors du point E, le point E ne peut paſſer de la poſition E à la poſition H, à moins que pendant ce mouvement, ſon centre ne parcourre ſucceſſivement la diſtance qui eſt entre lui & le centre du point H; ainſi le point E paſſant en H, prend pluſieurs poſitions intermédiaires entre la poſition E & la poſition H; par la même raiſon, le même point E paſſant de la poſition E à la poſition R, prend pluſieurs poſitions intermédiaires entre la poſition E & la poſition R; c'eſt pourquoi les poſitions intermédiaires entre E & H, ou du moins quelques unes d'entr'elles anticipent ſur les poſitions intermédiaires de E en R, ou ſur quelques unes d'entr'elles, & ces anticipations font que deux obliques AB, CD ſe coupent en une partie plus grande que lorſqu'elles ſont perpendiculaires; car quoiqu'alors il y ait auſſi des anticipations, telles que nous venons de dire; cependant elles ne font pas que la partie coupée ſoit plus grande que le point E, (*Fig.* 81,) ou que le petit quarré dans lequel le point E ſe

trouve, & dans lequel toutes les anticipations qu'on peut imaginer ſont toujours renfermées, ſoit plus grand. La ſeule inſpection des Figures fait voir ceci clairement.

Il ſeroit impoſſible de rendre raiſon de tout ce que nous avons dit dans le Problême précédent & dans ces deux remarques, ſi on s'aviſoit de dire avec Euclide que le point n'a point de parties & la ligne point de largeur, & ce ſont ces mauvaiſes définitions qui ont donné lieu à bien des gens d'accuſer les Géometres de tomber dans des abſurdités. Nous en donnerons encore un exemple lorſque nous parlerons du cercle.

138. *Definition.* Dans tout rectangle ABDC, (*Fig.* 77.) le côté AC ſur lequel on conçoit qu'il s'appuye, ſe nomme *baſe*, & le côté AB ou ſon égal CD perpendiculaire ſur la baſe, ſe nomme *hauteur*. On déſigne un rectangle par les quatre lettres miſes aux quatre angles, en diſant le rectangle ABCD, ou ſimplement par les deux lettres miſes à deux angles oppoſés A, D en diſant le rectangle AD.

139. Proposition XXVII. *Si deux rectangles ont les baſes égales & les hauteurs auſſi, ils ſont égaux.*

Chaque rectangle eſt le produit de ſa baſe par ſa hauteur; or, la baſe de l'un eſt égale à la baſe de l'autre, & la hauteur eſt égale à la hauteur par la ſuppoſition, donc les deux produits ou les deux rectangles ne ſauroient être différents.

140. Proposition XXVIII. *Si une ligne droite* AB (Fig. 83. 84.) *eſt diviſée en deux ou pluſieurs parties égales ou inégales, le quarré de cette ligne contient le quarré de la premiere partie; plus deux rectangles de la premiere par la ſeconde; plus le quarré de la ſeconde; plus, deux rectangles des deux premieres par la troiſiéme; plus le quarré de la troiſiéme; plus deux rectangles des trois premieres par la quatriéme; plus le quarré de la quatriéme, & ainſi de ſuite, s'il y a un plus grand nombre de parties.*

Soit la ligne AB (*Fig.* 83.) diviſée en deux parties AC, CD, je fais ſon quarré AMNB; (*N.* 133.) je prens ſur le côté AM perpendiculaire ſur AB la partie AE égale à la partie AC, & par conſéquent la partie EM eſt égale à la partie reſtante CB à cauſe de AE=AC; au point C j'éléve CS perpendiculaire ſur AB, & au point E j'éleve ET perpendiculaire ſur AM. Les droites AM, CS, BN étant perpendiculaires ſur AB ſont paralelles entr'elles, (*N.* 68.) & par la même raiſon, les droites AB, ET, MN ſeront auſſi paralelles; de plus, les droites AM, CS, BN,

perpendiculaires ſur AB, ſont auſſi perpendiculaires ſur les droites ET, MN paralelles à AB; (*N.* 68.) ainſi toutes ces lignes ſe coupent perpendiculairement & leurs parties auſſi; cela poſé.

Le petit quadrilatere AEOC ayant ſes quatre angles droits & les côtés AC, AE égaux entr'eux par la conſtruction, & égaux à leurs paralelles EO, OC, eſt par conſéquent le quarré de la partie AC, de même le quadrilatere SOTN eſt le quarré de l'autre partie CB; car ſes côtés OT, SN ſont égaux chacun à la partie CB, puiſqu'ils ſont perpendiculaires entre les paralelles CS, BN; & par la même raiſon, les deux autres côtés OS, TN ſont auſſi égaux chacun à EM = CB; enfin les deux rectangles EMSO, OCBT, ayant le côté OC = OE, & le côté EM égal au côté CB ſont égaux entr'eux, & égaux chacun au produit de la partie AC par la partie CB; donc le quarré AMNB de la droite AB diviſée en deux parties AC, CB contient le quarré AEOC de la premiere partie AC plus, deux rectangles EMSO, COTB de la premiere partie par la ſeconde; plus le quarré OSNT de la ſeconde.

De même, ſoit la ligne AB (*Fig.* 84.) diviſée en trois parties AC, CD, DB; je fais ſon quarré AMNB, & des points de diviſion C, D, j'éleve ſur DB les perpendiculaires CS, DT; je prens ſur le côté AM la partie AE égale à la partie AC; la partie EH égale à la partie CD, & par conſéquent la troiſiéme partie HM eſt égale à la troiſiéme partie DB; enfin, des points E, H, j'éleve ſur AM les perpendiculaires EZ, HX; ainſi ces perpendiculaires coupent perpendiculairement les perpendiculaires menées ſur AC, par les raiſons que nous avons déja dites, & toutes ces perpendiculaires forment entr'elles des rectangles.

Or, le rectangle AEOC eſt le quarré de la premiere partie AC à cauſe de AE = AC; les deux rectangles EHVO, CORD ſont égaux entr'eux, & valent chacun le produit de la partie AC par la partie CD, à cauſe du côté EO égal au côté CO ou AC, & du côté EH égal au côté CD; le rectangle VORP eſt le quarré de CD à cauſe du côté OR = CD & du côté OV = EH = CD; les deux rectangles HMSV, DRZB ſont égaux chacun au produit de la partie AC par la partie DB, à cauſe des côtés égaux HM, DB, & des côtés HV, DR égaux chacun au côté AC ou AE; les rectangles VSTP, RPXZ ſont auſſi égaux entr'eux & au produit de la partie CD par la partie DB, à cauſe du côté VP ou CD égal au côté PR = HE = CD & du côté SV ou MH égal au côté RZ ou DB; enfin le rectangle PTNX eſt le quarré

de DB, à cauſe du côté PX ou DB égal au côté PT ou HM; donc le quarré de la droite AB diviſée en trois parties AC, CD, DB contient le quarré AEOC de la premiere partie; plus deux produits HEOV, CORD de la premiere par la ſeconde; plus, le quarré OVPR de la ſeconde; plus, deux rectangles HMSV, DRZB de la premiere par la troiſiéme joints à deux rectangles VSTP, RPXZ de la ſeconde par la troiſiéme; ce qui fait enſemble deux rectangles des deux premiers par la troiſiéme; plus le quarré PTNX de la troiſiéme, & ainſi des autres.

141. COROLLAIRE. *Lorſqu'une ligne* AB *eſt diviſée en deux ou pluſieurs parties* (Fig. 83. 84.) *la diagonale de ſon quarré* AMNB *coupe en deux également tous les quarrés des parties de cette ligne.*

La diagonale AN (*Fig.* 83.) coupe le quarré AMNB en deux triangles parfaitement égaux; (*N.* 119.) or, ces triangles étant rectangles & iſoſceles, les deux angles ſur la baſe de chacun d'eux, doivent valoir enſemble un droit, puiſque les trois angles de tout triangle, valent enſemble deux droits; (*N.* 97.) donc chaque angle ſur la baſe doit valoir enſemble un demi droit, & par conſéquent la diagonale AN doit couper l'angle droit MAC du quarré AMNB en deux également. Or, la diagonale AO du quarré EACO coupe auſſi le même angle droit EAD en deux également, par la même raiſon; donc la diagonale AN tombe ſur la diagonale AO, & paſſe par le point O; d'où il ſuit qu'elle coupe auſſi le quarré EACO en deux également. Maintenant les angles égaux EOA, AOC ſont égaux aux angles SON, TON qui leur ſont oppoſés au ſommet; (*N.* 49) donc la ligne AN coupe auſſi en deux également l'angle droit SOT du quarré SOTN, & par conſéquent cette diagonale AN tombe ſur la diagonale ON du quarré SOTN & le diviſe en deux également; ainſi des autres.

142. COROLLAIRE. *Si une ligne* AB *eſt diviſée* (Fig. 85.) *en pluſieurs parties égales, ſon quarré contient autant de fois le quarré de l'une de ſes parties, qu'il y a d'unités dans le quarré du nombre de parties.*

Suppoſons que la ligne AB ait 3 parties, je fais ſon quarré; des points de diviſion j'éleve des perpendiculaires ſur AB; je diviſe AM en un même nombre de parties, & des points de diviſion je mene des perpendiculaires ſur AM. Il eſt viſible par cette conſtruction que j'aurai 9 quarrés égaux au quarré AO de la premiere partie AC: or, 9 eſt le quarré du nombre 3 des parties. Donc, &c.

&c. & ainſi des autres, & la raiſon en eſt que le quarré AMNB n'eſt autre choſe que le produit de la ligne AB = 3 par la ligne AM = 3, lequel produit eſt 9.

143. COROLLAIRE. Delà, il ſuit que le quarré d'une ligne coupée en deux également eſt quadruple du quarré de ſa moitié, que le quarré d'une ligne coupée en trois également eſt noncuple du quarré de ſon tiers, &c.

144. PROPOSITION XXIX. *Si une ligne droite* AB (Fig. 86.) *eſt diviſée en pluſieurs parties égales ou inégales* AC, CD, DB, *le produit ou rectangle de la ligne* AB *par une autre ligne* AM, *eſt égal à la ſomme des produits ou rectangles de chaque partie par la ligne* AM.

Sur tous les points de diviſion de la ligne AB, j'éleve les perpendiculaires CS, DT, & le rectangle AMNB eſt diviſé en trois autres rectangles AMSC, CSTD, DTNB dont le premier eſt le produit ou le rectangle de la partie AC par la droite AM le ſecond eſt le produit ou le rectangle de la ſeconde partie CD par CS = AM, & le troiſiéme eſt le produit ou le rectangle de la troiſiéme partie DB par DT = AM; or ces trois rectangles compoſent le rectangle total; donc, &c.

145. PROPOSITION XXX. *Si une ligne* AB (Fig. 87.) *eſt diviſée en deux parties inégales* AC, CB, *le rectangle de la ligne* AB *par l'une de ſes parties* AC *eſt égal au rectangle des deux parties; plus le quarré de cette partie* AC.

J'éleve en A la perpendiculaire AD égal à AC; j'acheve le rectangle ADEB, & du point C j'éleve la perpendiculaire CR ſur AB. Le rectangle ADEB eſt donc le rectangle de la droite AB par ſa partie AC ou AD; le rectangle ADRC eſt le quarré de la partie AC, & le rectangle CREB eſt celui des deux parties BC, CA ou CR; or, il eſt viſible que le rectangle ADEB eſt égal au quarré ADRC, plus le rectangle CREB.

146. PROPOSITION XXXI. *Si une ligne droite* AB (Fig. 88.) *eſt diviſée en deux parties égales* AC, CB, *& en deux inégales* AD, DB; *le rectangle des deux inégales* AD, DB *eſt égal au quarré de la moitié* AC *de la ligne, moins le quarré de la partie* DC *interceptée entre les points de diviſion* D, C.

Je fais d'une part le quarré AMNC de la moitié AC, & j'en retranche le quarré DHRC de la partie DC; ce qui me donne un reſte AMNRHD qui eſt une eſpece d'équerre, qu'on nomme ordinairement un *Gnomon*. De l'autre côté j'éleve en D la droite

DE perpendiculaire sur AB & égal à AD, & achevant le rectangle DEFB; le rectangle est le même que celui des parties inégales AD, BD; ainsi il s'agit de faire voir que le gnomon AMNRHD est égal au rectangle DEFB, & pour cela :

Je prolonge RH en S, ce qui divise le gnomon en deux rectangle SN, SD; je prolonge aussi NC en P, ce qui divise le rectangle DEFB aussi en deux rectangles DP, PB : or les rectangle SN, PB sont égaux; car à cause de CN = CA, & de CR = CD, nous aurons NR = AD = DE = CP; c'est-à-dire les deux côtés NR, CP sont égaux, de même que les deux autres côtés MN, CB, à cause de MN = AC = CB, & les deux rectangles SD, DP sont aussi égaux, à cause de AD = DE, & de DC = DH; donc, le gnomon est égal au rectangle DEFB.

147. COROLLAIRE. *Donc le rectangle des parties inégales; plus le quarré de la partie interceptée* DC, *est égal au quarré de la moitié de la ligne.* Par la Proposition précédente, nous avons $AD \times DB = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$; donc en ajoûtant $\overline{CD}^2$ de part & d'autre, nous aurons $AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$.

148. PROPOSITION XXXII. *Si à une ligne droite* AB (Fig. 89.) *divisée en deux parties égales* AC, CB, *on ajoûte une autre ligne droite* AD, *le rectangle de toute la ligne* DB *par l'ajoûtée* AD, *est égale au quarré de la ligne* DC *composée de la moitié* AC *& de l'ajoûtée* AD, *moins le quarré de la moitié* AC *de la ligne* AB.

Je fais d'une part le quarré DMNC de la ligne DC, & j'en retranche le quarré AHRC de la ligne AC, ce qui donne un reste ou gnomon DMNRHA. De l'autre part, j'éleve en D une droite DE perpendiculaire sur DB & égale à DA, & achevant le rectangle DEFB ce rectangle est le même que celui de DB par DA; ainsi il est question de faire voir que le gnomon DMNRHA est égal au rectangle DEFB, & pour cela:

Je prolonge RH en S, ce qui divise le gnomon en deux rectangles SN, SA; je prolonge aussi NC en P; ce qui divise le rectangle DEFB en deux autres DP, PB : or à cause de DC = CN, & de AC = CR nous avons NR = DA = DE, & à cause du quarré DMNC, nous avons MN = NC; donc les deux rectangles SN, DP qui ont les côtés NR, MN égaux chacun à chacun aux côtés DC, DE sont égaux. De même nous

avons DA = DE = CP, & AH = AC = CB ; donc les deux rectangles SA, PB qui ont les côtés DA, AH égaux chacun à chacun aux côtés CP, CB ſont égaux, & par conſéquent le gnomon eſt égal au rectangle DEFB.

Remarque. Les deux Propoſitions précédentes reviennent ſouvent dans la Géométrie, & l'on fera fort bien de ſe les rendre familieres.

149. Proposition XXXIII. *Si d'un point* O *pris ſur la diagonale* AC *d'un rectangle ou d'un paralellogramme* ABCD, (Fig. 90. 91.) *on mene des droites* RS, TV *paralelles aux côtés* AD, DC; *les paralellogrammes* RDVO, TOSB *par leſquels la diagonale ne paſſe pas, ſont égaux.*

La diagonale diviſe le rectangle ou le paralellogramme en deux triangles ADC, ABC parfaitement égaux, (*N.* 118.) & les droites RS, TV diviſent chacun de ces triangles en deux autres triangles, & un rectangle ou paralellogramme : or, le rectangle ou paralellogramme AROT étant auſſi diviſé en deux triangles égaux par ſa diagonale AO, le triangle ARO eſt égal au triangle ATO, & par la même raiſon, dans le rectangle ou paralellogramme OVCS, le triangle OVC eſt égal au triangle OSC; donc ſi nous retranchons du triangle ADC les deux triangles ARO, OVC; & du triangle ABC les deux triangles ATO, OSC; le rectangle ou paralellogramme RDVO qui reſtera d'une part, ſera égal au rectangle ou paralellogramme TOSB qui reſtera de l'autre.

CHAPITRE V.

Des Raiſons, Proportions & Progreſſions Géométriques des Lignes.

150. TOut eſpace compris entre deux paralelles qui ne ſont point bornées par des perpendiculaires ou des obliques, ſe nomme *Eſpace paralelle.*

Les eſpaces paralelles étant indéfinis & non terminés de part & d'autre, le plus ou moins de longueur des paralelles n'augmente ni ne diminuë leur grandeur, & l'on peut conſiderer ces paralelles comme infiniment prolongées.

151. PROPOSITION XXXIV. *Si les perpendiculaires* RP, rp (Fig. 92.) *ou les également inclinées* TS, ts *compriſes entre deux eſpaces paralelles* ABCD, abcd *ſont égales, les eſpaces paralelles ſont égaux, & ſi les eſpaces paralelles ſont égaux, les perpendiculaires ou les également inclinées ſont égales.*

Je porte l'eſpace ABCD ſur l'eſpace *abcd*, en mettant la droite indéfinie CD ſur l'indéfinie *cd*, de façon que le point P de la perpendiculaire RP tombe ſur le point *p* de la perpendiculaire *rp*; ces deux perpendiculaires étant égales, tomberont l'une ſur l'autre; car d'un même point *p*, on ne peut élever deux perpendiculaires ſur une même ligne; (*N.* 51.) ainſi la droite indéfinie AB tombera ſur la droite indéfinie *ab* à cauſe que par un même point R on ne peut mener deux différentes paralelles à une même ligne, (*N.* 68.) & parconſéquent les deux eſpaces paralelles ſeront parfaitement égaux : on prouvera de la même façon que ſi deux également inclinées TS, *ts* ſont égales, les eſpaces paralelles ſont égaux. Ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Si l'on prétend que les deux eſpaces étant égaux, les perpendiculaires RP, *rp* ou les inclinées TS, *ts* ſoient inégales, je mets l'indéfinie CD ſur l'indéfinie *cd*; enſorte que le point P de la perpendiculaire RP, tombe ſur le point *p* de la perpendiculaire *rp*; ces deux perpendiculaires tomberont l'une ſur l'autre; mais comme on les ſuppoſe inégales, le point R tombera au-delà de *r* : par exemple, en Q, ſi RP eſt plus grande que *rp*, ou endeçà du point *r* : par exemple, en *q*, ſi RP eſt moindre que *rp*; & dans l'un & l'autre de ces cas, la paralelle AB ne tombera point ſur la paralelle AB, puiſqu'elle paſſera ou par Q ou pat *q*, & les deux eſpaces parelelles ne ſeront pas égaux; ce qui eſt contre la ſuppoſition. Donc, ſi les eſpaces paralelles ſont égaux, les perpendiculaires ſont néceſſairement égales; & on prouvera de même que les eſpaces étant égaux, les également inclinées ſont égales; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

152. COROLLAIRE. Ce que nous venons de dire ſeroit encore vrai, ſi les également inclinées LH, *ts* étoient inclinées en différent ſens; car il n'y auroit qu'à renverſer l'eſpace ABCD ſur l'eſpace *abcd*; c'eſt-à-dire, mettre l'indéfinie AB ſur l'indéfinie *cd*, de façon que la paralelle CD tombât du côté de la paralelle *ab*, & que le point L de l'inclinée LH tombât ſur le point *s* de l'inclinée *ts*; car alors ces deux inclinées ſe trouveroient inclinées du même ſens, & l'on démontreroit les mêmes choſes que ci-deſſus.

153. PROPOSITION XXXV. *Si après avoir mené dans un eſpace paralelle* ABCD (Fig. 93. 94.) *une perpendiculaire* EH, *& tant d'autres lignes inégalement inclinées qu'on voudra*, LM, NQ, TV, &c. *on diviſe la perpendiculaire, ou telle inclinée qu'on voudra, en deux ou pluſieurs parties égales ou inégales, & que des points de diviſion de cette ligne, on mene des paralelles aux paralelles* AB, CD *; je dis que les autres lignes menées entre ces deux paralelles* AB, CD *ſeront diviſées par les paralelles menées entre deux, en même raiſon que la ligne qui aura été premierement diviſée.*

Suppoſons que l'inclinée LM ait été diviſée en deux parties LP, PM (*Fig.* 93.) qui ſoient entr'elles en tel rapport qu'on voudra, & que du point de diviſion P on ait mené la droite XPZ paralelle aux paralelles AB, CD. Je conçois que de tous les points de la ligne LM, ſoient menées des paralelles à AB ou à CD, toutes ces paralelles diviſeront l'eſpace paralelle ABCD, en autant d'autres eſpaces paralelles que la ligne LM contiendra de petites parties égales; & comme la ligne LM eſt également inclinée ſur toutes ces paralelles, puiſque les angles du même côté ſont tous égaux, & que par conſéquent toutes ſes parties égales ſont également inclinées dans leurs petits eſpaces paralelles, il s'enſuit que tous ces petits eſpaces ſont égaux entr'eux; (*N.* 151.) or, la perpendiculaire EH & les autres inclinées NQ, &c. ſont diviſées par les petits eſpaces paralelles égaux chacun en un même nombre de parties que la ligne LM, & à cauſe que chacune de ces lignes n'eſt pas plus inclinée dans un petit eſpace que dans un autre, toutes les parties de chacune d'elles ſont égales entr'elles; (*N.* 151.) ainſi, comme il n'y a pas plus de petits eſpaces de L en P que de E en O, & de P en M que de O en H; il s'enſuit que le nombre de parties égales de LM compriſes dans ſa partie LP, eſt au nombre des parties égales compriſes dans ſa partie PM, comme le nombre de parties égales de la perpendiculaire EH compriſes dans ſa partie EO, eſt au nombre de parties égales compriſes dans OH; c'eſt-à-dire LP. PM :: EO. OH, & partant la perpendiculaire EH eſt diviſée en O, en même raiſon que l'inclinée LM en P.

Et on prouvera de même que les autres inclinées NQ, TV, &c. ſont diviſées par XZ, en même raiſon que la droite LM, & ce ſeroit encore la même choſe ſi la ligne LP avoit été diviſée en un plus grand nombre de parties LP, PS, SM, (*Fig.* 94.)

154. COROLLAIRE Ier. *Il ſuit delà que les eſpaces paralelles inégaux, ſont entr'eux comme les perpendiculaires ou comme les également inclinées entre ces paralelles, & que les perpendiculaires ou les également inclinées entre les eſpaces paralelles inégaux, ſont entr'elles comme les eſpaces.*

Car le nombre des petits eſpaces égaux contenus dans l'eſpace paralelle ABXZ, (*Fig.* 93.) eſt au nombre des petits eſpaces égaux contenus dans l'eſpace XZCD, comme le nombre de parties égales contenuës dans la partei EO de la perpendiculaire EH, eſt au nombre des parties égales contenuës dans la partie OH; & partant l'eſpace paralelle ABXZ, eſt à l'eſpace XZCD, comme la partie EO de la perpendiculaire eſt à la partie OH, ou comme la partie LP de l'oblique LM, eſt à la partie PM de cette même oblique; c'eſt-à-dire que ces deux eſpaces ABXZ XZCD ſont entr'eux comme leurs perpendiculaires LO, OH ou comme leur également inclinées LP, PM.

De même, puiſque la perpendiculaire EO contient autant de parties égales que l'eſpace paralelle ABXZ contient de petits eſpaces paralelles égaux, & que la perpendiculaire OH contient autant de ces mêmes parties égales que l'eſpace XZCD, contient de mêmes petits eſpaces égaux; il s'enſuit que la perpendiculaire EO eſt à la perpendiculaire OH, comme l'eſpace paralelle ABXZ eſt à l'eſpace XZCD; & la même choſe doit ſe dire des également inclinées LP, PM.

155. COROLAIRE II. *De ce que nous avons trouvé* (*N.* 153.) LP. PM::EO. OH *nous pouvons dire en compoſant* LP + PM. PM::EO + OH. OH *ou* LM. PM::EH. OH. Car il eſt clair que le nombre de parties égales contenuës dans LM eſt au nombre de parties égales contenuës dans ſa partie PM, comme le nombre de parties égales contenu dans EH eſt au nombre de parties égales contenuës dans OH, puiſque le nombre de parties contenuës dans LM, eſt égal au nombre de parties contenuës dans EH; de même que le nombre de parties contenuës dans MP, eſt égal au nombre de parties contenuës dans HO: & on prouvera de la même façon que LM. PL::EH. OE. D'où l'on tire cette régle générale; que ſi *deux ou pluſieurs lignes* LM, EH *ſont diviſées chacune en deux parties qui ſoient en proportion; chaque partie de l'une eſt à toute ſa ligne, comme la partie ſemblable de l'autre eſt à toute ſa ligne*, & cette regle s'étend auſſi à deux ou pluſieurs lignes LM, EH (*Fig.* 94.) qui ſeroient diviſées en un plus grand

nombre de parties proportionnelles entr'elles; ce qui ſe démontre toujours de la même façon.

156. COROLLAIRE III. Par un raiſonnement ſemblable à celui que nous venons de faire dans le Corollaire précédent, on prouvera aiſément que ſi deux lignes LM, EH (*Fig.* 93.) ſont diviſées en deux parties proportionnelles, en ſorte qu'on ait LP, PM :: EO, OH, on peut faire ſur ces quatre termes tous les changemens dont nous avons parlé dans le premier Livre touchant les proportions (*N.* 279, 280, &c:), & il y aura toujours proportion; ainſi on a le plaiſir de voir que les vérités Mathématiques ſe prouvent par différens principes dont les uns ajoutent de la clarté aux autres.

157. COROLLAIRE IV. *Si pluſieurs lignes droites* LM, EH, *&c.* (Fig. 93. 94.) *compriſes entre deux paralelles* AB, CD, *ſont coupées en deux ou pluſieurs parties proportionnelles entr'elles, les lignes droites menées par les points de diviſion de ces lignes ſont paralelles aux paralelles* AB, CD.

Les droites LM, EH (*Fig.* 93.) ſont diviſées proportionnellement aux points P, O, ſi l'on veut que la droite menée du point O au point P, ne ſoit pas paralelle aux droites AB, CD, la paralelle menée du point O coupera donc LM, ou en deſſous de P comme en R, ou en deſſus comme en S, ſuppoſons que cette paralelle coupe en R; donc à cauſe de OR paralelle aux paralelles AB, CD, nous aurons EO, OH :: LR, RM (*N.* 153.); or par la ſuppoſition, nous avons auſſi EO, OH :: LP, PM; ainſi les deux raiſons LR, RM, & LP, PM, étant chacune égale à la raiſon, EO, OH, ſeront égales entr'elles; donc nous aurons LR, RM :: LP, PM, ce qui eſt impoſſible, car l'antécédent LR, eſt plus grand par rapport à ſon conſéquent RM, que l'antécédent LP, par rapport à ſon conſéquent PM.

De même ſi la paralelle menée du point O coupoit LM en S, nous aurions EO, OH :: LS, SM (*N.* 153.), & par la ſuppoſition nous aurions auſſi EO, OH :: LP, MP; donc LS, SM :: LM, MP, ce qui eſt encore impoſſible, puiſque LS eſt moindre par rapport à ſon conſéquent SM que LP, par rapport à ſon conſéquent MP; donc il faut néceſſairement que la paralelle menée du point O paſſe par le point M.

Et on prouvera de même que ſi les droites LM, EH (*Fig.* 94.) ſont diviſées en plus de deux parties proportionnelles entr'elles,

les droites OP, RS qui joignent leurs points de diviſion ſont paralelles aux paralelles AB, CD.

158. PROPOSITION XXXVI. *Si les côtés* BA, BC (Fig. 95.) *d'un triangle* ABC, *ſont coupés par une ou pluſieurs lignes* MN, &c. *paralelles à la baſe, ces côtés ſont coupés proportionnellement, & ſi les côtés ſont coupés proportionnellement, les lignes qui les coupent ſont paralelles à la baſe.*

Par le ſommet B, je mene la droite RS paralelle à la baſe; ce qui me donne un eſpace paralelle RSAC, dans lequel les côtés AB, BC ſont des inclinées. Or ſi les lignes MN, &c. qui coupent ces inclinées ſont paralelles à la baſe AC ou RS, on démontrera comme ci-deſſus (*N.* 153.), que les inclinées AB, BC ſont coupées en même raiſon, & ſi les inclinées AB, BC ſont coupées en même raiſon, on prouvera auſſi comme ci-deſſus (*N.* 157.), que les droites MN, &c. qui paſſent par leur points de diviſion ſont paralelles à AC ou RS.

159. PROPOSITION XXXVII. *Si deux triangles* ABC, abc (Fig. 96.) *ont les trois angles* A, B, C *égaux aux trois angles* a, b, c, *chacun à chacun, les côtés oppoſés aux mêmes angles ſont proportionnels.*

Je mene des angles B, *b* les droites MN, *mn*, paralelles aux côtés oppoſés AC, *ac*, ce qui me donne deux eſpaces paralelles MNAC, *mnac*, dans leſquels les côtés AB, *ab* ſont également inclinés à cauſe de l'angle A égal à l'angle *a*, de même que les côtés BC, *bc*, à cauſe de l'angle B, égal à l'angle *b*; ainſi le côté AB eſt au côté *ab*, comme l'eſpace MNAC, eſt à l'eſpace *mnac* (*N.* 154.), & le côté BC, eſt au côté *bc*, comme le même eſpace paralelle MNAC, eſt à l'eſpace paralelle *mnac*. Donc la raiſon des côtés AB, *ab* eſt égale à la raiſon des côtés BC, *bc*, puiſque l'une & l'autre eſt égale à la raiſon des eſpaces, & partant AB, *ab*:: BC, *bc*.

Je mene de même du ſommet des angles égaux C, *c*, les droites RS, *rs* paralelles aux côtés oppoſés AB, *ab*, & à cauſe des angles A, B égaux aux angles *a*, *b* chacun à chacun, les côtés AC, *ac*; BC, *bc*, ſont également inclinés dans les eſpaces paralelles ABRS, *abrs*, ainſi nous avons AC, *ac*:: ABRS *abrs*, & BC, *bc*:: ABRS, *abrs* (*N.* 154.), & portant AC, *ac*:: BC, *bc*, mais nous avons trouvé AB, *ab*:: BC, *bc*; donc AC, *ac*:: AB, *ab*, c'eſt-à-dire, les côtés du triangle ABC, ſont proportionnels à ceux du triangle *abc*.

160.

160. COROLLAIRE. *Si deux triangles* ABC, abc (Fig. 96.) *ont les côtés proportionnels, les angles oppoſés aux côtés proportionnels ſont égaux.*

Je fais en A avec le côté AC, un angle CAX, égal à l'angle *a*, & en C, un angle ACX égal à l'angle *c*, & par conſéquent le troiſiéme angle AXC du triangle AXC eſt égal au troiſiéme angle *b* du triangle *abc* (*N.* 97.), & ces deux triangles AXC, *abc* ont les côtés proportionnels (*N.* 159.); nous avons donc *ac*, *ab*:: AC. AX, mais par la ſuppoſition, nous avons auſſi *ac*, *ab*:: AC, AB; donc AC, AX:: AC, AB, ou en alternant AC, AC:: AX, AB, & par conſéquent à cauſe de AC = AC, nous avons le côté AX du triangle AXC égal au côté AB du triangle ACB. De même dans les triangles *abc*, AXC, nous avons *ac*, *cb*:: AC, CX, & par la ſuppoſition nous avons auſſi *ac*, *cb*:: AC, CB; donc AC, CX:: AC, CB, & partant à cauſe de AC = AC, le côté CX du triangle ACX eſt égal au côté CB du triangle ABC; ainſi les deux triangles AXC, ABC ayant le côté AC commun, & les deux autres côtés égaux aux deux autres côtés chacun à chacun ſont parfaitement égaux (*N.* 100.), & les trois angles de l'un ſont égaux chacun à chacun aux trois angles de l'autre; mais les trois angles du triangle AXC ont été faits égaux aux trois angles du triangle *abc*; donc les trois angles du triangle *abc*, ſont égaux aux trois angles du triangle ABC.

161. PROPOSITION XXXVIII. *Si deux côtés* AB, BC *d'un triangle* ABC (Fig. 97.) *ſont proportionnels aux côtés* ab, bc *d'un autre triangle* abc, *& que l'angle* B *compris par les deux premiers ſoit égal à l'angle* b *compris par les deux autres, les trois côtés du triangle* ABC, *ſont proportionnels aux trois côtés du triangle* abc.

Je prens ſur le côté *ab* du plus grand triangle *abc*, une partie *bm* égale au côté AB de l'autre triangle; & du point *m*, je mene *mn* paralelle à la baſe *ac*; les deux triangles *abc*, *mbn* ont les trois angles égaux, car l'angle *b* eſt commun, & à cauſe des paralelles *ac*, *mn*, les angles du même côté *bac*, *bmn* ſont égaux (*N.* 71.), de même que les angles *bca*, *bnm*; donc ces triangles ont les côtés proportionnels (*N.* 159.), & nous avons *ab*, *bc*:: *bm*, *bn*, mais par la ſuppoſition nous avons auſſi *ab*, *bc*:: AB, BC, donc *bm*, *bn*:: AB, BC, ou en alternant *bm*, AB:: *bn*, BC; mais *bm* eſt égal à AB par la conſtruction; donc *bn* = BC, & les deux triangles *mbc*, ABC ſont parfaitement égaux (*N.* 100.) à cauſe de l'angle B, égal à l'angle *b*, & des côtés qui comprennent l'an-

gle B, égaux aux côtés qui comprennent l'angle *b*; ainſi puiſque les triangles *mbn*, *abc*, ont les trois angles égaux chacun à chacun, les triangles ABC, *abc*, auront auſſi les trois angles égaux chacun à chacun, & partant leur côtés ſeront proportionnels (*N.* 159.).

162. *Definition.* Deux ou pluſieurs figures ſont dites *Semblables*, lorſqu'elles ont les angles égaux chacun à chacun, & que les côtés oppoſés aux angles égaux ſont proportionnels.

163. *Remarque.* Dans les triangles, il ſuffit de connoître que les trois angles ſont égaux aux trois angles chacun à chacun, ou que les côtés ſont proportionnels pour pouvoir dire qu'ils ſont ſemblables, car l'une de ces conditions entraîne néceſſairement l'autre avec elle (*N.* 159, 160.); & il faut dire la même choſe de tous les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, & qui par conſéquent ſont compoſés d'un même nombre de triangles ſemblables. Mais à l'égard des autres figures, ce n'eſt pas la même choſe. Tous les rectangles ont les quatre angles droits, & par conſéquent égaux, & cependant tous les rectangles n'ont pas les côtés proportionnels : ſuppoſons par exemple, que les deux rectangles ABCD, *abcd* ayent les côtés proportionnels, c'eſt-à-dire qu'on ait AB, AD :: *ab*, *ad*. Je n'ai qu'à diminuer ou augmenter le côté *ab* du rectangle *abcd*, & dès-lors les côtés ne ſeront plus proportionnels; car ſi je prolonge *ab* en *e*, ce qui donnera le rectangle *aefd*, nous n'aurons plus AB, AD :: *ae*, *ad*, puiſqu'il s'enſuivroit *ab*, *ad* :: *ae*, *ad*, & que par conſéquent *ab* ſeroit égal à *ae*, à cauſe de *ad* = *ad*, ce qui eſt impoſſible. De même les côtés d'un paralellogramme peuvent être proportionnels aux côtés d'un rectangle, & cependant les angles du paralellogramme ne ſeront pas égaux aux angles du rectangle, &c. c'eſt pourquoi afin de ne pas équivoquer ſur le terme de figures ſemblables, il faut toujours dire que les angles doivent être égaux chacun à chacun, & que les côtés oppoſés aux angles égaux ſont proportionnels.

164. Proposition. XXXIX. *Les Figures ſemblables peuvent toujours ſe diviſer en un même nombre de triangles ſemblables.*

Soient les deux pentagones irréguliers ABCDE, *abcde* (*Fig.* 99.) ſemblables entr'eux, des angles égaux B, *b*, je mene des droites à tous les angles où j'en puis mener, ce qui diviſe chacun de ces polygones en trois triangles. Or les deux triangles BAE, *bae* ayant l'angle A égal à l'angle *a*, & les côtés AB, AE proportionnels aux côtés *ab*, *ae*, par la ſuppoſition, ſont ſemblables entr'eux

(*N.* 161.); donc l'angle AEB eſt égal à l'angle *aeb*, & comme l'angle AED eſt égal à l'angle *aed*, par la ſuppoſition l'angle BED eſt auſſi égal à l'angle *bed*; or dans les triangles ſemblables ABE, *abe*, les droites BE, *be* ſont proportionnelles aux côtés AE, *ae*, & ceux-ci ſont proportionnels aux côtés ED, *ed*; donc les droites BE, *be* ſont auſſi proportionnelles aux côtés ED, *ed*, & par conſéquent à cauſe de l'angle BED compris par les droits BE, ED égal à l'angle *bed*, compris par les droits *be*, *ed*, les triangles BED, *bed* ſont auſſi ſemblables, & continuant le même raiſonnement, on prouvera que les deux autres triangles BCD, *bcd* ſont ſemblables. Donc, &c.

165. PROPOSITION XL. *Les contours des figures ſemblables ſont entr'eux comme leurs côtés homologues, ou comme leurs rayons, ou comme leurs Apothêmes; ſi ces figures ont des rayons & des Apothêmes, ou comme les lignes ſemblablement poſées, c'eſt-à-dire qui ſont menées ou des angles égaux, ou par des points qui coupent les côtés homologues en même raiſon, & qui ſont des angles égaux tournés du même côté.*

Soient les deux Hexagones réguliers ABCDEF, *abcdef* (*Fig.* 100.), diviſez l'un & l'autre en leurs ſix triangles égaux & ſemblables à cauſe de l'égalité des angles; les ſix côtés du premier étant égaux entr'eux, de même que les ſix côtés du ſecond; il eſt clair que la raiſon du côté AB au côté *ab*, eſt la même que celle du côté BC au côté *bc*, & ainſi de ſuite; donc les ſix côtés du premier pris enſemble, c'eſt-à-dire 6AB, contiendront autant de fois les ſix côtés du ſecond pris enſemble ou 6*ab* que AB contient *ab*; or les ſix côtés du premier forment ſon contour, & les ſix côtés du ſecond forment le contour du ſecond; donc le contour du premier eſt au contour du ſecond, comme le côté homologue AB, eſt au côté homologue *ab*.

Mais dans les triangles ſemblables AOB, *aob*, nous avons AB, *ab* :: AO, *ao*; donc puiſque les contours ſont entr'eux comme les côtés AB, *ab*, ils ſont auſſi comme les rayons AO, *ao*.

Je mene les apothêmes OR, *or*, qui coupent les baſes BA, *ba* des triangles iſoſceles AOB, *aob* en deux également (*N.* 107.), & à cauſe que les baſes BA, *ba* ſont proportionnelles aux rayons OA, OA, leurs moitiés RA, *ra* ſont auſſi proportionnelles aux mêmes rayons, & partant à cauſe de l'angle compris RAO égal à l'angle compris *rao*, les triangles RAO, *rao* ont tous leurs côtés proportionnels (*N.* 161.); donc AO, *ao* :: OR, *or*; mais les

contours ſont entr'eux comme les rayons AO, *ao*; donc ils ſont auſſi comme les apothêmes OR, *or*.

Je prens ſur les côtés AF, *af*, les parties AH, *ah* égales, par exemple, chacune au tiers de ces lignes, & des points H, *h*; je mene des droites HS, *hs*, qui ſont des angles égaux avec les lignes AF, *af*, & du même côté, ces lignes HS, *hs* ſont donc ſemblablement poſées; or les triangles HSF, *hsf*, ayant les deux angles ſur HF, égaux chacun à chacun aux deux angles ſur *hf*, le troiſiéme eſt par conſéquent égal au troiſiéme (*N.* 97.), & les deux triangles ſont ſemblables, donc HF, *hf* :: HS, *hs*; mais les droites HF, *hf* étant les deux tiers des côtés AF, *af*, ſont proportionnelles à ces côtés, donc les côtés AF, *af* ſont entr'eux comme les ſemblablement poſées HS, *hs*, & par conſéquent les contours étant entr'eux comme les côtés AF, *af*, ſont auſſi comme les ſemblablement poſées HS, *hs*.

Puiſque les triangles HSF, *hsf* ſont ſemblables, nous avons SF, *sf* :: HF, *hf*, or HF, *hf* :: AF, *af*, & AF, *af* :: OF, *of*, donc OF, *of* :: SF, *sf*, ou en alternant OF, SF :: *of*, *sf*. Donc en diviſant, nous aurons OF—SF, OF :: *of* — *fs*, *of*, c'eſt-à-dire, OS, OF :: *os*, *of*, ou OS, *os* :: OF, *of*. Maintenant ſi je prolonge les droites HS, *hs* en T, *t*, les angles OST, *ost*, ſeront égaux à cauſe que leurs oppoſés au ſommet ſont égaux, & comme les angles SOT, *sot* ſont auſſi égaux, le troiſiéme OTS ſera égal au troiſiéme *ots*, & les deux triangles OST, *ost*, ſeront ſemblables, ce qui donne ST, *st* :: SO, *so*; or SO, *so* :: OF, *of*, & les contours ſont entr'eux comme les rayons OF, *of*, donc ils ſont auſſi comme les ſemblablement poſées ST, *st*.

Et on prouvera par des ſemblables raiſonnemens que les droites ST, *st* étant prolongées en V & *u*, les contours ſeront entr'eux, comme les ſemblablement poſées TV, *tu*, & comme les trois lignes HS, ST, TV, ſont à chacune des trois lignes *hs*, *st*, *tu*, dans la raiſon des contours; on prouvera auſſi que les trois enſemble HS, ST, TV, c'eſt-à-dire la ligne HV, ſont aux trois enſemble *hs*, *st*, *tu*, c'eſt-à-dire à la ligne *hu*, ſemblablement poſée dans la raiſon des contours.

Et les mêmes choſes ſe démontreront dans les Figures ſemblables irréguliéres (*Fig.* 99.), puiſqu'on peut toujours les diviſer en un même nombre de triangles ſemblables (*N.* 164.).

166. *Definition.* Les contours ou les circuits des Figures ſemblables régulieres, ou irrégulieres, ſe nomment *Périmétres*.

167. PROPOSITION XLI. *Si l'on diviſe en deux également l'un des angles* B *d'un triangle* ABC (Fig. 101.), *par une droite* BE *qui coupe le côté oppoſé* AC, *les ſegmens* AE, EC *du côté* AC, *ſont entr'eux comme les côtés* AB, BC.

Des angles A, C, je mene des droites RS, MN, paralelles à BE, ce qui me donne deux eſpaces paralelles RSEB, MNEB; or par la conſtruction les angles ABE, CBE étant égaux, les côtés AB, BC ſont également inclinés entre ces deux eſpaces, & par conſéquent ces deux côtés ſont entr'eux comme leurs eſpaces; de même à cauſe de l'angle CEX, égal à ſon oppoſé au ſommet AEB, les ſegmens AE, EC ſont également inclinés dans leurs eſpaces, & ſont entr'eux comme ces mêmes eſpaces; donc la raiſon des côtés AB, BC, eſt la même que celle des ſegmens AE, BC, l'une & l'autre étant la même que la raiſon des eſpaces, & partant AE, EC : : AB, BC.

168. PROPOSITION XLII. *Si du ſommet de l'angle droit* ABC (Fig. 102.) *d'un triangle rectangle* ABC, *on abaiſſe ſur l'hypotenuſe* AC, *une perpendiculaire* BR, *le triangle ſera diviſé en deux autres triangles rectangles* ABR, RBC, *ſemblables entr'eux & au triangle* ABC.

Les triangles ABC, ABR ont l'angle droit ABC, égal à l'angle droit ARB, & l'angle aigu A eſt commun à tous les deux, donc le troiſiéme eſt égal au troiſiéme (*N.* 98.), & les deux triangles ſont ſemblables (*N.* 162.). Par la même raiſon les triangles ABC, BRC, qui ont l'angle C commun, & l'angle droit égal à l'angle droit, ſont ſemblables entr'eux, d'où il ſuit que les deux triangles ARB, BRC, ſont ſemblables, puiſqu'ils ne peuvent être ſemblables au triangle ABC, ſans avoir chacun les trois angles égaux aux trois angles de ce triangle, & partant égaux entr'eux.

169. COROLLAIRE Ier. *La perpendiculaire* BR, *abaiſſée du ſommet de l'angle droit ſur l'hypotenuſe* AC, *eſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens* AR, RC *de l'hypotenuſe.*

Les triangles ABR, BRC ſont ſemblables (*N.* 168.), & partant les côtés oppoſés aux angles égaux ſont proportionnels; or à cauſe que les triangles ABR, ABC ſont auſſi ſemblables (*N.* 168.), & que l'angle aigu A eſt commun à tous les deux, l'autre angle aigu ABR du triangle ABR, doit être égal à l'autre angle aigu ACB; & comme cet angle ACB, appartient au triangle rectangle BRC, ſemblable au triangle ABR, il s'enſuit que l'an-

gle aigu A du triangle ABR eſt égal à l'angle aigu CBR du triangle CBR. Nous avons donc dans ces deux triangles ABR, BRC, le côté AR du triangle ABR oppoſé à l'angle ABR, eſt au côté RB du même triangle oppoſé à l'angle A, comme le côté RB du triangle RBC oppoſé à l'angle C qui eſt égal à l'angle ABR, eſt au côté RC de ce même triangle oppoſé à l'angle RBC, égal à l'angle A. Ainſi AR, RB :: RB, RC, & par conſéquent RB eſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens AR, RC de l'hypotenuſe.

170. COROLLAIRE II. *La perpendiculaire* BR *étant menée du ſommet de l'angle droit ſur l'hypotenuſe, chaque côté* AB, BC *du triangle rectangle* ABC, *eſt moyen proportionnel entre l'hypotenuſe & le ſegment de l'hypotenuſe qui ſe trouve de ſon côté.*

Les triangles ABR, ABC ſont ſemblables (*N.* 168.), & nous venons de voir que l'angle ABR eſt égal à l'angle C. Donc les côtés AR, AB du triangle ARB, ſont proportionnels aux côtés AB, AC du triangle ABC, car il eſt aiſé de voir que ces côtés ſont oppoſés à des angles égaux. Ainſi nous avons AR, AB :: AB, AC, c'eſt-à-dire le côté AB, eſt moyen proportionnel entre le ſegment AR de l'hypothenuſe qui ſe trouve de ſon côté, & l'hypothenuſe entiere AC.

De même les triangles BRC, ABC ſont ſemblables (*N.* 168.); & l'angle RBC eſt égal à l'angle A; donc les côtés RC, BC du triangle RBC, ſont proportionels aux côtés BC, AC du triangle ABC; ainſi RC, BC :: BC, AC; le côté BC eſt moyen proportionnel entre le ſegment RC, & l'hypothenuſe AC.

171. COROLLAIRE III. *Dans tout triangle rectangle* ABC (Fig. 103.) *le quarré de l'hypothenuſe eſt égal aux quarrés des deux autres côtés pris enſemble.* Du ſommet B de l'angle droit, j'abaiſſe la perpendiculaire BR ſur l'hypothenuſe, & par le Corollaire précédent, j'ai AR, AB :: AB, AC, & faiſant le produit des extrêmes, & le quarré de la moyenne; j'ai $AR \times AC = \overline{AB}^2$; ainſi élevant en A une perpendiculaire AP = AC, & achevant le rectangle APQR, ce rectangle eſt égal au quarré BMNA du côté AB. Or, par le même Corollaire précédent, j'ai RC, CB :: CB, AC; donc $RC \times AC = \overline{CB}^2$; c'eſt pourquoi élevant en C la perpendiculaire CS = AC, & achevant le rectangle CSQR; ce rectangle eſt égal au quarré CBTV du côté CB; donc les deux rectangles APQR, CSQR pris enſemble ſont égaux aux deux

quarrés BMNA, CBTV; mais les deux rectangles pris enſemble forment le quarré APSC de l'hypothenuſe AC, puiſque les côtés AR, RC pris enſemble font l'hypothenuſe AC, & que AP eſt égal à AC par la conſtruction; donc le quarré de l'hypothenuſe eſt égal aux quarrés des deux autres côtés pris enſemble.

172. PROBLEME. *Les trois côtés* AB, BC, AC *d'un triangle rectangle étant connus* (Fig. 103.), *connoître la perpendiculaire* BR, *abaiſſée de l'angle droit ſur l'hypothenuſe, & les ſegmens* AR, RC.

Nous avons $AR \times AC = \overline{AB}^2$ (*N.* 170.); diviſant donc de part & d'autre par AC, nous aurons $AR = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$; c'eſt-à-dire, ſi l'on fait le quarré de la valeur du côté AB, & qu'on la diviſe par la valeur de l'hypothenuſe, le quotient ſera le ſegment AR, & retranchant la valeur de ce ſegment de la valeur de l'hypothenuſe, le reſte ſera l'autre ſegment RC.

Maintenant, puiſque le triangle ARB eſt rectangle, & que le côté AB eſt ſon hypothenuſe; nous aurons $\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$, donc en retranchant $\overline{AR}^2$ de part & d'autre, nous aurons $\overline{AB}^2 - \overline{AR}^2 = \overline{RB}^2$; c'eſt-à-dire que ſi du quarré du côté connu AB, on retranche le quarré du ſegment AR, qu'on peut connoître, comme on vient de voir, le reſte ſera le quarré de la perpendiculaire, & la racine quarrée de ce reſte ſera la valeur de la perpendiculaire.

173. PROPOSITION XLIII. *Dans tout triangle* ABC (Fig. 104.) *le quarré du côté* AC *oppoſé à un angle aigu* B, *eſt égal à la ſomme des quarrés des autres côtés* AB, BC, *moins deux rectangles faits de l'un des côtés* BC, *par ſa partie* BO, *coupée du côté de* B, *par la perpendiculaire* AO, *menée de l'angle oppoſé* A.

Je fais le quarré ADEC du côté AC, le quarré ABRS de AB, le quarré CBTV de CB, & le quarré COZX de CO. Je prolonge OZ en L, & XZ en F; ainſi comme le quarré de BC, contient le quarré de ſa partie OC, plus le quarré de ſa partie BO, plus deux rectangles égaux des deux parties (*N.* 140.); ces deux rectangles égaux ſont OBFZ, ZLVX, & ajoutant au premier le quarré FTLZ de la partie BO, & au ſecond un quarré HIVX, égal au même quarré de BO, les deux rectangles BOTL, ZLIH ſeront égaux, & ſeront deux produits de BO par BT ou BC. Cela poſé.

Dans le triangle rectangle AOC, nous avons $\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$; or le quarré du côté BC surpasse le quarré $\overline{CO}^2$, de tout le gnomon BTVXZO, & comme dans le triangle rectangle ABO, le quarré du côté AB qui est l'hypothenuse de ce triangle, est égal au quarré $\overline{AO}^2$, plus le quarré $\overline{BO}^2$, & que par conséquent le quarré $\overline{AB}^2$ surpasse le quarré $\overline{AO}^2$ de la valeur de $\overline{BO}^2$, c'est-à-dire du petit quarré XVIH, il s'ensuit que les quarrés de BC, AB surpassent les quarrés $\overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$, c'est-à-dire le quarré $\overline{AC}^2$ de la valeur du gnomon BTVXZO, plus celle du petit quarré VIHX, & par conséquent de la valeur des deux rectangles OBTL, ZLIH ou de deux produits de la partie BO par BT ou BC. Donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BO \times BC$.

174. PROBLEME. *Connoissant les trois côtés d'un triangle* (Fig. 104.), *dans lequel la perpendiculaire* AO *menée de l'un des angles* A *sur le côté opposé* BC, *tombe en dedans du triangle, connoître la perpendiculaire, & les segmens* BO, OC *du côté* BC.

Puisque la perpendiculaire AO tombe au-dedans du triangle, les angles ABO, ACO, que les côtés AB, AC font avec le côté BC sont aigus, car la perpendiculaire tombe toujours du côté des moindres angles que font les obliques (*N.* 83.); ainsi le côté AC étant opposé à un angle aigu B, nous aurons $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BO \times BC$; & ajoutant de part & d'autre $2BO \times BC$, puis retranchant $\overline{AC}^2$, nous aurons $2BO \times BC = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$, & divisant tout par BC, nous aurons $2BO = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{BC}$, c'est-à-dire, que si de la somme des quarrés des côtés AB, BC, on retranche le quarré du côté AC, & qu'on divise le reste par le côté BC, le quotient sera le double du segment BO, & la moitié du quotient sera le segment BO; c'est pourquoi, si du côté BC, on retranche le segment BO, le reste sera la valeur de l'autre segment OC.

Et comme dans le triangle rectangle ABO, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$ (*N.* 172.), & qu'en retranchant $\overline{BO}^2$ de part & d'autre, nous avons $\overline{AB}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2$, il s'ensuit que si du quarré du

du côté connu AB, on retranche le quarré du ſegment BO, qu'on peut connnoître, comme on vient de voir, le reſte ſera le quarré de la perpendiculaire AO; & la racine de ce reſte ſera la valeur de AO.

175. POPOSITION XLIV. *Dans tout triangle obtus-angle* ABC (Fig. 105.) *le quarré du côté* AC *oppoſé à l'angle obtus* ABC *eſt égal aux quarrés des côtés* AB, BC, *plus deux rectangles du côté* BC, *ſur lequel tombe la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé* A *par le prolongemennt* BO *de ce côté juſqu'à la perpendiculaire.*

Je fais le quarré ADEC, le quarré AORS de la perpendiculaire AO, le quarré COZX de OC, & le quarré CBTV de CB. Je prolonge les droites BT, VT en L, F, & comme le quarré de OC contient le quarré de ſa partie BC, plus le quarré de l'autre partie OB, plus deux rectangles égaux des deux parties (*N.* 140.), ces deux rectangles égaux ſont BOFT, TLXV, & chacun d'eux eſt le produit de OB par BC. Cela poſé.

Le triangle AOC étant rectangle, nous avons $\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$, or le quarré de OC vaut le quarré du côté BC, plus tout le gnomon BOZXVT, & comme dans le triangle rectangle AOB, dont AB eſt l'hypothenuſe, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$, & qu'en retranchant $\overline{AO}^2$ de part & d'autre, nous avons $\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$, il s'enſuit que le quarré $\overline{AC}^2$, ou les deux quarrés enſemble $\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$, valent le quarré $\overline{BC}^2$, plus le gnomon BOZXVT, plus le quarré $\overline{AB}^2$, moins le quarré $\overline{OB}^2$, c'eſt-à-dire moins le quarré TFZL, mais le gnomon BOZXVT, moins le quarré TFZL n'eſt autre choſe que les deux rectangles BOFT, TLXV qui valent $2OB \times BC$; donc $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 + 2OB \times BC$.

176. PROBLEME. *Les trois côtés d'un triangle obtus-angles* ABC (Fig. 105.) *étant connus, connoître la perpendiculaire menée de l'un des angles aigus* A, *ſur le côté oppoſé* BC, *& le prolongement de ce côté ſur la perpendiculaire.*

Nous avons $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 + 2OB \times BC$ (*N.* 175.) retranchant donc de part & d'autre les quarrés $\overline{CB}^2$, $\overline{AB}^2$, nous aurons $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2 = 2OB \times BC$, & diviſant de part & d'autre par CB, nous aurons $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2}{CB} = 2OB$, c'eſt-à-dire que ſi

de la valeur du quarré $\overline{AC}^2$, on retranche les valeurs des quarrés $\overline{CB}^2$, $\overline{AB}^2$, & qu'on diviſe le reſte par la valeur du côté BC, le quotient ſera le double du prolongement OB; ainſi la moitié de ce quotient ſera la valeur du prolongement.

Et comme dans le triangle rectangle ABO, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$, ſi on retranche de part & d'autre $\overline{OB}^2$, on aura $\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$, ainſi retranchant de la valeur du quarré $\overline{AB}^2$, le quarré du prolongement OB, qu'on peut connoître, comme il vient d'être dit, le reſte ſera le quarré de la perpendiculaire AO, & la racine de ce reſte ſera la valeur de la perpendiculaire.

177. PROBLEME. *Une droite* AB (Fig. 106. 107.) *étant diviſée en tant de parties qu'on voudra, égales ou inégales, diviſer une autre ligne donnée* AD *en même raiſon que la ligne* AB.

Je fais à l'extrêmité A de la droite AB un angle à volonté DAB, dont je fais le côté AD égal à l'autre ligne donnée AD; je joints les extrêmités des côtés AB, AD, par la droite BD, & des points de diviſion, je mene des paralelles à BD, leſquelles coupent la droite AD en même raiſon que AB; car menant par A une droite RS paralelle à BD, les droites AB, AD compriſes dans l'eſpace paralelle RSBD, ſont coupées en même raiſon par les droites MC, &c. paralelles aux paralelles RS, BD (*N.* 153.)

178. COROLLAIRE. *Si une ligne* AD (Fig. 106. 107.) *eſt coupée en parties proportionnelles aux parties d'une autre ligne* AB, *cette ligne* AD *ne peut pas être coupée du même côté en d'autres parties qui ſoient en même raiſon.*

Suppoſons que AD (*Fig.* 106.) ſoit coupée en C, en deux parties proportionnelles aux deux parties AM, MB de la droite AB. Si on veut que cette ligne AD puiſſe être coupée du même côté en deux autres parties qui ſoient encore dans la même raiſon, le point de diviſion ſera ou entre A & C, comme le point H ou en delà de C, comme le point T. Or, dans le premier cas, il eſt viſible que la partie AH plus petite que AC, ſera plus petite par rapport à la partie reſtante HD plus grande que CD que la partie AC, par rapport à la partie reſtante CD, & que par conſéquent il ne ſera pas vrai de dire: AH, HD :: AC, CD, de même dans le ſecond cas, la partie AT plus grande que AC ſera

plus grande par rapport à la partie TD moindre que CD, que AC n'eſt grand par rapport à CD, & il ne ſera pas vrai non plus de dire AT, TD :: AC, CD. Donc AD ne peut pas être coupé du même côté en deux autres parties qui ſoient dans la raiſon des parties AC, CD.

Mais on pourroit fort bien diviſer AD de l'autre côté en deux parties qui ſeroient dans la raiſon des parties AC, CD, car je n'ai qu'à prendre une partie DV égale à AC, & dès-lors l'autre partie AV ſera égale à CD, & nous aurons DV, VA :: AC, CD.

Et on prouvera les mêmes choſes ſi la ligne AD étoit diviſée en un plus grand nombre de parties.

179. PROBLEME. *Trouver une troiſiéme proportionnelle à deux lignes données* AC, AB (Fig. 108.).

Je fais un angle à volonté DAE; je porte ſur le côté AE la premiere des lignes données de A en C; je porte la ſeconde ſur l'autre côté de A en B, & je joints les points C, B par la droite CB; je porte auſſi ſur le premier côté AE la ſeconde ligne donnée de A en E, & du point E, menant la droite ED paralelle à CB, & qui coupe le côté AD en D, la droite AD eſt la troiſiéme proportionnelle.

Car les triangles ACB, AED ayant l'angle A commun, les angles ACB, AED égaux à cauſe qu'ils ſont faits du même côté par les paralelles BC; DE (*N.* 71.), & les angles ABC, ADE égaux auſſi par la même raiſon, ſont ſemblables. Donc AC, AB:: AE, AD; mais AB = AE par la conſtruction; donc AC, AB:: AB, AD, & par conſéquent AD eſt la troiſiéme proportionnelle.

180. PROBLEME. *Trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données* AB, AC, AD (Fig. 109.).

Je fais un angle quelconque DAE, je porte ſur le premier côté DA la premiere des lignes données AB, de A en B, & ſur le ſecond EA, la ſeconde ligne AC de A en C. Je joints les points B, C par la droite BC, & portant la troiſiéme ligne donnée AD ſur le premier côté DA, de A en D; je mene par le point D la droite DE paralelle à BC, & qui coupe l'autre côté en E; la droite AE eſt la quatriéme proportionnelle.

Car les triangles ABC, ADE étant ſemblables à cauſe des paralelles CB, DE, nous avons AB, AC:: AD, AE.

181. PROBLEME. *Les deux premieres lignes d'une progreſſion Géo-*

métrique de lignes étant données, continuer cette progreſſion tant qu'on voudra.

Nommons les deux lignes données *a*, *b*. Je cherche une troiſiéme proportionnelle à ces deux lignes, & je la nomme *c*; ainſi *c* eſt le troiſiéme terme de la progreſſion; je cherche une troiſiéme proportionnelle aux deux lignes *b*, *c*, & la nommant *d*, elle ſera le quatriéme terme de la progreſſion, car par conſtruction nous aurons *a*, *b* : : *b*, *c* & *b*, *c* : : *c*, *d*; donc *a*, *b* : : *b*, *c* : : *c*, *d* ou : : *a*, *b*, *c*, *d*, & continuant de la même façon, on trouvera tant de termes de la progreſſion qu'on voudra.

Quant à la maniere de trouver la ſomme d'une progreſſion Géométrique de lignes, elle eſt la même que celle que nous avons enſeignée dans le premier Livre, en parlant des progreſſions Géométriques.

182. PROBLEME. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* AB, BC (Fig. 110.)

Je mets la petite ſur la grande de B en C; je prolonge la grande du côté de B, en faiſant BH égal à AC; du point A pris pour centre, & d'un rayon égal à AB; je décris un arc PR, du point H pris pour centre, & d'un rayon égal à HC; je décris un arc ST qui coupe l'arc PR en O, d'où je mene aux points C, B les droites OC, OB, & chacune de ces droites eſt la moyenne proportionnelle demandée, ce que je prouve ainſi:

Par la conſtruction, nous avons AC = HB, ajoutant donc de part & d'autre la partie CB, nous aurons AB = HC; ainſi les arcs PR, TS ayant été décrits avec les rayons égaux AB, HC, qui pris enſemble ſont plus grands que AH, ces deux rayons ſe couperont hors de la ligne AH en un ſeul point O du côté de O (*N.* 59.), & ce point ſera également éloigné des extrêmités A, H de la ligne AH; c'eſt pourquoi ſi du point O on abaiſſoit une perpendiculaire ſur AH, cette perpendiculaire couperoit AH en deux parties égales à cauſe des obliques égales ou rayons OA, OH (*N.* 54.), c'eſt-à-dire, ſur le milieu Q de la partie CB, à cauſe de AC = BH, ce qui fait que AC + $\frac{1}{2}$ CB = BH + $\frac{1}{2}$ CB; ainſi les points C, B des obliques OC, OB étant également éloignés du point Q de la perpendiculaire, ces deux obliques ſont égales (*N.* 53.), & le triangle OCB eſt iſoſcele; or, ABO eſt auſſi iſoſcele, puiſque AB eſt égal à AO, & l'un des angles ABO ſur la baſe BO, eſt égal à l'un des angles OBC, ſur la baſe CB du triangle iſoſcele OCB, donc le ſecond angle

ſur la baſe du triangle ABO eſt égal au ſecond angle ſur la baſe du triangle OBC, & par conſéquent le troiſiéme angle eſt égal au troiſiéme (*N.* 97.), & les deux triangles ABO, OBC, ſont ſemblables; comparant donc les côtés oppoſés aux mêmes angles, nous trouverons que les deux côtés AB, BO du triangle ABO ſont proportionnels aux deux côtés OB, BC du triangle OBC, c'eſt-à-dire AB, BO :: BO, BC, & par conſéquent BO eſt moyenne proportionnelle entre les deux données AB, BC.

On trouvera dans le Chapitre qui traite du cercle, une autre maniere de chercher une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

183. *Definition.* On dit que deux lignes *a*, *b* ſont *réciproques* à deux lignes *c*, *d*, lorſque l'une des deux premieres *a* eſt à l'une des deux dernieres *c*, réciproquement comme l'autre des deux dernieres *d*, eſt à l'autre des deux premieres *b*, ou ce qui revient au même, lorſque le produit des deux premieres eſt égal au produit des deux dernieres, puiſque ſi nous avons *a*, *c* :: *d*, *b*, on aura auſſi $ab = cd$, en faiſant le produit des extrêmes & des moyens.

On dit auſſi qu'une ligne eſt coupée en deux parties *réciproques* aux parties d'une autre ligne, lorſque le produit des parties de la premiere ligne eſt égal au produit des parties de l'autre, ou, ce qui revient au même, lorſque l'une des parties de la premiere ligne eſt à l'une des parties de la ſeconde ligne réciproquement, comme l'autre partie de la ſeconde ligne eſt à l'autre partie de la premiere.

184. Proposition XLV. *Si deux rectangles* ABCD, abcd (Fig. 111.) *ſont égaux ſans avoir ni les baſes* AB, ab *égales ni les hauteurs* AD, ad, *les hauteurs* AD, ad *ſont réciproques aux baſes* AB, ab.

Le rectangle ABCD, eſt égal au produit AD × AB de ſa baſe par ſa hauteur, & le rectangle *abcd* eſt égal au produit $ad \times ab$, donc à cauſe de l'égalité des rectangles, nous avons AD × AB $= ad \times ab$; & tirant de là une proportion comme il a été dit dans le premier Livre au ſujet des proportions Géométriques, nous aurons AD, *ad* :: *ab*, AD, c'eſt-à-dire, les hauteurs AD, *ad* ſont réciproques aux baſes *ad*, *ab*.

185. Corollaire. *On peut dire auſſi que dans deux rectangles égaux, la hauteur* AD *& la baſe* AB *du premier ſont réciproques à la hauteur* ad, *& à la baſe* ab *du ſecond, puiſqu'on a* AD × AB = ad × ab, *comme il eſt requis* (N. 183.).

186. PROPOSITION XLVI. *Le plus grand rectangle qu'on puiſſe faire de deux parties qui compoſent une ligne, eſt celui que l'on fait lorſque ces deux parties ſont égales entr'elles.*

Soit la ligne CD (*Fig.* 112.) diviſée en deux également en O; le rectangle de la partie DO par la partie OC eſt égal au quarré de la moitié DO; or, ſi l'on coupe la même ligne en deux inégalement en E; le rectangle des parties inégales DE, EC eſt égal au quarré de la moitié DO, moins le quarré de la partie interceptée EO; (*N.* 146.) donc le rectangle des deux parties DE, EC, inégales, eſt moindre que le rectangle des parties DO, OC; & comme cela arrivera toujours en quelque point qu'on veuille couper la droite DC en deux parties inégales, il s'enſuit que le rectangle des parties égales DO,OC eſt le plus grand qu'on puiſſe faire de deux parties qui compoſent DC.

187. PROBLEME. *Couper une droite* AB (Fig. 112.) *en deux parties réciproques aux deux parties* DE, EC *qui compoſent une autre ligne* DC.

Je prens une moyenne proportionnelle entre les deux parties DE, EC de la droite DC; j'éleve ſur l'extrêmité B de la droite BA une perpendiculaire BH que je fais égale à la moyenne proportionnelle, du point H pris pour centre, & avec un rayon égal à la moité ZB de la ligne BA; je décris un arc, & il peut arriver, ou que cet arc coupe la droite BA en un point S, ou qu'il la touche en B ſans la couper, ou qu'il ne la touche ni ne la coupe; ſi l'arc coupe la droite AB en S, je porte la partie BS ſur ZB de Z en X, & les parties BX, XA de la droite BA ſont les réciproques demandées. Si l'arc touche ſimplement la droite BA, les deux réciproques demandées ſeront les deux moités ZB, ZA de la droite BA, & ſi l'arc ne touche ni ne coupe la droite BA; le Problême eſt impoſſible. Prouvons tous ces cas.

En premier lieu, ſi l'arc coupe BA en S, je mene le rayon HS, qui par la conſtruction eſt égal à BZ; le triangle HBS étant rectangle, nous avons $\overline{HB}^2 + \overline{BS}^2 = \overline{SH}^2$; (*N.* 171.) donc en retranchant $\overline{BS}^2$ de part, nous aurons $\overline{HB}^2 = \overline{SH}^2 - \overline{BS}^2$; or SH = BZ, & BS = ZX; donc $\overline{SH}^2 = \overline{BZ}^2$, & $\overline{BS}^2 = \overline{ZX}^2$, & partant $HB^2 = \overline{SH}^2 - \overline{BS}^2 = \overline{BZ}^2 - \overline{ZX}^2$; mais la ligne AB étant diviſée en deux également en Z & en deux également en X, nous

avons $BX \times XA = \overline{BZ}^2 - \overline{ZX}^2$; (*N.* 146) donc $BX \times XA = \overline{HB}^2$; or, HB étant moyenne proportionnelle entre les parties DE, EC de la droite DC, ſon quarré $\overline{BH}^2$ eſt égal au produit $DE \times EC$ des extrêmes; donc $BX \times XA = DE \times EC$, & par conſéquent les parties BX, XA de la droite BA, ſont réciproques aux parties DE, EC de la droite DC (*N.* 183.).

En ſecond lieu, ſi l'arc touche la ligne BA, il faut qu'il la touche en B; c'eſt-à-dire que ſon rayon HS ſoit égal à la perpendiculaire HB; car s'il étoit plus grand; il eſt clair que lorſque ce rayon en tournant au tour de H ſeroit parvenu à la poſition HS, ſon extrémité S tomberoit au-delà de B : par exemple, en S, & que par conſéquent l'arc couperoit la ligne AB au lieu de la toucher; donc, puiſque dans ce ſecond cas, le rayon eſt égal à la perpendiculaire, le quarré du rayon eſt auſſi égal à la perpendiculaire BH; or, le rayon eſt égal à BZ & le quarré de BZ eſt égal au rectangle $BZ \times ZA$; donc $BZ \times ZA = \overline{HB}^2 = DE \times EC$, & par conſéquent les deux moitiés de la ligne AB ſont réciproques aux parties DE, EC de la ligne DC.

Enfin ſi l'arc ne coupe ni ne touche BA, ſon rayon eſt par conſéquent plus petit que HB, & ſon quarré $\overline{BZ}^2$ ou le rectangle $BZ \times ZA$ eſt plus petit que le quarré HB ou que le rectangle $DE \times EC$; mais le rectangle $BZ \times ZA$ eſt le plus grand de tous les rectangles qu'on peut faire en coupant BA en deux parties, & faiſant leur rectangle; (*N.* 186.) donc on ne peut pas couper BA en deux parties dont le produit ſoit égal au produit $DE \times EC$; & le Problême eſt impoſſible.

188. COROLLAIRE. *Si une ligne* BA (Fig. 113.) *eſt coupée en deux parties* BX, XA *réciproques aux deux parties* DE, EC, *on ne peut pas la couper en un autre point du même côté par rapport au milieu* Z *en deux autres parties réciproques à* DE, EC. Le point auquel on voudroit couper cette ligne, ſeroit, ou entre B & X, comme le point M, ou entre X & le centre Z, comme le point *m*; dans le premier cas nous aurons $BM \times MA = \overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2$ à cauſe de AB coupée en deux également en Z, & en deux inégalement en M; donc, ſi l'on ſuppoſe que les parties BM, MA ſoient réciproques aux deux DE, EC, nous aurons $BM \times MA$ ou $\overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2 = DE \times EC$; or, on ſuppoſe auſſi $BX \times XA$

$=DB$ par la conſtruction; donc $DR \times DB = \overline{RB}^2$, & par conſéquent DR. RB :: RB. DB.

191. COROLLAIRE Ier. *Une ligne* DB *ou* AB *étant diviſée en moyenne & extrême raiſon, ſi on lui ajoûte la médiane* RB *ou* BH, *on aura une ligne entiere* AH *qui ſera encore diviſée en moyenne & extrême raiſon, & dont la mediane ſera la ligne* AB.

Par la Propoſition précédente le quarré ABCDE eſt égal au rectangle AHMN; c'eſt-à-dire $\overline{AB}^2 = AH \times BH$: donc, HB. AB :: AB. AH.

192. COROLLAIRE II. *Une ligne* AH *étant diviſée en moyenne & extrême raiſon; ſi on porte la petite partie* BH *ſur ſa médiane* AB *ou* BD *de* B *en* R, *cette médiane ſera diviſée en* R *en moyenne & extrême raiſon;* ce qui a été démontré ci-deſſus (*N.* 190.).

193. COROLLAIRE III. *Une ligne* AH *étant diviſée en moyenne & extrême raiſon; ſi à ſa petite partie* BH *on ajoûte la moité* CB *de la médiane, le quarré de la ſomme* CH *eſt égale à cinq quarrés de la moitié* CB; par la conſtruction que nous avons faite, (*N.* 190.) la droite CD eſt égale à CH, & par conſéquent $\overline{CD}^2 = \overline{CH}^2$; or, à cauſe du triangle rectangle CBD, nous avons $\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2$, & parce que DB eſt double de CB, nous avons $\overline{DB}^2 = 4\overline{CB}^2$; (*N.* 143.) donc $\overline{CD}^2 = 4\overline{CB}^2 + \overline{CB}^2 = 5\overline{CB}^2$, & par conſéquent $\overline{CH}^2 = 5\overline{CB}^2$.

194. COROLLAIRE IV. *Si une ligne* AH *eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon; la petite ligne, la médiane & la ligne entiere ſont incommenſurables entr'elles.*

Par le Corollaire précédent $\overline{CH}^2 = 5\overline{CB}^2$; donc $\overline{CH}^2 . \overline{CB}^2$ :: 5. 1, & tirant la racine quarrée de tous les termes CH. CB :: $\sqrt{5}$. 1; donc en diviſant CH—CB. CB :: $\sqrt{5}-1$. 1, c'eſt-à-dire BH CB. :: $\sqrt{5}-1$. 1, & doublant les conſéquents BH. AB :: $\sqrt{5}-1$. 2; mais le terme $\sqrt{5}-1$ eſt incommenſurable au terme 2, puiſqu'on ne peut pas exprimer leur rapport; donc le rapport de la petite ligne BH à la médiane AB eſt inexprimable, & ces deux lignes ſont incommenſurables.

Puiſque BH. AB :: $\sqrt{5}-1$. 2; donc, en compoſant, nous aurons BH + AB. AB :: $\sqrt{5}-1+2$. 2 ou AH. AB :: $\sqrt{5}+1$. 2; mais les deux derniers termes ſont incommenſurables; donc

les deux premiers AH, AB, c'eſt-à-dire la ligne entiere & la médiane ſont incommenſurables.

De même, puiſque BH. AB :: $\sqrt{5}-1.2$; donc en compoſant d'une autre façon, nous aurons BH. BH + AB :: $\sqrt{5}-1.\sqrt{5}-1+2$. ou BH. AH :: $\sqrt{5}-1.\sqrt{5}+1$; mais les deux derniers termes ſont incommenſurables; donc la petite BH & la ligne AH le ſont auſſi.

195. COROLLAIRE V. *Si deux lignes* AH, BD (Fig. 114.) *ſont diviſées chacune en moyenne & extrême raiſon, leur parties ſont proportionelles.*

Nous avons vû par le Corollaire précédent que la petite partie BH eſt à la médiane AB comme $\sqrt{5}-1$ eſt à 2, & cela eſt à l'égard de toutes les lignes diviſées en moyenne & extrême raiſon; donc dans la ligne BD, nous aurons auſſi DR. RB :: $\sqrt{5}-1.2$, par conſéquent BH. AB :: DR. RB.

196. PROBLEME. *Deux lignes droites égales* AB, BC (Fig. 115.) *étant données, trouver la baſe qu'il faut leur donner pour conſtruire un triangle iſoſcele* ABC, *dont chaque augle de la baſe ſoit double de l'angle* B *du ſommet.*

Je coupe l'une des droites données AB en moyenne & extrême raiſon, & prenant une droite AC égale à ſa médiane BR, je décris avec AC & les deux droites menées AB, BC un triangle ABC qui eſt le triangle demande.

Pour le prouver, je mene la droite RC, & à cauſe que AB eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, j'ai AR. RB :: RB. AB; (*N.* 189.) mais RB = AC: donc AR. AC :: AC. AB, ainſi les deux côtés AR. AC du triangle ACR, ſont proportionnels aux deux côtés AC, AB du triangle ABC & comme l'angle compris A eſt le même dans l'un & dans l'autre; les deux triangles ACR, ABC ſont ſemblables, (*N.* 161.) & par conſéquent le triangle ACR eſt iſoſcele, de même que le triangle ABC; ce qui rend auſſi iſoſcele le triangle RCB, puiſque AC = CR = RB: or, l'angle ARC externe au triangle RCB, vaut les deux internes oppoſés B, BCR (*N.* 97.) ou le double de l'angle B, à cauſe que les deux angles B & BCR du triangle iſoſcele RCB ſont égaux, & l'angle ARC eſt égal à l'angle RAC, puiſque le triangle ACR eſt iſoſcele; donc, dans le triangle iſoſcele ABC, l'angle A ſur la baſe eſt double de l'angle B au ſommet.

197. PROBLEME. *Une ligne* AC (Fig. 116.) *étant donnée, conſ-*

truire ſur cette ligne un triangle iſoſcele, dont chaque angle ſur la baſe ſoit double de l'angle au ſommet.

Je diviſe la droite AC en moyenne & extrême raiſon en S; j'ajoûte la médiane AS à la ligne AC de A en N, & avec la droite AC & deux autres droites AB, BC égale chacune à la droite CN, je conſtruit un triangle iſoſcele qui eſt le triangle demandé.

Car, puiſque la droite AN eſt égale à la médiane de AC diviſée en moyenne & extrême raiſon, la droite CN eſt auſſi diviſée en moyenne & extrême raiſon en A, (*N.* 191.) & ſa médiane eſt AC : or, AB = CN par la conſtruction ; donc ſi nous coupons AB en moyenne & extrême raiſon en R, ſa médiane BR ſera égale à la médiane AC ; ainſi nous avons un triangle iſoſcele ABC dont la baſe AC eſt la médiane de l'un de ſes côtés, & par conſéquent nous démontrerons comme dans le Problême précédent, que chaque angle ſur la baſe eſt double de l'angle du ſommet.

198. COROLLAIRE. *Dans tout triangle iſoſcele* ABC (Fig. 115. 116.) *dont chaque angle de la baſe eſt double de celui du ſommet, ſi l'on coupe l'un des angles de la baſe en deux également, par une droite* CR *qui coupe le côté oppoſé en* R ; *ce côté ſera coupé en moyenne & extrême raiſon.* C'eſt une ſuite évidente de ce qui a été dit ci-deſſus (*N.* 196.).

199. COROLLAIRE II. *Dans tout triangle* ABC (Fig. 115. 116.) *dont chaque angle de la baſe eſt double de celui du ſommet ; l'angle du ſommet eſt de 36 degrés, & chaque angle ſur la baſe eſt de 72.* Je diviſe chaque angle de la baſe en deux également ; ainſi les trois angles du triangle valent enſemble cinq angles égaux à celui du ſommet : or, les trois angles du triangle valent enſemble deux droits ou 180 degrés ; (*N.* 97.) donc les cinq angles égaux valent auſſi 180 degrés, & par conſéquent chacun d'eux en vaut 36 qui eſt le cinquiéme de 180. L'angle du ſommet vaut donc 36, & chaque angle de la baſe vaut 72, puiſqu'il eſt double de l'angle du ſommet.

200. PROPOSITION XLVII. *Si pluſieurs paralelles* AB, CD, EH. &c. (Fig. 117.) *ſont coupées par pluſieurs lignes* AH, MN, RS, BE &c. *qui ſe coupent en un même point ; ces paralelles ſont coupées en même raiſon.*

Comparons d'abord les paralelles AB, CD qui ſont du même côté par rapport au point O; les triangles AOM, COT ſont

ſemblables, à cauſe de l'angle AOM commun, des angles OAM, OCT faits par les paralelles avec AO égaux entr'eux, & des angles OMA, OTC égaux pour la même raiſon; ainſi nous avons AM, CT :: OM. OT. or, les triangles MOR, TOV étant auſſi ſemblables, donnent MR. TV :: OM. OT; donc AM. CT :: MR. TV; mais les mêmes triangles MOR, TOV, donnent MR. TV :: OR. OV, & à cauſe des triangles ſemblables ROB, VOD nous avons RB, VD :: OR. OV. donc MR. TV :: RB. VD; ainſi la raiſon des parties AM, CT des paralelles AB, CD étant égale à la raiſon des parties MR, TV, & celle-ci étant égale à la raiſon des parties RB, VD; il s'enſuit que les paralelles AB, CD ſont coupées en même raiſon.

Maintenant, comparons les paralelles AB, EH qui ſont de différents côtés par rapport au point O; les triangles AOM, HON ſont ſemblables, à cauſe de l'angle AOM égale à l'angle HON qui lui eſt oppoſé au ſommet, de l'angle OAM égal à ſon alterne OHN, & de l'angle OMA égal à ſon alterne ONH; donc AM. NH :: MO. NO; or les triangles MOR, SON étant ſemblables par les mêmes raiſons, donnent MR. SN :: MO. NO; donc AM. NH :: MR. SN; mais les mêmes triangles MOR, SON donnent auſſi MR. SN :: RO. SO, & à cauſe des triangles ſemblables ROB, SOE, nous avons RB. SE :: RO. SO; donc MR. SN :: RB. SE; ainſi la raiſon des parties AM, HN des paralelles AB, EH étant égale à la raiſon des parties MR, SN, & celle-ci égale à celle des parties RB, SE; il eſt clair que les deux paralelles AB, EH ſont coupées en même raiſon: & ainſi des autres.

201. PROBLEME. *Couper une ligne droite donnée* AB (Fig. 118.) *en tant de parties égales que l'on voudra.*

Je prens une droite indéfinie NX, ſur laquelle je porte avec une ouverture de compas à diſcrétion, autant de parties égales qu'on en demande pour la ligne AB; par exemple quatre, NR, RS, ST, TX. Je fais ſur XN un triangle équilateral NVX; & du point V, je mene des droites aux points de diviſion R, S, T. Cela fait, je prens avec le compas la grandeur de la ligne AB, & je la porte ſur les deux côtés VX, VN prolongés, s'il le faut, de V en H, & de V en L; je joints les points H, L par la droite HL, & prolongeant, s'il eſt néceſſaire, les droites VR, VS, VT juſqu'à ce qu'elles coupent la droite HL, cette ligne HL eſt égale à la droite donnée, & elle eſt diviſée en nombre de parties requis.

Car à cauſe des baſes paralelles XN, HL, les triangles VXN, VHL ſont ſemblables ; or, le triangle VXN eſt équilateral ; donc le triangle VHL l'eſt auſſi, & par conſéquent HL = HV, mais VH eſt égal à AB par la conſtruction, donc HL eſt auſſi égal à AB. Or, par la Propoſition précédente, les droites XN, HL paralelles entre les lignes qui partent du même point V, ſont diviſées en même raiſon, & XN a été diviſée en quatre parties égales ; donc HL eſt auſſi diviſée en 4 parties égales.

Cette pratique eſt fort ingénieuſe, mais elle a l'inconvenient qu'après avoir diviſé HL en parties égales, il faut porter ces parties ſur la droite AB, ce qui eſt quelquefois embarraſſant, ſurtout lorſque les parties égales ſont fort petites. C'eſt pourquoi j'aimerois mieux me ſervir de la pratique ſuivante.

Soit donc la ligne AB (119.) qu'on propoſe de diviſer en quatre parties égales ; je fais en A un angle à volonté BAX, & du point B, je mene une paralelle au côté AX ; je prens une ouverture de compas à diſcrétion, & je la porte quatre fois ſur le côté indéfini AX, de A en M, de M en N, &c. Je porte la même ouverture auſſi quatre fois ſur la paralelle indéfinie BZ, de B en S, de S en T, &c. Je joints les points de diviſion des lignes AC, BD par des droites CB, RS, NT, MV, AD, & ces lignes coupent la droite AS en quatre parties égales.

Car AB étant inclinée entre les paralelles AC, BD, les angles alternes BAC, ABD ſont égaux ; or, les côtés AC, AB du triangle CAB, ſont égaux chacun à chacun aux côtés BD, BA du triangle ABD, donc à cauſe des angles compris égaux, ces deux triangles ſont parfaitement égaux (*N.* 100.), & l'angle ABC eſt égal à l'angle BAD ; mais ces angles ſont alternes entre les droites BC, AD, donc ces droites ſont paralelles entr'elles (*N.* 73.). Or, les droites AC, BD inclinées dans l'eſpace paralelle BCAD ſont coupées proportionnellement ; donc les lignes RS, NT, MV qui les coupent ſont paralelles aux paralelles BC, AD (*N.* 157.), & par conſéquent les mêmes lignes RS, NT, &c. coupent en même raiſon l'inclinée AB (*N.* 153.), c'eſt-à-dire, en quatre parties égales.

202. *Definition.* Si une ligne droite AB (*Fig.* 120.) eſt coupée en trois parties AC, CD, DB, de ſorte que la premiere AC ſoit à la ſeconde CD, comme toute la ligne AB eſt à la troiſiéme DB, cette ligne eſt dite être coupée *Harmoniquement, ou en trois parties Harmoniquement.*

Et il faut obſervet que quand une ligne eſt ainſi coupée, on a auſſi la troiſiéme partie DB, eſt à la ſeconde CD, comme la ligne entiere eſt à la premiere AC. Car par la définition nous avons AC, CD :: AB, DB; donc en faiſant le produit des extrêmes & des moyens, nous aurons AC×DB = CD×AB, d'où l'on tire cette proportion DB, CD :: AB, AC; ainſi l'on peut dire que *quand une ligne eſt diviſée harmoniquement en trois parties, chaque extrême, eſt à la partie du milieu comme la ligne entiere eſt à l'autre extrême.*

203. COROLLAIRE. *Quand une ligne* AB (Fig. 120.) *eſt diviſée harmoniquement, la partie du milieu* CD *eſt toujours moindre que chacune des extrêmes* AC, DB. Car puiſque AC, CD :: AB, DB, & que AB eſt plus grand que DB; AC doit être auſſi plus grand que CD. De même, puiſque nous avons DB, CD :: AB, AC, & que AB eſt plus grand que AC, DB doit être auſſi plus grand que CD.

204. PROBLEME. *Diviſer une ligne droite* AB (Fig. 120.) *en trois parties harmoniquement.*

Je prens hors de la ligne AB & de ſes prolongemens, un point quelconque R, d'où je mene aux extrêmités A, B les droites RA, RB. Je coupe l'une ou l'autre de ces droites en un point quelconque P, & de ce point, je mene ſur AB la droite PD paralelle à l'autre ligne RA. Je prolonge PD en-delà de D, faiſant DS = PD; du point S, je mene au point R la droite SR qui coupe la droite AB en C, & la ligne AB eſt coupée harmoniquement aux points C, D. Ce que je prouve ainſi.

A cauſe des paralelles AR, SP qui font les angles alternes égaux, & de l'angle ACR égal à l'angle SCD qui lui eſt oppoſé au ſommet, les triangles ACR, SCD ſont ſemblables; donc AC, CD :: AR, SD; or, les triangles ARB, DPB étant ſemblables à cauſe des baſes AR, DP paralelles, donnent AB, DB :: AR, DP ou AB, DB :: AR, SD, puiſque DP = SD par la conſtruction; donc AC, CD :: AB, DB, & partant la ligne AB eſt diviſée harmoniquement.

205. COROLLAIRE Ier. *Quand on propoſe de diviſer une ligne harmoniquement ſans déterminer aucune de ſes parties, le Problême eſt indéterminé & ſuſceptible d'une infinité de ſolutions.* Par le Problême précédent, le point R peut être pris où l'on voudra, le point P peut être pris à diſcrétion ſur l'une ou l'autre des lignes RA, RB; or, tout cela peut varier d'une infinité de façons, & donner ſur

la ligne AB une infinité de points C, D. Donc, &c.

206. COROLLAIRE II. *Mais ſi la ligne* AB *eſt déterminée & quelqu'une de ſes parties, ou ſi deux de ſes parties ſont connuës, & que la ligne entiere ſoit inconnuë, tout eſt déterminé, & le problême ne peut avoir qu'une ſolution.*

En premier lieu, ſi la ligne AB eſt connuë & l'une ou l'autre de ſes extrêmes auſſi; par exemple, la partie AC, & qu'il s'agiſſe de trouver le point D auquel le reſte CB de la ligne doit être coupée; nous ſavons qu'il faut avoir AC, CD :: AB, DB, ou en alternant AC, AB :: CD, DB; c'eſt pourquoi il n'eſt queſtion que de couper CB en deux parties CD, DB proportionnelles à la partie AC, & à la ligne entiere AB. Or, AB ne peut pas être coupée du même côté en deux autres parties proportionnelles à AC, AB (*N.* 178.); donc le problême ne peut avoir qu'une ſolution.

En ſecond lieu, ſi la ligne AB eſt connue, & qu'on diſe que la partie du milieu eſt égale à une ligne donnée. Nous ſavons que nous devons avoir AC, CD :: AB, DB, ce qui donne AC×DB = CD×AB; ainſi les deux extrêmes que nous ne connoiſſons pas en particulier, doivent être réciproques à la ligne entiere AB, & à ſa partie CD (*N.* 183.) dont nous connoiſſons la valeur; c'eſt pourquoi retranchant de la ligne AB la valeur de ſa partie, le reſte ſera la ſomme des deux extrêmes AC, DB, & ajoutant à la ligne AB une droite AM égale à la valeur de la partie du milieu, la ſomme ſera celle de la ligne entiere & de ſa partie CD. Diviſant donc la ſomme des extrêmes AC + DB en deux parties réciproques aux deux parties de la ſomme MB, ces deux parties ſeront les valeurs des extrêmes, & comme la ligne égale à la ſomme AC + DB, ne peut être coupée de deux façons différentes en deux telles parties réciproques, enſorte que les parties d'une ſeconde diviſion qu'on voudroit faire, fuſſent différentes des deux parties de la premiere diviſion (*N.* 188.). Il s'enſuit que le Problême n'a qu'une ſolution.

En troiſiéme lieu, ſi les deux parties de ſuite MC, CD, ſont connuës, & qu'on demande de trouver toute la ligne; nous ſavons que nous devons avoir AC, CD :: AB, DB; donc en diviſant, nous aurons AC — CD, CD :: AB — DB, DB, c'eſt-à-dire, AC — CD, CD :: AD, DB, & par conſéquent il ne ſera queſtion que de chercher une quatriéme proportionnelle à la différence AC — CD des lignes connuës AC, CD, à la ligne CD,

& à la ſomme AD des deux lignes ; & comme on ne peut pas prendre deux quatriémes proportionnelles différentes à trois grandeurs déterminées, le Problême eſt déterminé.

Enfin, ſi les deux extrêmes AC, BD (*Fig.* 121.) ſont données ; & qu'on demande la partie du milieu, nous ſavons par le cas précédent que les deux extrêmes doivent être réciproques à la partie du milieu, & à la ligne entiere, c'eſt-à-dire que le produit AC×BD, doit être égal au produit de la partie du milieu par la ligne entiere (*N.* 183.). Ainſi je mene une ligne MR égale à la ſomme des extrêmes, faiſant MN = AC, & NR = BD, & diviſant MR en deux également en O, j'ai $MN \times NR = \overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$ (*N.* 146.). Il ne s'agit donc plus que d'ajouter à la ligne MR une ligne MV, telle que le rectangle de l'ajoutée MV par la ligne entiere VR, ſoit égal au rectangle MN×NR, & de faire voir enſuite que cette ajoutée eſt la partie du milieu, & qu'il ne peut y en avoir d'autre. Or, nous ſavons que nous devons avoir $VM \times VR = \overline{VO}^2 - \overline{MO}^2$ (*N.* 148.) ; donc il faut que nous ayons auſſi $\overline{VO}^2 - \overline{MO}^2 = MN \times NR$, & partant $\overline{VO}^2 - \overline{MO}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$, & ajoutant $\overline{MO}^2$ de part & d'autre, nous aurons $\overline{VO}^2 = 2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$; pour trouver donc ce quarré $\overline{VO}^2$, & par conſéquent ſa racine VO. J'éleve ſur le milieu O de la ligne MR une perpendiculaire OX, que je fais égale à MO ou OR, & je mene la droite RX, ce qui donne un triangle rectangle iſoſcele, dans lequel j'ai $\overline{RX}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OX}^2$ (*N.* 171.), & à cauſe de OR = OX = MO, j'ai $\overline{RX}^2 = 2\overline{MO}^2$ Du point N pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à RX, je décris un arc qui coupe en Z la perpendiculaire OX prolongée, & menant la droite NZ, laquelle eſt égale par conſéquent à RX, j'ai un autre triangle rectangle NZO, qui donne $\overline{ZN}^2$ ou $\overline{RX}^2 = \overline{ZO}^2 + \overline{NO}^2$ (*N.* 171.) ; mais $\overline{RX}^2 = 2\overline{MO}^2$, donc $2\overline{MO}^2 = \overline{ZO}^2 + \overline{NO}^2$, & retranchant $\overline{NO}^2$ de part & d'autre j'ai $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2 = \overline{ZO}^2$; mais $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2 = \overline{VO}^2$, comme on vient de voir ; donc $\overline{VO}^2 = \overline{ZO}^2$, & VO = ZO ; ainſi prolongeant OM au-delà de M, & portant ZO de O en V, nous aurons la droite VO, de laquelle retranchant MO, le

le reſte ſera la petite partie cherchée, faiſant donc une ligne égale aux trois VM, AC, BD, & dont VM, ſoit la partie du milieu, cette ligne ſera la ligne diviſée harmoniquement, & qui aura pour extrêmes les deux données AC, BD, & le Problême n'a qu'une ſolution; car ſi VM devenoit plus grand ou plus petite, le rectangle de VM, par toute la ligne, ſeroit plus grand ou plus petit que le rectangle AC×BD ou $2\overline{MO} - \overline{NO}^2$.

207. COROLLAIRE III. Il ſuit du Corollaire précédent que *ſi deux lignes égales diviſées harmoniquement ont une des extrêmes égale à une des extrêmes ou la partie du milieu égale à la partie du milieu, les deux autres parties ſont égales chacune à chacune aux deux autres parties, & que ſi les deux extrêmes d'une ligne ſont égales aux deux extrêmes d'un autre, ou une extrême & la partie du milieu égale à une extrême, & la partie du milieu les deux lignes ſont égales;* car autrement le Problême ne ſeroit pas déterminé dans tous les cas dont nous avons parlé (*N.* 206.), ce qui n'eſt pas poſſible.

208. COROLLAIRE IV. *Si d'un point* R (Fig. 122.) *pris hors d'une ligne* AB *diviſée harmoniquement aux points* C, D, *on mene quatre lignes indefinies qui paſſent par les points* A, C, D, B *de la ligne* AB, *toute ligne* PS, HZ, *&c. qui coupera trois de ces lignes, & qui ſera paralelle à la quatriéme, ſera coupée en deux également entre les lignes qu'elle coupera.*

Du point D, je mene PS paralelle à AR, & qui coupe les trois lignes RZ, RT, RV, les triangles ARC, DSC ſont ſemblables, à cauſe des angles alternes que font les paralelles AR, PS, & de l'angle ACR égal à l'angle SCD qui lui eſt oppoſé au ſommet; donc AR, SD :: AC, CD; or, les triangles ARB, DPB étant ſemblables à cauſe des baſes paralelles AR, DP, donnent AR, DP :: AB, DB, & par la ſuppoſition nous avons AC, CD :: AB, DB, donc les raiſons AR, SD & AR, DP qui ſont égales aux deux précédentes, ſont égales entr'elles, & nous avons AR, SD :: AR, DP, c'eſt-à-dire SD = DP, à cauſe des antécédens égaux AR, AR. Ainſi SP eſt diviſée en deux également entre les trois lignes RZ, RT, RV; mais toutes les lignes HZ, &c. menées entre ces trois lignes paralellement à RA ou à PS, ſont coupées en même raiſon que PS (*N.* 200.); donc elles ſont coupées en deux également.

Et on prouveroit aiſément la même choſe ſi la ligne PS (*Fig.* 123.) avoit été menée du point C entre les trois RX, RZ, RT, para-

lellement à RV; car à cauſe des triangles ſemblables CSD, RDB, on auroit RB, CS :: DB, DC, & les triangles ſemblables ARB, APC donneroient RB, PC :: AB, AC; mais à cauſe que la ligne AB eſt diviſée harmoniquement, on auroit AB, AC :: DB, DC; donc on auroit auſſi RB, PC :: RB, CS, & partant PC = CS. Mais toutes lignes HT, &c. paralelles à AV ou à PS ſont coupées en même raiſon par les lignes RX, RZ, RT; donc elles ſont auſſi coupées en deux également.

209. COROLLAIRE V. *Si quatre lignes qui partent d'un même point* R (Fig. 122. 123.) *ſont diſpoſées de façon que toute ligne qui en coupe trois, & qui eſt paralelle à la quatriéme, ſoit coupée en deux également entre les trois lignes qui les coupe, je dis que toute ligne qui coupera les quatre lignes à la fois dans quelque poſition que ce ſoit ſera coupée harmoniquement entre les quatre lignes.*

D'un point quelconque A de la ligne RX (*Fig.* 122.); je mene une droite AB entre les quatre lignes RX, RZ, RT, RV, & comme on ſuppoſe que toute ligne HZ paralelle à RX, & compriſe entre les trois autres, eſt diviſée en deux également; je mene du point D la droite PS paralelle à RX, & par conſéquent j'ai SD = DP; or, les triangles ſemblables ARC, SCD donnent AR SD :: AC, CD, & à cauſe des triangles ſemblables ARB, DPB, AR, PD ou SD :: AB, DB; donc AC, CD :: AB, BD, c'eſt-à-dire AB eſt diviſée harmoniquement.

Et ce ſeroit la même choſe ſi on diſoit que toute ligne PS (*Fig.* 123.) paralelle à RV & compriſe entre les trois autres, étoit coupée en deux également.

210. COROLLAIRE VI. *Si quatre lignes* RX, RZ, RT, RV, (Fig. 124.) *qui partent d'un même point* R, *ſont tellement diſpoſées que toute ligne* PT *compriſe entre trois, & paralelle à la quatriéme, ſoit diviſée en deux également, ou, ce qui revient au même, que toute ligne* AB *compriſe entre les quatre, ſoit coupée harmoniquement: Je dis que ces quatre lignes étant prolongées au-delà de* R, *ce qui donnera huit lignes* RX, RZ, RT, RV, RI, RL, RS, RQ, *il arrivera toujours que toute ligne qui coupera quatre de ces huit lignes ſera diviſée harmoniquement, & que toute ligne compriſe entre trois de ces lignes & paralelle à une quatriéme, ſera diviſée en deux également.*

En premier lieu, il eſt clair que ſi je mene entre les quatre prolongemens des quatre lignes, la droite MF paralelle à AB, elle ſera diviſée en même raiſon que AB (*N.* 200.), & par conſéquent harmoniquement, & comme delà il ſuit que toute ligne

paralelle à l'un de ces prolongemens, & compris entre les trois autres, ſera diviſée en deux également (*N.* 208.); il s'enſuit auſſi que toute ligne qui ſera compriſe entre les quatre dans quelque poſition que ce ſoit ſera coupée harmoniquement (*N.* 209.).

En ſecond lieu, puiſque les quatre RX, RZ, RT, RV coupent AB harmoniquement par la ſuppoſition, & qu'ainſi toute ligne compriſe entre les trois RZ, RT, RV & paralelle à RA ou RQ, eſt coupée en deux également, il s'enſuit que les quatre RZ, RT, RV, RQ, ſont diſpoſées de la façon qu'il faut, pour que toute ligne qui ſera compriſe entre les quatre ſoit coupée harmoniquement (*N.* 209.), & partant toute ligne compriſe entre les trois RT, RV, RQ, & paralelle à la quatriéme RZ ou RS ſera coupée en deux également (*N.* 208.), & on prouvera les mêmes choſes, & de la même façon à l'égard des quatre lignes RT, RZ, RX, RI.

En troiſiéme lieu, puiſque toute ligne qui coupe les trois RT, RV, RQ, & qui eſt paralelle à la quatriéme RZ ou RS, eſt coupée en deux également, toute ligne qui coupe les quatre RT, RV, RQ, RS eſt coupée harmoniquement (*N.* 209.), & par conſéquent toute ligne qui coupera les trois RV, RQ, RS, & qui ſera paralelle à la quatriéme RT, ſera coupée en deux également, & les mêmes choſes ſe prouveront à l'égard des quatre lignes RZ, RX, RI, RL.

Enfin, puiſque toute ligne compriſe entre les trois RV, RQ, RS, & paralelles à la quatriéme RT ou RL, eſt coupée en deux également; toute ligne menée entre les quatre RV, RQ, RS, RL doit être coupée harmoniquement (*N.* 209.); d'où il ſuit que toute ligne compriſe entre les trois RQ, RS, RL, & paralelles à la quatriéme RV, eſt coupée en deux également (*N.* 208.), & la même choſe ſe prouvera à l'egard des quatre RX, RI, RL, RS. Donc, &c.

211. PROPOSITION XLVIII. *Si deux lignes droites diviſées harmoniquement, ont un point commun, c'eſt-à-dire, ou l'un des deux extrêmes, ou l'un des deux moyens, les lignes qui joindront les autres points de diviſion, ou ſeront paralelles entr'elles, ou iront aboutir à un même point.*

Soient les deux droites AB, AR (*Fig.* 125. 127.) diviſées l'une & l'autre harmoniquement, & qui ont le point extrême A commun; je joints les points du milieu par les droites CE, DH, & ces lignes ſeront ou paralelles entr'elles ou non paralelles; ſi elles

ſont paralelles (*Fig.* 125.); je joints les autres points B, R par la droite BR, & je dis que cette droite eſt paralelle aux deux autres; car ſi on veut qu'elle ne le ſoit pas, je mene par le point B une droite paralelle aux autres CD, DH, & cette droite coupera la droite AR prolongée, s'il le faut, en un point S different de R. Or, le triangle ASB étant coupé par les droites CE, DH paralelle au côté BS, ſes autres côtés AB, AS ſeront coupés en même raiſon (*N.* 158.), & par conſéquent le côté AS ſera diviſé harmoniquement à cauſe du côté AB diviſé harmoniquement; ainſi nous aurons deux lignes droites inégales AR, AS diviſées harmoniquement, & qui auront cependant deux parties communes AE, EH, ce qui eſt impoſſible (*N.* 207.). Donc, &c.

Si les droites CE, DH (*Fig.* 127.) ne ſont pas paralelles, ces droites prolongées ſe couperont en quelque point O, & je dis que la droite BR prolongée paſſera par ce point; car ſi on veut que cela ne ſoit pas, je mene du point O la droite OA, & une autre droite au point B, laquelle par conſéquent coupera AR, prolongée, s'il le faut, en un autre point S; ainſi à cauſe que AS ſera compriſe entre quatre lignes droites OA, OC, OD, OSB, qui coupent AB harmoniquement, AS ſera auſſi coupée harmoniquement que ces quatre lignes (*N.* 208.), & par conſéquent, nous aurons deux lignes droites différentes AS, AR coupées harmoniquement, & qui auront cependant deux parties communes AE, EH, ce qui eſt impoſſible (*N.* 207.); donc il eſt impoſſible que la ligne BR prolongée, ne paſſe pas par le point O, ou les autres lignes CE, DH prolongées, vont ſe couper.

Et on démontrera de la même façon, que ſi deux lignes droites AB, ER, (*Fig.* 126. 128.) coupées harmoniquement, ſe coupent en un des points moyens C, les droites menées par leurs points de diviſion ou ſeront paralelles entr'elles (*Fig.* 126.), ou ſe couperont toutes en un même point O (*Fig.* 128.).

212. *Remarque.* Les proprietés de la ligne diviſée harmoniquement, ſont d'une grande utilité pour l'intelligence des Sections Coniques, & pour abréger beaucoup le travail dans l'étude de ces Courbes, comme on verra dans la ſuite.

213. Proposition XLIX. *Si pluſieurs lignes droites ſont en proportion Géométrique continuë, leurs différences, ſont en même raiſon que ces lignes.*

Soient les trois lignes AB, AC, AD (*Fig.* 129.) en proportion continuë Géométrique, leurs différences ſeront BC, CD,

& il s'agit de faire voir que BC, CD :: AB, AC, & pour cela, comme le quarré de la moyenne AD eſt égal au produit ou rectangle des deux extrêmes AB, AC, ſi je fais le quarré AHMC de la moyenne AC, & le rectangle ARSB des extrêmes AB, AD, le quarré AHMC ſera égal au rectangle ARSB, & retranchant de part & d'autre le rectangle commun AHPB, les rectangles reſtans BCMP, PHRS ſeront encore égaux, & partant leurs côtés ſeront réciproques (*N.* 184.), & nous aurons PM, PS :: PH, PB; or, à cauſe des paralelles AH, BP, CM, & des paralelles AB, HP, nous avons PM = BC, & HP = AB, & à cauſe de AR ou BS = AD, & de AH ou BP = AC, nous avons PS = CD; mettant donc ces valeurs de PM, PS, PH & PB, dans la proportion PM, PS, PH, PB, nous aurons BC, CD :: AB, AC, ce qu'il falloit démontrer.

S'il y avoit plus de trois lignes, on démontreroit encore la même choſe, car ſuppoſant que quatre lignes *a*, *b*, *c*, *d* fuſſent en proportion continue, les différences des trois premieres ſeroient entr'elles comme *a* eſt à *b*; or les trois dernieres *b*, *c*, *d*, étant auſſi en progreſſion, leurs différences ſeroient comme *b* eſt à *c*, & par conſéquent elles ſeroient auſſi comme *a* eſt à *b*, & ainſi des autres.

214. PROBLEME. *Trouver tant de moyennes proportionnelles Géométriques que l'on voudra entre deux lignes données.*

On n'eſt pas encore parvenu à reſoudre ce Problême dans tous les cas qu'il renferme en n'employant que la Géométrie ordinaire, c'eſt-à-dire, la régle & le compas; à la vérité la Géotrie compoſée en eſt venuë à bout; mais il eſt ſi difficile de bien exécuter ce qu'elle nous enſeigne là-deſſus, qu'on peut dire que cette découverte eſt une belle ſpéculation, dont il ne faut rien attendre dans la pratique. Grand nombre d'Auteurs ſe bornent au cas de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, qui eſt la plus néceſſaire dans la Géométrie, & nous ont donné différens uſages qui ont tous le défaut d'être extrêmement tatonneux & peu ſûrs; ainſi je crois que le meilleur eſt de ſe ſervir du Compas de Proportion, comme nous l'enſeignerons plus bas.

Quant aux autres cas de ce Problême, on les reſoudra toujours, lorſqu'il s'agira de chercher trois moyennes proportionnelles entre deux lignes données, ou 7, ou 15 ou 31, & ainſi de ſuite en doublant toujours & ajoutant l'unité. Car, par exemple,

pour trouver trois moyennes proportionnelles entre deux lignes a, b; je cherche d'abord une moyenne proportionnelle entre ces lignes, & je la nomme x; ainſi j'ai $a, x :: x, b$; après quoi je cherche une moyenne proportionnelle z entre a & x, & une autre y entre x & b; & j'ai $a, z :: z, x :: x, y :: y, b$; ce que je prouve ainſi : à cauſe de $a, z :: z, x$, le quarré de la premiere a eſt au quarré de la ſeconde z, comme la premiere a eſt à la troiſiéme x, c'eſt-à-dire $aa, zz :: a, x$; ainſi qu'il a été dit dans le premier Livre (*N.* 327.); de même à cauſe de $x, y :: y, b$, nous avons $xx, yy :: x, b$; mais nous avons fait, $a, x :: x, b$, donc $xx, yy :: a, x$; or, nous venons de trouver $aa, zz :: a, x$; donc $aa, zz :: xx, yy$, & tirant la racine quarrée de tous les termes, nous aurons $a, z :: x, y$, mais nous avons $a, z :: z, x$ & $x, y :: y, b$, donc ces quatre raiſons ſont égales, & nous avons $a, z :: z, x :: x, y :: y, b$.

De même ſi l'on demande ſept moyennes Géométriques entre deux lignes données a, b; je prens d'abord une moyenne Géométrique x, entre a & b, & enſuite trois moyennes entre a & x, & trois moyennes entre x & b, & ainſi des autres, ce qu'on démontrera de la même façon.

215. PROBLEME. *Trouver tant de moyennes proportionnelles Arithmétiques que l'on voudra entre deux lignes données* (Fig. 130.).

Autant il eſt impoſſible de reſoudre le Problême précédent dans tous ſes cas, autant eſt-il facile de reſoudre celui-ci. Soit, par exemple, les lignes AB, AC, entre leſquelles on demande de trouver trois moyennes Arithmétiques, je coupe la différence BC de ces deux lignes, en autant de parties égales plus une, qu'on demande des moyennes, c'eſt-à-dire en quatre BD, DE, EH, HC. Je donne à la ligne AB la partie BD, & la ligne AD eſt la premiere moyenne demandée; j'ajoute à AD la partie DE, & la droite AE eſt la ſeconde moyenne : enfin, j'ajoute à la droite AE la partie EH, & la droite AH eſt la troiſiéme moyenne; & les cinq lignes AB, AD, AE, AH, AC ſont en progreſſion Arithmétique, puiſqu'elles ſe ſurpaſſent toutes de la même façon, ou que leur différence eſt toujours la même.

216. PROPOSITION XLVIII. *Si trois lignes ſont en progreſſion Arithmétique aſcendante ou deſcendante, la premiere eſt plus petite par rapport à la ſeconde, que la ſeconde par rapport à la troiſiéme; & le produit des extrêmes eſt moindre que le quarré de la moyenne.*

Soient les trois lignes AB, AC, AD (*Fig.* 131.) en progreſ-

ſion Arithmétique aſcendante, & dont par conſéquent les différences BC, CD ſont égales ; je cherche entre les deux extrêmes AB, AD une moyenne Géométrique AX, & à cauſe que les trois lignes AB, AX, AD ſont en progreſſion Géométrique, leurs différences BX, XD ſont entr'elles comme les lignes AB, AX (*N.* 213.), & comme AB eſt plus petit que AX, la différence BX eſt plus petite que la différence XD ; ainſi BD étant coupée en X en deux parties inégales, dont la petite eſt BX, cette différence BX eſt moindre que la moitié BC de BD, laquelle moitié eſt la différence de la progreſſion Arithmétique, & partant la moyenne proportionnelle Géométrique AX eſt plus petite que la moyenne Arithmétique AC ; d'où il ſuit que AB eſt plus petite par rapport à AC, que par rapport à AX ; mais dans la progreſſion Géométrique, nous avons AB, AX :: AX, AD ; donc AB eſt auſſi plus petite par rapport à AC, que AX par rapport à AD ; mais AC eſt plus grande par rapport à AD, que AX par rapport à la même AD ; donc à plus forte raiſon AB eſt plus petite par rapport à AC, que AC, par rapport à AD.

Maintenant ſuppoſons que la progreſſion Arithmétique AD, AC, AB ſoit deſcendante ; je prens la moyenne Géométrique AX entre ces deux lignes, ce qui donne la progreſſion Géométrique AD, AX :: AX, AB, & les différences DX, XB étant entr'elles comme les lignes AD, AX (*N.* 213.), la différence DX ſera plus grande que la différence XB à cauſe de AD plus grand que AX ; ainſi DX ſera plus grande que la moitié DC de la ligne DB, laquelle moitié eſt la différence de la progreſſion Arithmétique ; donc la moyenne Géométrique AX ſera plus petite que la moyenne Arithmétique AC, & par conſéquent AD ſera moins grand par rapport à AC, que par rapport à AX, & comme AD, AX :: AX, AB, la ligne AD ſera auſſi moins grande par rapport à AC, que AX par rapport à AB ; or, AX eſt moins grand par rapport à AB, que AC par rapport à AB, donc à plus forte raiſon AD eſt moins grand par rapport à AC, que AC par rapport à AB. Ainſi dans l'un & l'autre cas, la premiere ligne de la progreſſion Arithmétique, eſt moins grande par rapport à la ſeconde, que la ſeconde par rapport à la troiſiéme. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Puiſque dans l'un & l'autre cas, la moyenne Géométrique AX eſt plus petite que la moyenne Arithmétique AC, le quarré

de AX eſt auſſi plus petit que le quarré de AC ; or, dans la progreſſion Géométrique AB, AX :: AX, AD ou AD, AX :: AX, AB, nous avons $\overline{AX}^2 = AB \times AD$; donc AB×AD eſt plus petit que le quarré $\overline{AC}^2$; ainſi dans la progreſſion Arithmétique AB, AC, AD, ou AD, AC, AB, le produit des extrêmes eſt moindre que le quarré de la moyenne. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

CHAPITRE VI.

Des Proprietés du Cercle.

217. DEFINITIONS. Une ligne AB (*Fig.* 132.) menée d'un point à un autre de la circonférence du cercle, & qui ne paſſe pas le centre, ſe nomme *Corde*. Nous avons démontré (*N.* 60.) que la circonférence ne peut couper qu'en deux points une corde qu'on prolongeroit même de part & d'autre. La partie ACB du cercle que la corde coupe, ſe nomme *petit Segment*, & l'autre partie AEB, ſe nomme *grand Segment*.

218. Toute ligne RS (*Fig.* 132.) qui touche une circonférence ſans la couper, ſe nomme *Tangente*, & toute ligne HM (*Fig.* 133.) qui part d'un point extérieur H, & qui coupe la circonférence en deux points N, M, ſe nomme *Secante*.

219. Si d'un point B ou une droite RS (*Fig.* 132.) touche le cercle, on mene une corde AB, l'angle ABR tourné du côté du petit ſegment, ſe nomme *Angle du petit Segment*, & l'angle ABS tourné du côté du grand ſegment, ſe nomme *Angle du grand Segment*.

220. L'angle AOC (*Fig.* 133.) formé par deux rayons AO, CO, ſe nomme *Angle au Centre*, & l'angle NMA fait par deux cordes NM, MA, ſe nomme *Angle à la Circonference*.

221. La portion de cercle AOC compriſe entre deux rayons, ſe nomme *Secteur de Cercle*.

222. Si des extrêmités d'une corde AB (*Fig.* 134.), on mene deux droites à un point quelconque C de l'arc du petit ſegment, l'angle ACB fait en C, ſe nomme *Angle dans le petit Segment* ; & ſi des mêmes extrêmités A, B on mene deux droites à un point quelconque D de l'arc du grand ſegment, l'angle ADC fait en D, ſe nomme *Angle dans le grand Segment*.

223. Deux

223. Deux circonférences de cercle qui ont le même centre, ſe nomment *Circonférences Concentriques*; & ſi deux circonférences de cercle, dont l'une eſt dans le cercle de l'autre, n'ont pas le même centre, elles ſe nomment *Excentriques.*

224. PROPOSITION XLIX. *Si une droite* OS (Fig. 135.) *qui paſſe par le centre* O, *coupe une corde* AB *en deux également, elle lui eſt perpendiculaire, & ſi elle eſt perpendiculaire ſur la corde* AB, *elle la coupe en deux également. Dans l'un & l'autre cas, l'arc* ASB *que la corde ſoutient, eſt coupé en deux également; enfin, ſi l'arc* ASB *eſt coupé en deux également par une droite* OS *qui paſſe par le centre, cette droite* OS *eſt perpendiculaire ſur la corde, & la coupe en deux également.*

Je mene aux extrêmités de la corde les rayons OA, OB qui ſont deux obliques égales, menées du même point O ſur la droite AB; ainſi la perpendiculaire qu'on meneroit du point O ſur la même ligne AB, couperoit la droite AB au point R qui la diviſe en deux également (*N.* 54.), mais par la ſuppoſition, la droite OS qui paſſe par le même point O, paſſe auſſi par le point R, puiſqu'elle diviſe AB en deux également; donc la droite AS n'eſt pas différente de la perpendiculaire qu'on meneroit du point O, car l'une & l'autre auroient deux points communs O, R, ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Si l'on ſuppoſe que OS eſt perpendiculaire ſur AB, il eſt clair qu'elle doit diviſer AB en deux également, à cauſe des obliques égales OA, OB (*N.* 54.). Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Dans l'un & l'autre cas, les deux triangles OAR, OBR ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, ſont parfaitement égaux (*N.* 100.); donc les angles AOS, BOS, ſont égaux, & par conſéqnent les arcs AS, SB, qui meſurent ces angles ſont égaux, & l'arc AB eſt diviſé en deux également par la droite OS, ce qu'il falloit 3°. démontrer.

Enfin, ſi l'arc AB eſt diviſé en deux également en S, par la droite SO qui paſſe par le centre; cette droite paſſe par les mêmes points O, S, par leſquels paſſeroit la perpendiculaire OR, ou la droite qui partant du centre O, viendroit diviſer AB en deux également; donc SO eſt la même que l'une ou l'autre de ces lignes, & par conſéquent elle eſt perpendiculaire ſur AB, & la coupe en deux également; ce qu'il falloit 4°. démontrer.

225. COROLLAIRE. *Si une ligne* SO *qui paſſe par le centre, diviſe*

un arc AB *en deux également ; cette ligne prolongée au-delà du centre en* H, *diviſera auſſi l'arc oppoſé* AHB *en deux également.*

La ligne SO prolongé en H eſt diamétre, & coupe la circonférence en deux parties égales SAH, SBH, retranchant donc d'une part l'arc SA, & de l'autre l'arc SR, égal à SA, le reſte AH ſera égal au reſte BH.

226. Corollaire II. *Toute ligne* SH *qui diviſe une corde* AB *en deux également, & qui lui eſt perpendiculaire, paſſe par le centre* O. Si on veut que cela ne ſoit pas, je mene par le point R une droite au centre, & cette droite ſera perpendiculaire ſur AB, à cauſe qu'elle la diviſe en deux également (*N.* 224.); donc ſur un même point R, on pourroit élever deux perpendiculaires ſur AB, ce qui eſt impoſſible.

227. Probleme. *Trouver le centre d'un cercle* (Fig. 135.).

Je mene une corde AB, que je diviſe en deux également en R; j'éleve en R la perpendiculaire HS, que je prolonge de part & d'autre juſqu'à la circonférence, & diviſant HS en deux également en O, ce point eſt le centre demandé, ce qui eſt évident par la propoſition précédente & ſes Corollaires.

228. Probleme. *Faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés* A, B, C, (Fig. 136.) *qui ne ſont pas en ligne droite.*

Je joints les points A, B par la droite AB, & les points A, C, par la droite AC; je coupe chacune de ces droites en deux également aux points M, N, & ſur ces points j'éleve des perpendiculaires indéfinies MR, NS; du point O où ces perpendiculaires ſe coupent, pris pour centre & d'une ouverture de compas égale à la diſtance OA du point O au point A; je décris une circonférence qui paſſe par les deux autres points B, C, ce que je prouve ainſi :

Si les droites AB, AC étoient en ligne droite, les perpendiculaires MR, NS ſeroient paralelles, & ne ſe couperoient pas (*N.* 68.); mais comme ces droites AB, AC s'inclinent l'une ſur l'autre, les perpendiculaires doivent auſſi s'approcher entr'elles du côté de l'angle BAC, & par conſéquent elles doivent ſe couper en un point O. Cela poſé.

Puiſque la perpendiculaire MR paſſe par le point M également éloigné des extrêmités A, B de la droite AB, le point O de cette perpendiculaire doit être auſſi également éloigné des mêmes extrêmités A, B (*N.* 56.); par la même raiſon le point O de la perpendiculaire NS, doit être également diſtant des

extrêmités A, C de la droite AC; donc ce point O eſt également éloigné des trois points A, B, C, & par conſéquent la circonférence qui a pour centre le point O, & qui paſſe par le point A, doit paſſer par les deux autres B, C.

229. COROLLAIRE. *On ne peut faire paſſer deux différentes circonférences de cercles par trois points donnés* A, B, C.

Si cela ſe pouvoit, les droites AB, AC ſeroient des cordes de l'un & de l'autre cercle, & par conſéquent le centre de la ſeconde circonférence qu'on voudroit faire paſſer par ces trois points, devroit ſe trouver ſur la perpendiculaire MR, qui coupe la corde AB en deux également (*N.* 226.), par la même raiſon il devroit ſe trouver auſſi ſur la perpendiculaire NS qui coupe la corde AC en deux également, & de plus ce centre devroit être différent du centre O de la premiere circonférence; car autrement ces deux circonférences ne ſeroient pas différentes, puiſqu'elles auroient le même centre & le même rayon. Mais il n'eſt pas poſſible de trouver un point différent de O qui ſoit ſur l'une & l'autre perpendiculaire, puiſqu'elles ne ſe coupent qu'en un point (*N.* 35.); donc il n'eſt pas poſſible de faire paſſer une autre circonférence par les trois points A, B, C.

230. COROLLAIRE III. *Donc deux circonférences de cercle ne peuvent ſe couper en trois points.* Si cela ſe pouvoit on pourroit auſſi faire paſſer deux circonférences par trois points donnés.

231. COROLLAIRE. *On peut toujours faire paſſer une circonférence par les trois ſommets des angles d'un triangle.* Les trois ſommets des angles d'un triangle, ne ſont jamais en ligne droite. Mais par trois points qui ne ſont pas en ligne droite, on peut faire paſſer une circonférence (*N.* 228.). Donc, &c.

232. PROPOSITION L. *De toutes les lignes qu'on peut mener à la circonférence d'un cercle, d'un point* A (Fig. 137.) *pris entre le centre & la circonférence, la plus grande eſt la droite* AB *qui paſſe par le centre; la plus petite eſt la droite* AC *qui eſt le prolongement de la droite* AB, *& les autres* AM, AN, &c. *vont en diminuant à meſure qu'elles s'éloignent de la plus grande* AB.

Du centre O je mene la droite OM; dans le triangle AOM, les deux côtés AO, OM pris enſemble ſont plus grands que le côté AM; or, OM eſt égal à OB, l'une & l'autre étant rayon du même cercle; donc AO + OM = AO + OB ou AB, & par conſéquent la droite AB qui paſſe par le centre, eſt plus grande que la droite AM qui n'y paſſe pas; & on prouvera de la même

façon que AB eſt plus grand que AN, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je mene le rayon ON; les triangles AOM, AON ont le côté AO commun, & le côté OM eſt égal au côté ON; mais l'angle compris AOM dans le premier eſt plus grand que l'angle compris AON dans le ſecond; donc la baſe AM du premier eſt plus grande que la baſe AN du ſecond; (*N.* 108.) c'eſt-à-dire la droite AM plus proche de la plus grande AB, eſt plus grande que la droite AN qui en eſt plus éloignée, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

Dans le triangle AON, les deux côtés AO, AN pris enſemble, ſont plus grands que le côté AN; mais ON=OC; donc AO+AN eſt plus grand que OC ou OA+AC; ainſi retranchant OA de part & d'autre, nous aurons AN plus grand que AC; c'eſt-à-dire le prolongement AC de la plus grande AB, eſt plus petit que AN, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 3°. démontrer.

233. COROLLAIRE. *On peut toujours mener du point* A *à la circonférence deux lignes égales; mais jamais trois; & la ligne qui joint les extrêmités des égales, eſt coupée en deux également, par la plus grande* AB *qui lui eſt perpendiculaire.*

Je prens l'arc BS égal à l'arc BM, & du point S je mene les droites SA, SO; l'angle SOB eſt donc égal à l'angle MOB, puiſque les arcs BS, BM qui meſure ces angles ſont égaux, & à cauſe que l'angle SOB & ſon angle de ſuite SOA valent deux droits, (*N.* 49.) de même que l'angle MOB & ſon angle de ſuite MOA; les angles SOA, MOA ſont égaux, & par conſéquent les triangles SOA, MOA qui ont le côté AO commun, le côté OS égal au côté OM, & l'angle compris égal à l'angle compris, ſont parfaitement égaux; (*N.* 100.) donc la droite AS eſt égale à la droite AM, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Et il eſt viſible qu'on ne peut touver trois lignes menées du point A à la circonférence qui ſoient égales entr'elles; car il faudroit qu'il y en eût deux qui fuſſent d'un même côté par rapport à la plus grande AB, & ces deux là ſeroient inégales, puiſqu'elles ſeroient à des diſtances inégales de la plus grande; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

Enfin, à cauſe que l'arc SM eſt diviſé en deux également par la droite BA qui paſſe par le centre; la corde SM qui joint les extrê-

mités des égales AS, AM, eſt coupée en deux également & perpendiculairement par la droite BA (*N.* 224.) ce qu'il falloit, 3°. démontrer.

234. COROLLAIRE II. *Si un point* A *eſt entre le centre & la circonférence, la diſtance de ce point à la circonférence, eſt la droite* AC *priſe ſur le diametre qui paſſe par le point* A.

Par la Propoſition précédente, la droite AC eſt la plus courte qu'on puiſſe mener du point A à la circonférence; donc cette droite meſure la diſtance du point A à la circonférencc.

235. PROPOSITION LI. *De toutes les ſecantes* AB, AM, AN, &c. (Fig. 138.) *qu'on peut mener d'un point* A; *la plus grande eſt celle qui paſſe par le centre* O, *& les autres vont en diminuant à meſure qu'elles s'éloignent de la plus grande.*

Je mene le rayon OM; dans le triangle AOM, j'ai AO+OM plus grand que AM; mais OM=OB; donc AO+OB ou AB eſt plus grand que AM; c'eſt-à-dire la ſecante AB qui paſſe par le centre, eſt plus grande que AM qui n'y paſſe pas, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je mene le rayon ON; les triangles AOM, AON ont le côté AO commun, le côté OM égal au côté ON; mais l'angle AOM compris dans le premier, eſt plus grand que l'angle AON compris dans le ſecond; donc la baſe AM du premier eſt plus grande que la baſe AN du ſecond; (*N.* 108.) c'eſt-à-dire la ſecante plus proche de la ſecante AB qui paſſe par le centre, eſt plus grande que la ſecante AN qui en eſt plus éloignée, & ainſi des autres; ce qu'il falloit démontrer.

236. COROLLAIRE. *Du point* A, *on peut mener des ſecantes égales deux à deux, tant qu'on voudra; mais jamais il ne s'en trouvera trois égales, & les lignes qui joignent les extrêmités des égales ſont coupées en deux également & perpendiculairement par la ſecante* AB *qui paſſe par le centre.*

Je prens l'arc BS égal à l'arc BM, & je mene les droites SA, SO; les angles SOB, MOB ſont donc égaux à cauſe de l'égalité des arcs BS, BM qui les meſurent; donc leurs angles de ſuite SOA, MOA ſont égaux auſſi, de même que les triangles SOA, MOA qui ont le côté AO commun, le côté SO égal au côté MO, & l'angle compris SOA, égal à l'angle compris MOA, (*N.* 100.) & par conſéquent le côté AS eſt égal au côté AM; c'eſt-à-dire les ſecantes également éloignées de la plus grande AB, ſont égales, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Toute autre ſecante qu'on voudroit mener du point A, doit être ou plus proche ou plus éloignée de la ſecante AB que les ſcantes AS, AM qui en ſont également éloignées; & par conſéquent, ſera ou plus petite ou plus grande que chacune des ſecantes AS, AM; donc on ne peut jamais trouver trois ſecantes égales; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

L'arc SM eſt diviſé en deux également par la ligne BA qui paſſe par le centre; donc BA coupe en deux également & perpendiculairement la corde SM (*N.* 224.) qui joint les extrêmités des ſcantes égales, AS, AM; ce qu'il falloit, 3°. démontrer.

237. PROPOSITION LII. *De toutes les parties extérieures* AC, AR, AT, &c. (Fig. 139.) *des ſecantes* AB, AM, AN, &c. *qu'on peut mener du point extérieur* A, *la plus petite eſt la partie dont la ſecante* AB *paſſe par le centre* O *& les autres* AR, AT, &c. *vont en augmentant à meſure qu'elles s'éloignent de* OC.

Je mene le rayon OR; dans le triangle ARO; j'ai AR+RO plus grand que AO ou AC+CO, & retranchant d'une part RO, & de l'autre CO=RO, le reſte AR eſt plus grand que AC; c'eſt-à-dire la partie extérieure AC de la ſecante AB qui paſſe par le centre, eſt plus petite que la partie extérieure AR de la ſecante AM qui n'y paſſe pas, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je mene le rayon OT; les côtés AT, TO du triangle ATO pris enſemble ſont plus grands que les côtés OR, RA du triangle ARO; (*N.* 38.) retranchant donc d'une part la droite TO, & de l'autre, la droite RO=TO; le reſte AT eſt plus grand que le reſte AR, c'eſt-à-dire la partie extérieure AT de la ſecante AN plus éloignée de la ſecante AB qui paſſe par le centre eſt plus grande que la partie extérieure AR de la ſecante AM, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

238. COROLLAIRE. *On peut toujours trouver des parties extérieures égales deux à deux, tant qu'on voudra; mais il n'y en aura jamais trois d'égales, & les droites qui joignent les extrémités des égales, ſont coupées en deux également & perpendiculairement par la ſecante* AB *qui paſſe par le centre.*

Je prens l'arc CS égal à l'arc CR, & je mene les droites SA, SO; l'angle SOC eſt donc égal à l'angle ROC, à cauſe de l'égalité des arcs CS, CR qui meſurent ces angles, & les triangles SOA, ROA ſont parfaitement égaux à cauſe du côté SO égal au côté RO du côté AO commun, & de l'angle SOA égal à l'an-

gle ROA ; (*N.* 100.) donc le côté AS eſt égal au côté AR ; c'eſt-à-dire les parties extérieures AS, AR des ſecantes également éloignées de la ſecante AB qui paſſe pat le centre, ſont égales, & ainſi des autres ; ce qu'il falloit 1°. démontrer.

On ne peut mener de partie extérieure du point A qui ne ſoit plus proche ou plus éloignée de la partie AC que les deux égales AS, AR, & qui par conſéquent ne ſoit plus petite ou plus grande que chacune de ces deux ; donc on ne peut trouver trois parties extérieures égales : ce qu'il falloit 2°. démontrer.

La ligne AB qui paſſe par le centre coupe l'arc SR en deux également ; donc elle coupe auſſi en deux également & perpendiculairement la corde SR (*N.* 224.) qui joint les extrémités des égales AS, AR ; ce qu'il falloit, 3°. démontrer.

Nota. Puiſque de toutes les paties extérieures des ſecantes, qu'on peut mener d'un point extérieur A, la plus petite eſt la partie extérieure AC de la ſecante AB qui paſſe le centre ; il s'enſuit que *la diſtance d'un point extérieur* A *à une circonférence de cercle, eſt la partie* AC *d'une droite* AB *menée du point* A *au centre.*

239. PROPOSITION LIII. *Si une ligne droite* PQ (Fig. 140.) *touche une circonférence, elle ne la touche qu'en un point* Q.

Si on veut qu'elle la touche en un autre point H, je mene la droite HQ qui ſera le prolongement de PQ, puiſqu'on ſuppoſe que la même droite PQ coupe la circonférence en Q & H. Je mene auſſi les rayons QO, HO, & à cauſe que le triangle HOQ eſt iſoſcele, la perpendiculaire menée du point O ſur la baſe HQ, paſſera par le milieu L de cette baſe ; (*N.* 107.) or cette perpendiculaire ſera plus courte que les obliques OH, OQ ; (*N.* 53.) donc ſon extrêmité L où elle coupe la droite HQ ſera dans le cercle, c'eſt-à-dire entre le centre & la circonférence, & par conſéquent la droite HQ ne ſera poinr tangente, puiſqu'elle aura un point L dans le cercle.

240. PROPOSITION LIV. *Si une ligne* MN. (Fig. 140.) *touche un cercle, & que du point dit d'attouchement* A *on mene un rayon* AO, *ce rayon eſt perpendiculaire ſur la tangente.*

Puiſque la tangente ne peut toucher la circonférence qu'au point A, tous ſes autres points ſont hors de la circonférence & plus éloignés du centre que le point A ; ainſi les lignes menées de ces points au centre, ſont toutes plus longues que AO, & par conſéquent AO étant la plus courte de toutes celles qu'on

peut mener du point O ſur MN, eſt perpendiculaire ſur MN (*N.* 53.).

241. COROLLAIRE. *Il ne peut y avoir qu'une ſeule tangente qui touche un cercle à un point* Q (Fig. 140.).

PQ touche le cercle en Q; ſi on veut qu'une autre droite QH le touche au même point Q, je mene le rayon QO qui ſera perpendiculaire ſur PQ, (*N.* 240.) & par conſéquent oblique ſur QH; (*N.* 57.) donc la perpendiculaire qu'on meneroit du point O ſur HQ, ſeroit plus courte que l'oblique QO, & par conſéquent cette perpendiculaire couperoit HQ en dedans du cercle; donc HQ ne ſauroit être tangente.

242. PROBLEME. *D'un point donné* A *ſur la circonférence d'un cercle*, (Fig. 140.) *mener une tangente.*

Je mene le rayon AO, & ſur ſon extrêmité A une perpendiculaire MN qui eſt la tangente demandée; (*N.* 240.) car OA étant la plus courte qu'on puiſſe mener du point O ſur tous les points de MN; tous les points de MN à l'exception du point A, ſont hors de la circonférence, & partant MN, eſt tangente.

243. PROPOSITION LV. *Deux cercles qui ſe touchent, ne ſe touchent qu'en un point.*

Si les centres O, H des deux cercles RMS, RTS (*Fig.* 141.) ne ſont pas tous les deux dans un même cercle, & qu'on prétende que ces deux cercles ſe touchent aux point R, S, ſans ſe couper; je mene les rayons OR, OS, HR, HS & la droite RS. Les rayons OR, OS étant égaux, le point O eſt également éloigné des extrêmités R, S de la ligne RS & par la même raiſon le point H eſt auſſi également éloigné des extrêmités R, S; menant donc la ligne droite OH par les deux centres OH, cette ligne eſt perpendiculaire ſur RS, (*N.* 58.) & la coupe en deux également; ainſi les deux rayons OR, HR étant enſemble plus grand que la droite OH aux extrêmités de laquelle ils tournent; leurs circonférences ſe coupent en R, S, (*N.* 59.) & par conſéquent elle ne ſe touchent pas comme on le prétendoit.

Si les centres O, H des deux cercles ſont dans un même cercle RMS, (*Fig.* 142.) & qu'on prétende que les deux circonférences ſe touchent en deux points R, S; je mene du centre O du petit cercle, les rayons OR, OS; & comme ce centre O eſt entre le centre H du grand & ſa circonférence, les droites égales OR, OS ne ſont pas la plus courte ligne qu'on peut mener du point O à la circonférence RMS; car cette plus courte ligne

OP,

OP doit paſſer entre les égales OR, OS, & ſe trouver à égale diſtance de l'une & de l'autre; (*N.* 233.) donc le point P de la circonférence RMS du grand cercle, & plus proche du centre O du petit cercle que la circonférence RTS de ce petit cercle, & par conſéquent la circonférence RTS coupe la circonférence RMS, & ces deux circonférences ne ſe touchent pas comme on le prétendoit.

244. PROPOSITION LVI. *Lorſque la poſition de deux cercles eſt telle que les deux centres ne ſe trouvent pas tous les deux dans l'un des deux cercles, s'il arrive que la ligne* OH (Fig. 143.) *qui joint les deux centres ſoit plus grande que la ſomme des rayons* OR, HS, *les deux cercles ne ſe coupent ni ne ſe touchent. Si cette droite* OH (Fig. 144.) *eſt égale à la ſomme des rayons* OR, RH, *les deux cercles ſe touchent ſans ſe couper; enfin ſi la droite* OH (Fig. 145.) *eſt moindre que la ſomme des rayons* OR, HS, *les cercles ſe coupent.*

Dans le premier cas, (*Fig.* 143.) j'éleve en R & S les perpendiculaires MT, NV leſquelles ſont paralelles entr'elles, (*N.* 68.) & par conſéquent ne ſe coupent pas; or, MT eſt tangente du cercle RCD, (*N.* 242.) & NV eſt tangente du cercle SEL; ainſi ces deux cercles étant tous entiers hors des paralelles MT, NV ne peuvent ni ſe toucher ni ſe couper.

Dans le ſecond cas, (*Fig.* 144.) j'éleve en R la perpendiculaire MN, laquelle eſt tangente de l'un & de l'autre cercle, puiſqu'elle eſt perpendiculaire ſur le rayon OR de même que ſur le rayon HR; ainſi les deux circonférences étant toutes entiéres, l'une à gauche & l'autre à droite de MN, ſe touchent en R & ne ſe coupent pas.

Dans le troiſiéme cas, (*Fig.* 145.) les deux rayons OR, HS étant enſemble plus grands que la droite OH aux extrêmités de laquelle ils tournent; les deux circonférences doivent ſe couper (*N.* 59.).

245. COROLLAIRE. *Si deux cercles* RCD, REF (Fig. 144.) *ſe touchent extérieurement, la ligne* OH *qui joint les deux centres, paſſe par le point d'attouchement* R.

La ligne OH ne peut pas être plus grande que la ſomme des rayons; car autrement les deux cercles ne ſe couperoient ni ne ſe toucheroient; (*N.*244.) elle ne peut être non plus moindre que la ſomme des rayons; car autrement les cercles ſe couperoient; (*N.* 244.) donc il faut que OH ſoit égal à la ſomme des rayons; prenant donc ſur OH la partie OR égale au rayon du premier

cercle, le reſte RH ſera le rayon du ſecond ; ainſi élevant en R la perpendiculaire MN qui ſera tangente des deux cercles, ces deux cercles ſe couperont en R, & partant OH paſſera par le point d'attouchement R.

246. PROPOSITION. *Lorſque la poſition de deux cercles eſt telle que les deux centres ſe trouvent tous les deux dans l'un des cercles. S'il arrive que la ligne* HO (Fig. 146.) *qui joint les centres* H, O, *ſoit moindre que la différence des rayons* HS, OC, *les deux circonférences ne ſe touchent ni ne ſe coupent. Si la droite* HO (Fig. 147.) *eſt égale à la difference des rayons* HS, OS, *les deux circonférences ſe touchent ſans ſe couper ; enfin ſi la ligne* HO (Fig. 148.) *eſt plus grande que la différence des rayons* HS, OR, *les deux circonférences ſe coupent.*

Dans le premier cas (*Fig.* 146.), je retranche du rayon HS la partie OH, & à cauſe que OH eſt moindre que la différence du rayon HS au rayon OC, il s'enſuit que le reſte OS eſt plus grand que le rayon OC, ainſi le point S de la circonférence SEL eſt en dehors de la circonférence RCD du rayon CO ; or à cauſe que le point O eſt entre le centre H du grand cercle, & ſa circonférence SEL, & que la ligne SO prolongée paſſe par le centre H, la ligne SO eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point O à la circonférence SEL (*N.* 232.). Donc toutes les lignes qu'on pourroit mener du point O à la circonférence SEL, ſeroient, à plus forte raiſon, plus grandes que le rayon OS, & par conſéquent tous les points de la circonférence SEL où ces lignes iroient aboutir, ſont hors de la circonférence RCD, & les deux circonférences ne peuvent ni ſe couper ni ſe toucher.

Dans le ſecond cas (*Fig.* 147.) ; je retranche du rayon HS la droite OH, & le reſte OS eſt égal au rayon du petit cercle, puiſque par la ſuppoſition, la droite OH eſt la différence de ces deux rayons. Donc les deux circonférences paſſent par le point S ; or, à cauſe que le point O eſt entre la circonférence SEL du grand cercle, & ſon centre H, & que la droite SO prolongée paſſe par le centre H, cette droite SO eſt la plus courte qu'on puiſſe mener du point O à la circonférence SEL (*N.* 232.) ; donc toutes les lignes qu'on voudroit mener d'un point O à la circonférence SEL étant plus grande que le rayon SO du petit cercle, doivent ſortir hors de la circonférence SCD du petit, & partant

les deux circonférences n'ayant de commun que le point S ſe touchent en ce point, & ne ſe coupent pas.

Dans le troiſiéme cas (*Fig.* 148.), je retranche du rayon HS, la droite OH, & comme cette droite eſt plus grande que la difference des rayons HS, OR, le reſte OS eſt plus petit que le rayon OR; ainſi la circonférence SEL du grand cercle, paſſe entre le centre O & la circonférence RCD du petit cercle. Or, comme nous ſuppoſons que le rayon HS du grand cercle eſt plus grand que le rayon OR du petit, & que le centre H du grand eſt en déçà du centre O du petit par rapport aux points S, R, il eſt clair que ſi l'on prolonge les rayons SH, RO en V, & X, le rayon HV du grand cercle ira aboutir à un point V de ſa circonférence plus éloigné du centre O du petit, que le point X de la circonférence du petit, où ira aboutir le rayon OX du petit; ainſi la circonférence SEL ayant un point S en dedans du petit cercle, & un point V en dehors, ces deux circonférences doivent néceſſairement ſe couper.

247. COROLLAIRE. *Si deux cercles* SEL, SCD (Fig. 147.) *ſe touchent intérieurement, la droite menée* HS *par les deux centres, paſſe par le point d'attouchement* S.

La droite HO menée d'un centre à l'autre, ne peut pas être moindre que la différence des deux rayons, car ſi cela étoit les deux cercles ne ſe toucheroient ni ne ſe couperoient (*N.* 246.), ce qui eſt contre la ſuppoſition. La même droite HO ne peut pas non plus être plus grande que la différence des deux rayons, car autrement les deux cercles ſe couperoient (*N.* 246.), ce qui eſt encore contre la ſuppoſition. Donc cette droite HO doit être égale à la différence des deux rayons; donc en prolongeant HO en S, juſqu'à la circonférence du grand cercle, & retranchant du rayon HS du grand cercle la droite HO, le reſte OS doit être le rayon du petit cercle, & par conſéquent les deux circonférences paſſent par le point S de la droite HS.

248. PROBLEME. *Trouver la plus grande & la moindre diſtance de deux circonférences excentriques* SEL, RCD (Fig. 149. 150.) *qui ne ſe coupent ni ne ſe touchent.*

Je mene par les deux centres HO, une droite SV qui ſe termine de part & d'autre à la circonférence du grand cercle, & la partie SR de ce diamétre compriſe entre les deux circonférences du côté du centre O du petit cercle, eſt la moindre diſtance des deux circonférenees, & la partie TV compriſe entre

les deux circonférences du côté du centre H du grand cercle, eſt la plus grande diſtance ; ce que je prouve ainſi :

Du centre O du petit cercle, je mene à tous les points de la grande circonférence des droites ON, OE, &c. les points S, N, E, V de la grande circonférence étant tous extérieurs au petit cercle, leurs diſtances à la circonférence du petit cercle ſont ſur les droites SO, NO, EQ, &c. menées de ces points par le centre O (*par la note du N.* 238.) ; ainſi ces diſtances ſont les droites SR, NP, EQ, &c. or, à cauſe que le point O eſt entre le centre H du grand cercle & ſa circonférence SNEL, la droite OS eſt la plus petite qu'on puiſſe mener du point O à la circonférence SNEL, & les autres ON, OE, &c. vont en augmentant juſqu'à la derniere OV qui eſt la plus grande (*N.* 232.); donc ſi des lignes OS, ON, OE, OV, qui vont en augmentant ; nous retranchons les droites OR, OP, OQ, OT, qui ſont toutes égales à cauſe qu'elles ſont toutes rayons du petit cercle, les reſtes SR, NP, EQ, TV iront encore en augmentant, & par conſéquent SR ſera la plus petite diſtance, & TV la plus grande.

Il eſt viſible qu'on trouveroit la même choſe du côté de la demi-circonférence SLV.

Les figures 149, 150 différent en ce que dans la premiere, les deux centres O, H ſont compris tous les deux dans le petit cercle ; & dans la ſeconde au contraire, les deux centres O, H n'y ſont pas compris tous les deux, mais la démonſtration eſt la même pour l'un & l'autre cas.

249. PROPOSITION LIV. *La plus grande de toutes les cordes d'un cercle, eſt le diamétre, & les autres ſont d'autant plus petites qu'elles ſont plus éloignées du centre* O (Fig. 151.).

Du centre O, je mene aux extrêmités de la corde CD, les rayons CO, OD, & dans le triangle COD, nous avons CO + OD plus grand que CD (*N.* 95.) ; or, le diamétre AB eſt égal aux deux rayons CO, OD pris enſemble ; donc le diamétre eſt plus grand que la corde CD, & ainſi des autres. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Soient les deux cordes CD, HR, dont la ſeconde HR eſt plus éloignée du centre O que la corde CD ; je mene les rayons OC, OD, OH, OR, & du centre O les perpendiculaires ON, OM ſur les cordes, leſquelles par conſéquent ſont diviſées chacune en deux parties égales (*N.* 224.) ; or, dans le triangle rec-

tangle NOC, j'ai $\overline{CO}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{NO}^2$ (*N.* 171.); & le triangle rectangle MOR donne $\overline{OR}^2 = \overline{RM}^2 + \overline{MO}^2$, mais CO = OR; donc $\overline{CO}^2 = \overline{OR}^2$, & partant $\overline{CN}^2 + \overline{NO}^2 = \overline{RM}^2 + \overline{MO}^2$; mais par la ſuppoſition la diſtance NO de la corde CD au centre eſt plus petite que la diſtance MO de la corde RH au centre; donc $\overline{NO}^2$ eſt plus petit que $\overline{MO}^2$, & par conſéquent $\overline{CN}^2$ doit être plus grand que $\overline{RM}^2$, & CN plus grand que RM; donc le double CD de CN eſt plus grande que le double RH de RM; c'eſt-à-dire la corde CD plus proche du centre eſt plus grande que la corde RH qui en eſt plus éloignée, & ainſi des autres. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

250. COROLLAIRE Ier. *Les cordes également éloignées du centre ſont égales.*

Suppoſons que les cordes CD, RH ſoient également éloignées du centre; donc les perpendiculaires ON, OM ſeront égales, ainſi menant les rayons OC, OR, les triangles rectangles OCN, ORM auront l'hypothenuſe OC égale à l'hypothenuſe OR, & le côté ON égal au côté OM, & partant le troiſiéme côté CN ſera égal au troiſiéme RM (*N.* 102.); donc la corde CD double de CN ſera égale à la corde RH double de RM.

On prouvera de la même façon que *les cordes égales ſont également éloignées du centre*, car ſi nous ſuppoſons CD = RH, & que nous menions les perpendiculaires ON, OM, nous aurons CN = RM, ainſi les deux triangles rectangles auront l'hypothenuſe OC égale à l'hypothenuſe OR, & le côté CN égal au côté RM; c'eſt pourquoi le troiſiéme ON ſera égal au troiſiéme OM, & les cordes ſeront également éloignées du centre.

251. COROLLAIRE II. *Les plus grandes cordes ſoutiennent des plus grands arcs, & les plus grands arcs ſont ſoutenus par des plus grandes cordes, en entendant par le mot d'arcs ceux des petits ſegmens que les cordes coupent.*

Soient les cordes CD, HR (*Fig.* 151.), dont on ſuppoſe que la premiere CD eſt plus grande que la corde HR; je mene les rayons OC, OD, OH, OR, les triangles iſoſceles COD, HOR ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais la baſe CD du premier eſt plus grande que la baſe RH du ſecond; donc l'angle compris COD eſt plus grand que l'angle compris ROH (*N.* 109.);

donc l'arc CD meſure du premier angle eſt plus grand que l'arc RH meſure du ſecond; mais l'arc CD ou CSD eſt l'arc du petit ſegment que la plus grande corde CD coupe & l'arc RH ou RTH eſt celui du petit ſegment coupé par la petite corde RH; donc, &c. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

De même ſi l'arc CSD eſt plus grand que l'arc RTH, les deux triangles iſoſceles COD, ROH auront deux côtés égaux chacun à chacun, mais l'angle compris COD meſuré par l'arc CSD ſera plus grand que l'angle compris ROH meſuré par l'arc RTH; donc la baſe du premier, c'eſt-à-dire la corde CD ſera plus grande que la baſe RH du ſecond, ou que la corde RH, & ainſi des autres. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

On prouvera de la même maniere *que les cordes égales ſoutiennent des arcs égaux, & que les arcs égaux ſont ſoutenus par des cordes égales.*

252. PROPOSITION LVII. *Tout angle* ABC (Fig. 152.) *qui a ſon ſommet* B *à la circonférence, vaut la moitié de l'arc* AC *que ſes côtés embraſſent.*

Du ſommet B par le centre O, je mene le diamétre BR, & du centre O les deux rayons OA, OC; le triangle ABO étant iſoſcele, ſes deux angles OAB, OBA ſur la baſe AB ſont égaux; donc l'angle AOR externe à ce triangle, & qui vaut les deux internes oppoſés (*N.* 97.) eſt double de l'angle ABO; par la même raiſon l'angle COR externe au triangle iſoſcele COB eſt double de l'angle CBO; donc les deux angles enſemble AOR, COR, c'eſt-à-dire l'angle AOC eſt double des deux enſemble ABO, CBO, ou de l'angle ABC; or, l'angle au centre AOC vaut l'arc ARC qu'il embraſſe; donc l'angle à la circonférence ABC en vaut la moitié.

253. PROPOSITION LVIII. *Tout angle de ſegment, c'eſt-à-dire, tout angle* BAC (Fig. 153.) *fait par une tangente* AB, *& une corde* AC *menée du point d'attouchement vaut la moitié de l'arc* AHC *de ſon ſegment.*

Du point d'attouchement, je mene le rayon AO, & du centre O, la droite OH perpendiculaire ſur la corde, & qui par conſéquent coupe la corde & l'arc chacun en deux parties égales (*N.* 224.); l'angle BAO fait par la tangente, & le rayon eſt droit (*N.* 242.); & dans le triangle rectangle ARO, l'angle ARO étant droit, les deux autres RAO, ROA pris enſemble valent un droit (*N.* 97.); donc l'angle BAO eſt égal aux deux enſem-

ble RAO, ROA, & retranchant de part & d'autre l'angle RAO, il reſte l'angle BAC du ſegment égal à l'angle ROA ou HOA, mais l'angle au centre HOA, vaut l'arc AH, moitié de l'arc AHC du ſegment; donc l'angle BAC du ſegment vaut la moitié de l'arc AHC de ce ſegment.

L'angle MAC du grand ſegment, & l'angle BAC du petit, valent enſemble deux droits (*N.* 49.), ou la moitié de la circonférence, c'eſt-à-dire la moitié de l'arc AHC du petit ſegment, plus la moitié de l'arc ANC du grand. Or, l'angle BAC vaut la moitié de l'arc AHC; donc l'angle MAC du grand ſegment, vaut la moitié de l'arc ANC de ce ſegment.

254. PROPOSITION LIX. *Tout angle* AB (Fig. 154.) *dont le ſommet* B *eſt entre le centre, & la circonférence vaut la moitié de l'arc* AC *que ſes jambes embraſſent plus la moitié de l'arc* DE *qu'embraſſent ſes jambes prolongées au-delà du ſommet.*

Je mene la droite EC; l'angle ABC externe au triangle BCE vaut les deux internes oppoſés BEC, BCE (*N.* 97.); or, BEC ou AEC ayant ſon ſommet E à la circonférence vaut la moitié de l'arc AC (*N.* 252.), & par la même raiſon BCE ou DCE vaut la moitié de l'arc DE; donc l'angle ABC vaut la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc DE.

255. PROPOSITION LX. *Tout angle* ABE *dont le ſommet* B *eſt hors du cercle* (Fig. 155.) *vaut la moitié de l'arc* AC, *que ſes jambes embraſſent moins la moitié de l'arc* DE *qu'elles coupent.*

Je mene la droite AE; l'angle AEC extérieur au triangle ABE vaut les deux internes oppoſés ABE, BAE (*N.* 97.); donc l'angle ABE ou ABC vaut l'angle AEC moins l'angle BAE; mais l'angle à la circonférence AEC vaut la moitié de l'arc AC (*N.* 252.); & l'angle à la circonférence BAE ou DAE vaut la moitié de l'arc DE; donc l'angle ABC, vaut la moitié de l'arc AC, moins la moitié de l'arc DE.

256. PROPOSITION LVI. *Tout angle* ABC (Fig. 156.) *fait par une corde* AB, *& par le prolongement* BC *d'une autre corde* EB *vaut la moitié des deux arcs* BA, BE *ſoutenus par les cordes.*

Par le point B, je mene la tangente MN qui coupe l'angle ABC en deux autres NBA, NBC; or, l'angle NBA étant l'angle du ſegment BA vaut la moitié de l'arc BA (*N.* 253.), & l'angle NBC étant égal à ſon oppoſé au ſommet MBE qui eſt l'angle du ſegment BE, vaut la moitié de l'arc BE; donc l'angle ABC vaut la moitié de l'arc BA plus la moitié de l'arc BE.

257. PROPOSITION LVII. *Tout angle* ABC (Fig. 157.) *d'un ſegment eſt égal à l'angle* BRA *dans le ſegment oppoſé, c'eſt-à-dire dont le ſommet* R *eſt à la circonférence du ſegment oppoſé, & dont les jambes embraſſent l'arc* BSA *du petit ſegment.*

L'angle ABC du ſegment BSA vaut la moitié de l'arc BSA de ce ſegment; (*N.* 253.) or, l'angle BRA dans le ſegment oppoſé, étant à la circonférence, vaut auſſi la moitié de l'arc BSA qu'il embraſſe; donc &c.

258. PROBLEME. *Couper dans un cercle un ſegment capable de contenir un angle égal à un angle donné* MTN (Fig. 157.).

D'un point quelconque B du cercle, je mene une tangente BC, & je fais avec cette tangente au point B un angle CBA égal à l'angle donné MTN; tout angle qui aura ſon ſommet à la circonférence du ſegment BRA & qui embraſſera la corde BA, ſera égal à l'angle CBA du ſegment oppoſé, (*N.* 257.) & par conſéquent égal à l'angle MTN.

259. PROBLEME. *Inſcrire dans un cercle un triangle* BAC (Fig. 158.) *ſemblable à un triangle donné* MTN, *c'eſt-à-dire, faire que le triangle* BAC *ait les ſommets de ſes trois angles à la circonférence, & qu'il ſoit ſemblable à* MTN.

A un point quelconque A de la circonférence, je mene une tangente RS; je fais avec cette tangente au point A d'un côté l'angle CAS égal à l'angle M, & de l'autre l'angle BAR égal à l'angle N, & joignant les points B, C où les jambes de ces angles coupent la circonférence par la droite BC; le triangle ABC eſt ſemblable au triangle donné MTN.

Car l'angle ABC dans le ſegment ABC, eſt égal à l'angle SAC du ſegment oppoſé, (*N.* 257.) & par conſéquent égal auſſi à l'angle M; de même l'angle ACB dans le ſegment ACB eſt égal à l'angle RAB du ſegment oppoſé & partant égal à l'angle N; donc le troiſiéme angle BAC eſt égal au troiſiéme T, (*N.* 98.) & les deux triangles MTN, ABC ſont ſemblables.

260. PROBLEME. *Une droite* AB (Fig. 159.) *étant donnée, trouver le cercle dans lequel cette ligne étant miſe pour corde, coupe un ſegment capable de contenir un angle égal à un angle donné* T.

A l'extrêmité A de la droite AB, je fais un angle CAB égal à l'angle donné T; du point A j'éleve ſur la jambe CA une perpendiculaire indéfinie AR; du milieu S de la droite AB j'éleve la perpendiculaire SO qui coupe AR en O; & de ce point O

pris

pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à la diſtance du point O au point A, je décris le cercle demandé ABR.

Car à cauſe que la perpendiculaire SO coupe AB en deux également, le point O de cette perpendiculaire eſt également éloigné des extrêmités A, B de la droite AB; (*N.* 56.) donc la circonférence décrite avec le rayon OA paſſe par l'autre extrêmité B, & la droite AB eſt corde de ce cercle; or AC étant perpendiculaire ſur OA, eſt tangente; (*N.* 242.) donc l'angle CAB, eſt l'angle du petit ſegment, & cet angle eſt égal à tout angle ARB qui ſeroit dans le grand ſegment ARB; (*N.* 257.) mais l'angle CAB eſt égal à l'angle donné T, par la conſtruction; donc le ſegment ARC coupé par la droite AB, eſt capable de contenir un angle ARC égal à l'angle donné T.

261. PROBLEME. *Inſcrire un cercle dans un triangle donné* ABC (*Fig.* 160.) c'eſt-à-dire décrire un cercle qui touche les trois côtés du triangle; je diviſe les angles A, C chacun en deux également par les droites AO, CO; du point O où elles ſe coupent, j'abaiſſe ſur les trois côtés les perpendiculaires OT, OR, OS; de ce même point O pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à l'une des perpendiculaires OT; je décris un cercle TRS qui eſt le cercle demandé; ce que je prouve ainſi.

Les triangles rectangles AOT, AOR ont l'hypothénuſe AO commune; l'angle droit égal à l'angle droit, & l'angle OAT égal à l'angle OAT par la conſtruction; donc le troiſiéme angle eſt égal au troiſiéme, (*N.* 98.) & par conſéquent les deux triangles ſont parfaitement égaux; (*N.* 100.) ainſi la perpendiculaire OT eſt égale à la perpendiculaire OR; par les mêmes raiſons, les triangles rectangles COT, COS ſont parfaitement égaux, & la perpendiculaire OS eſt égale à la perpendiculaire OT, & par conſéquent à la perpendiculaire OR; ainſi la circonférence décrite avec le rayon OT paſſe par les extrémités R, S des deux autres; or les trois côtés du triangle ABC étant perpendiculaires ſur les rayons OT, OR, OS ſont tangentes du cercle; (*N.* 242.) d'où il ſuit que le cercle eſt inſcrit comme on le demandoit.

262. PROBLEME. *Autour d'un cercle, circonſcrire un triangle* ABC (Fig. 161.) *ſemblable à un triangle donné* mnr, *c'eſt-à-dire décrire un triangle* ABC *ſemblable au triangle* mnr, *& dont les trois côtés touchent le cercle.*

Je prolonge de part & d'autre le côté *mr* du triangle *mnr*; du

centre O du cercle; je mene un rayon OH, & je fais en O avec ce rayon un angle TOH égal à l'angle extérieur *nmp*, & de l'autre côté un angle VOH égal à l'autre angle extérieur *nrq* : aux points T, H, V j'éleve des perpendiculaires AB, AC, BC qui en s'entrecoupant, forment le triangle demandé ABC; ce que je prouve ainſi.

Si les deux lignes TO, OH étoient en ligne droite les perpendiculaires BA, CA ſur ces lignes, ſeroient paralelles; (*N.* 68.) donc puiſque ces deux lignes s'inclinant entr'elles, les perpendiculaires s'inclinent auſſi & doivent ſe couper en A, & on démontrera de même que les perpendiculaires BC, AC ſur les droites OV, OH qui ſont un angle, doivent ſe couper en C; cela poſé.

Le quadrilatere ATOH étant compoſé de deux triangles ATO, AHO, ſes quatre angles valent enſemble quatre angles droits, (*N.* 97.) or, les deux ATO, AHO ſont droits par la conſtruction; donc les deux autres TOH, TAH valent deux droits; mais l'angle *nmp* & ſon angle de ſuite *nmr*, valent auſſi deux droits; (*N.* 49.) donc les deux enſemble TOH, TAH ſont égaux aux deux enſemble *nmp*, *nmr*, & retranchant d'une part l'angle TOH, & de l'autre l'angle *nmp* égal à l'angle TOH par la conſtruction, il reſte l'angle TAH égal à l'angle *nmr*.

Par un ſemblable raiſonnement, on trouvera que dans le quadrialatere VOHC, l'angle VCH eſt égal à l'angle *nrm*, or, les angles *nmr*, *nrm* du triangle *nrm* valent enſemble moins de deux droits, puiſque les trois angles de ce triangle n'en valent que deux; donc les angles TAH, VCH qui ſont égaux chacun à chacun aux angles *nmr*, *nrm*, valent enſemble moins de deux droits, & par conſéquent les côtés BA, BC de ces angles ne ſont pas paralelles, (*N.* 72.) & doivent ſe couper en un point B; ainſi le triangle ABC ayant les deux angles ſur la baſe AC égaux aux deux angles ſur la baſe *mr* du triangle *nmr*; le troiſiéme eſt égal au troiſiéme, (*N.* 98.) & les deux triangles ſont ſemblables, & il eſt viſible que le triangle ABC eſt circonſcrit puiſque ſes côtés touchent le cercle (*N.* 242.).

263. PROPOSITION LXV. *Si deux cordes* AB, CD (Fig. 162.) *ſont paralelles, les arcs* AC, BD *compris entre ces deux cordes, ſont égaux.*

Je mene du centre O un diametre RS perpendiculaire ſur l'une des cordes AB, & ce diametre eſt auſſi perpendiculaire ſur l'autre

corde CD; (*N.* 68.) donc il coupe les cordes & leur arc en deux également, (*N.* 224.) & comme il coupe auſſi la circonférence en deux également, l'arc SBDR eſt égal à l'arc SACR, & retranchant d'une part l'arc SB & l'arc DR, & de l'autre l'arc SA & l'arc CR égaux chacun à chacun aux deux précédents, il reſte l'arc BD égal à l'arc AC.

264. COROLLAIRE Ier. *Si deux cordes paralelles* AB, CD (Fig. 162.) *ſont égales, les cordes* AC, DD *des arcs interceptés, ſont auſſi paralelles & égales.*

A cauſe de l'égalité des cordes AB, CD, les arcs AB, CD ſont égaux, (*N.* 251.) & parce que ces cordes ſont paralelles, le arcs compris AC, BD ſont égaux; (*N.* 263.) or, ces quatre arcs valent enſemble la circonférence entiere; donc les deux AB, BD valent enſemble la demi circonférence de même que les deux DC, CA, & partant l'angle à la circonférence ACD qui embraſſe les deux premiers AB, BD vaut la moitié de la demi-circonférence, (*N.* 252.) c'eſt-à-dire un angle droit; par la même raiſon, l'angle ABD eſt auſſi droit; donc les cordes AC, BD étant perpendiculaires chacune ſur l'une des paralelles; ſont auſſi perpendiculaires ſur l'autre, (*N.* 68.) & par conſéquent elles ſont paralelles & égales.

265. COROLLAIRE II. *Si aux extrêmités* A, C *d'une corde* AC (Fig. 163.) *on éleve deux perpendiculaires indéfinies, ces perpendiculaires couperont le cercle aux points* B, D *& leurs parties* BA, DC *compriſes dans le cercle, ſeront deux cordes paralelles & égales.*

Du centre O, je mene OH perpendiculaire ſur AC & ROS paralelle à AC; les trois lignes AB, HO, CD perpendiculaires ſur AC ſont paralelles entr'elles, (*N.* 68.) & partant les lignes RS, AC paralelles entre ces trois lignes, ſont égales & également inclinées, (*N.* 77.) c'eſt-à-dire RS égale à AC eſt perpendiculaire ſur les trois, & de plus, elle eſt diviſée en deux également en O par la droite OH qui diviſe la corde AC en deux également; (*N.* 153, 224.) or, la corde AC étant plus petite que le diametre, (*N.* 249.) ſa moitié AH eſt moindre que le rayon; donc RO ou OS égale à AH eſt moindre que le rayon, & partant les droites AB, CD qui paſſent par les extrêmités R, S des droites RO, OS, ſont dans le cercle & doivent le couper en B & D, & comme les diſtances OR, OS du centre à ces lignes, ſont égales, il s'enſuit que AB, CD ſont deux cordes paralelles & égales.

266. COROLLAIRE III. *Si l'on coupe deux cordes* AB, CD *paralelles & égales par un diametre* POX *qui leur ſoit oblique*, (Fig. 163.) *les parties inégales* BT, TA *que ce diametre coupe ſur l'une* AB, *ſont égales chacune à chacune aux parties* CV, VD *qu'il coupe ſur l'autre* CD.

Du centre O, je mene la droite RS perpendiculaire ſur les cordes AB, CD, & qui par conſéquent les coupe chacune en deux parties égales ; (*N.* 224.) ainſi à cauſe de AB = CD nous avons BR ou RA = DS ou SC, & OR = OS; (*N.* 250.) les triangles rectangles ROT, SOV, étant ſemblables à cauſe de l'angle droit ORT égal à l'angle droit OSV, de l'angle ROT égal à l'angle SOV qui lui eſt oppoſé au ſommet; & du troiſiéme angle égal par conſéquent au troiſiéme, donnent OR. OS :: TR. VS ; mais OR = OS, donc TR = VS, & ajoûtant à TR la moitié BR de la corde AB, & à VS la moitié SC de la corde CD, nous aurons BT = CV; donc à cauſe de AB = DC, nous aurons auſſi AB — BT = CD — CV ou AT = VD.

267. PROBLEME. *D'un point extérieur* R (Fig. 164.) *mener une tangente à un cercle.*

Du point R je mene au centre O la droite RO que je diviſe en deux également en T; du point T pris pour centre, & avec une ouverture de compas égal à TR ou TO; je décris un cercle qui coupe le cercle donné ABCD en deux points A, C; (*N.* 244.) du point R, je mene aux points A, C les droites RA, RC qui ſont l'une & l'autre tangentes du cercle.

Car menant le rayon OC, l'angle RCO à la circonférence du cercle RCOA, vaut la moité de l'arc ou demi circonférence OAR qu'il embraſſe, (*N.* 252.) & par conſéquent il eſt droit; donc la droite RC perpendiculaire ſur l'extrêmité du rayon OC, eſt tangente du cercle ABCD au point C, (*N.* 242.) & on prouvera de même que AR eſt tangente en A.

268. COROLLAIRE Ier. *D'un point extérieur* R, (Fig. 164.) *on ne peut mener que deux tangentes.* Toute autre ligne qu'on meneroit entre les tangentes RC, RA couperoient néceſſairement ou le rayon OC, ou le rayon OA en un point plus près du centre O, & paſſeroit dans le cercle ; & ſi on la menoit au-delà des tangentes, & il eſt clair qu'elle ne pourroit ni couper ni toucher le cercle.

269. COROLLAIRE II. *Les deux tangentes* AC, RA (Fig. 164.) *qu'on peut mener d'un même point extérieur* R, *ſont égales entr'elles.*

Les triangles rectangles ROC, ROA ont l'hypothénuſe RO commune & le côté OC égal au côté OA ; donc ils ſont parfaitement égaux, (*N.* 102.) & le côté RA eſt égal au côté RC.

270. COROLLAIRE III. *Si l'on joint par une droite* CA *les points d'attouchement* C, A (Fig. 164.) *de deux tangentes égales menées d'un même point extérieur* R, *cette droite* CA *ſera coupée en deux également & perpendiculairement par la ſecante* ROD *menée du même point* R *par le centre* O.

Les tangentes RC, RA étant égales, le point R de la ſecante RD eſt également éloigné des extrêmités AC de la droite CA, & à cauſe des rayons égaux CO, AO, le point O de la ſecante eſt auſſi également éloigné des mêmes extrêmités A, C; donc la droite ROD eſt perpendiculaire ſur CA (*N.* 58.) & la coupe en deux également.

D'où il ſuit que la ſecante RD qui paſſe par le centre, & la tangente RC menée du même point R, étant données, on peut trouver le point A où l'autre tangente touche le cercle, en menant du point C une ligne droite CA qui ſoit perpendiculaire ſur la ſecante.

271. PROPOSITION. LXVI. *Une ſecante* RD *& une tangente* RC (Fig. 165.) *étant menées d'un même point extérieur* R, *le rectangle* RA×RD *de la partie extérieure par la ſecante entiere, eſt égal au quarré de la tangente* RC.

Je mene les droites AC, CD ; les triangles RAC, RDC ont l'angle R commun ; l'angle RCA du ſegment AC égal à l'angle RDC dans le ſegment oppoſé ; (*N.* 257.) donc le troiſiéme angle eſt égal au troiſiéme, & les deux triangles ſont ſemblables ; comparant donc les côtés oppoſés aux angles égaux, nous aurons RA. RC :: RC, RD ; ainſi faiſant le produit des extrêmes & le quarré de la moyenne, nous aurons $RA \times RD = \overline{RC}^2$.

272. COROLLAIRE Ier. *Si du même point on mene au cercle tant de ſecantes qu'on voudra, tous les rectangles des ſecantes, par leurs parties extérieures, ſeront égaux* ; ces rectangles ſeront égaux chacun au quarré de la tangente ; donc, &c.

273. COROLLAIRE II. *La partie extérieure d'une ſecante, & la ſecante ſont réciproques à la partie extérieure d'une autre ſecante & à cette ſeconde ſecante.* Le rectangle de la premiere par ſa partie extérieure eſt égal au rectangle de la ſeconde par ſa partie extérieure ; donc, &c. (*N.* 185.).

274. COROLLAIRE III. *Si après avoir mené deux ſecantes d'un même point* R *on joint les points où elles coupent le cercle par les droites* CS, MT (Fig. 166.) *ou par les droites* CT MS, (Fig. 167.) *on aura dans la figure* 166 *deux triangles* CRS, MRT *dont les baſes feront avec les côtés des angles égaux chacun à chacun; mais d'un ſens oppoſé; c'eſt-à-dire l'angle fait par la baſe* CS *avec le côté* RS, *eſt égal à l'angle fait par la baſe* TM *avec le côté* RM, *& l'angle fait avec le côté* RC *par la baſe* CS, *eſt égal à l'angle fait par la baſe* MT *avec l'autre côté* RT, *& les mêmes choſes arriveront dans la figure* 167.

Dans la figure 166, l'angle R eſt commun aux deux triangles RCS, RMT, & l'angle RSC fait par la corde CS, & le prolongement RS de la corde ST vaut la moité des arcs CS, ST ou de l'arc CT, (*N.* 256.) de même que l'angle à la circonférence CMT; (*N.* 252.) donc le troiſiéme angle de l'un eſt égal au troiſiéme angle de l'autre, c'eſt-à-dire l'angle RCS égal à l'angle RTM.

Dans la figure 167, les deux triangles RCT, RSM ont l'angle commun R; l'angle RTC a la circonférence égale à l'angle RMS, auſſi à la circonférence, & qui embraſſe le même arc CS; (*N* 252.) donc le troiſiéme RCT eſt égal au troiſiéme RSM.

Nota. Que ſi du point C (*Fig.* 165.) où une tangente RC touche un cercle, on mene deux droites CA, CD aux points A, D où une ſecante RD qui part du même point R, coupe le cercle, on aura auſſi deux triangles RAC, RDC, dont les baſes AC, CD feront avec les côtés des angles égaux chacun à chacun, mais d'un ſens différent; car l'angle R eſt commun; l'angle RCA étant angle du ſegment CA vaut la moitié de l'arc CA, (*N.* 253.) de même que l'angle ADC ou RDC qui eſt à la circonférence; (*N.* 252.) donc le troiſiéme RAC eſt égal au troiſiéme RCD.

275. *REMARQUE.* Lorſqu'un angle eſt coupé par deux baſes qui font avec les côtés des angles égaux chacun à chacun, mais d'un ſens oppoſé, ces baſes ſont dites *Antiparalelles*, par quelques Auteurs; elles peuvent avoir trois différentes diſpoſitions, car dans la Figure 166, les baſes CS, MT ne ſe coupent point entre les côtés de l'angle MRT; dans la Figure 167, les baſes CT, SM ſe coupent entre les côtés MR, RT, & dans la Figure 165, les baſes CA, CD partent d'un même point du côté RC.

Dans les diſpoſitions des Figures 166, 167, le rectangle de la partie RC par le côté entier RM eſt égal au rectangle de la partie RS par le côté entier RT, car comparant les côtés homologues des triangles ſemblables RCS, RMT de la Figure 166, ou des triangles ſemblables RCT, RSM de la Figure 167, on aura RS, RC :: RM, RT; donc RS × RT = RC × RM.

Dans la diſpoſition de la Figure 165, le rectangle de la partie RA par le côté entier RD eſt égal au quarré de l'autre côté RC, car la comparaiſon des côtés homologues des triangles ſemblables RAC, RCD, donne RA, RC :: RC, RD, & partant RA × RD = $\overline{RC}^2$. On ſe ſert des baſes antiparalelles pour reſoudre les Problêmes ſuivans.

276. PROBLEME. *Couper deux lignes inégales données* RM, RT (Fig. 168.) *chacune en deux parties, de façon que le produit de la ligne* RM *par l'une de ſes parties ſoit égal au produit de la ligne* RT, *par l'une de ces parties.*

Je fais un angle quelconque dont les lignes RM, RT ſoient les côtés; je mene la ligne MT, & au ſommet T du plus grand des deux angles M, RTM; je fais avec RT un angle RTM égal à l'angle RMT. D'un point quelconque S pris ſur RT, je mene une droite SC paralelle à TH, & qui coupe RM en C. Les lignes RM, RT ſont coupées en C & S, comme on le demandoit. Ce que je prouve ainſi.

A cauſe que les côtés RM, RT du triangle RMT ſont inégaux, l'angle RTM oppoſé au plus grand côté RM eſt plus grand que l'angle RTM oppoſé à l'autre côté RT. Ainſi on peut toujours retrancher de l'angle RTM un angle RTH égal à l'angle RMT par une droite TH qui coupera RM entre ſes extrêmités R, M, & à plus forte raiſon la droite SC paralelle à TH coupera la même RM entre R & M. Cela poſé.

Les angles CSR, HTR faits par les paralelles CS, HT du même côté avec la droite RT ſont égaux (*N.* 71.); or, par la conſtruction l'angle HTR eſt égal à l'angle RMT; donc l'angle CSR du triangle RCS eſt égal à l'angle RMT du triangle RMT, mais ces deux triangles ont auſſi l'angle R commun; donc le troiſiéme angle RCS eſt égal au troiſiéme angle RTM, & par conſéquent les baſes CS, MT étant antiparalelles, nous avons RC × RM = RS × RT (*N.* 275.) ou RC, RM, réciproques à RS, RT.

Ce Problême eſt indéterminé & ſuſceptible d'une infinité de ſolutions, car il eſt libre de mener la paralelle SC de tel point S qu'on voudra de la droite RT, ce qui par conſéquent peut faire que les lignes RM, RT ſoient diviſées d'une infinité de façons différentes chacune en deux parties.

277. PROBLEME. *Une ligne* RM (Fig. 169.) *étant diviſée en deux parties inégales* RC, CM, *trouver une autre ligne auſſi diviſée en deux parties inégales, de façon que le rectangle de la partie* RC *par là toute* RM *ſoit égal au rectangle de l'une des parties de la ligne demandée par toute cette ligne.*

Je décris ſur la partie CM de la ligne RC un triangle iſoſcele quelconque COM; c'eſt-à-dire des points C, M pris pour centres & avec une ouverture de compas, telle que je veux, pourvû qu'elle ſoit plus grande que la moitié de CM, je décris deux arcs qui ſe coupent en un ſeul point O du même côté (*N.* 59.), du point O pris pour centre, & avec le rayon OC ou OM, je décris un cercle, & toutes les ſecantes RX, RT, &c. menées du point R au cercle reſoudront le Problême, car le rectangle de chacune d'elles par ſa partie extérieure ſera toujours égal au rectangle RC × RM (*N.* 271.).

Ce Problême eſt indéterminé non ſeulement, parce qu'on peut mener une infinité de ſecantes au cercle du rayon OC, mais parce que ce rayon OC pouvant être de telle grandeur qu'on voudra, pourvû qu'il ſoit plus grand que la moitié de CM, on peut décrire une infinité de cercles différens, dans leſquels RM ſera toujours ſecante, & dans leſquels auſſi on pourra mener du point R une infinité de ſecantes, qui toutes ſatisferont à la queſtion.

278. PROBLEME. *Deux lignes inégales* RM, RT (Fig. 168.) *étant données, & dont l'une* RM *eſt diviſée en deux parties* RC, CM, *couper l'autre* RT *en deux parties, de façon que le rectangle de l'une de ſes parties par la toute* RT *ſoit égal au rectangle de la partie* RC *par la toute* RM.

Je fais un angle quelconque à volonté, dont les côtés RM, RT ſoient égaux aux deux lignes données; je mene la baſe MT, & au point C je fais avec RC un angle égal à l'angle RTM, ſi la jambe CS de cet angle coupe RT en un point S entre ſes extrêmités R, T, le Problême eſt reſolu; mais ſi cette jambe paſſe par l'extrêmité T de RT ou qu'elle coupe RT prolongée au-delà de T en X, le Problême eſt impoſſible. Ce que je prouve ainſi.

Si

Si le point S eſt entre R & T, les triangles RCS, RMT ayant l'angle R commun, & l'angle RCS égal à l'angle RTM par la conſtruction, le troiſiéme angle RSC eſt égal au troiſiéme RMT, & les baſes SC, TM érant anti-paralelles, nous avons RC, RS :: RT, RM, donc RC × RM = RS × RT.

Si l'angle RCT eſt égal à l'angle RTM, les deux triangles RCT, RTM auront leurs baſes TC, TM anti-paralelles, & partant RC×RM = $\overline{RT}^2$. or comme toute partie de RT eſt moindre que RT, & que par conſéquent le rectangle de RT par l'une de ces parties ſera toujours moindre que RT × RT ou $\overline{RT}^2$; il eſt clair qu'on ne peut pas diviſer RT comme on le demande.

Enfin, ſi l'angle RCX eſt égal à l'angle RTM, les triangles RCX, RTM auront les baſes anti-paralelles, & partant RC×RM = RT × RX; or, à cauſe de RX plus grand que RT, nous aurons RT × RX plus grand que RT × RT ou $\overline{RT}^2$, & par conſéquent le Problême eſt encore impoſſible.

Au reſte, dans le cas où le Problême eſt poſſible, il n'y a qu'une ſeule ſolution, c'eſt-à-dire la partie RS de la droite RT ne peut être ni plus grande ni moindre, car le produit de RT par une partie plus grande que RS ſera plus grand que le produit RT × RS = RC × RM, & le produit de RT par une partie moindre que RS ſera plus petit que RT × RS = RC × RM. Ce Problême a été reſolu d'une autre façon ci-deſſus (*N.* 187.).

279. PROPOSITION LXVII. *Si deux cordes* AB, CD *d'un même cercle* (Fig. 171.) *ſe coupent, elles ſe coupent en parties réciproques, c'eſt-à-dire le rectangle* AH × HB *des parties* AH, HB *de l'une, eſt égal au rectangle* DH × HC *des parties de l'autre.*

Je joints les extrêmités des cordes par les droites AD, CB, les triangles AHD, CHB, ont l'angle AHD égal à l'angle CHB qui lui eſt oppoſé au ſommet, & l'angle à la circonférence DAH ou DAB égal à l'angle à la circonférence BCH ou BCD (*N.* 252.); donc le troiſiéme angle eſt égal au troiſiéme, & les deux triangles ſont ſemblables, ainſi comparant les côtés homologues, nous aurons AH, HD :: HC, HB, & par conſéquent nous aurons auſſi AH × HB = HD × HC.

280. PROBLEME. *Trouver à deux lignes* AH, HB (Fig. 171.) *deux autres lignes qui leur ſoient réciproques.*

Je décris un cercle avec un rayon à volonté, égal ou plus,

grand que la moitié des deux lignes AH, AB, dont je fais une ſeule ligne droite AB. Je prens avec le compas la grandeur de la ligne AB, & je la porte ſur la circonférence du cercle de A en B, du point H, je mene une corde CHD comme je veux, & les deux parties CH, HD de cette corde ſont les lignes demandées. Ce que je prouve ainſi.

A cauſe que le rayon du cercle eſt ou égal ou plus grand que la moitié de la ſomme AB des droites AH, HB, cette ſomme AB pourra toujours être contenue dans la circonférence, & ſera ou diamétre ou corde, & comme les deux cordes AB, CD ſe couperont, nous aurons AH × HB = DH × HC (*N.* 279.). Donc, &c.

Ce Problême eſt ſuſceptible d'une infinité de ſolutions, non-ſeulement à cauſe qu'on peut mener du point H une infinité de cordes au cercle, leſquelles ſatisferont toutes à la queſtion ; mais encore parce qu'on peut décrire une infinité de cercles différens, dans leſquels AB peut être contenue, & dans leſquels on pourra mener du point H une infinité de différentes cordes.

Mais ſi on donnoit les deux droites AH, HB, & la ſomme DC des deux autres, ou ce qui revient au même, ſi on donnoit la droite AB, & la droite DC, & qu'on propoſât de couper DC en parties réciproques aux parties AH, HB de AB, le Problême ſeroit abſolument déterminé, comme nous l'avons fait ci-deſſus (*N.* 187, 278.) où nous en avons donné la ſolution

281. PROPOSITION LXVIII. *Deux cordes* AB, CD *d'un même cercle* (N. 171.) *ne peuvent pas ſe couper toutes les deux en deux parties égales.*

Si cela étoit, la droite menée du centre A au point H, ſeroit perpendiculaire ſur la corde AB, puiſqu'elle ſeroit coupée en deux également (*N.* 224.), & par la même raiſon elle ſeroit perpendiculaire ſur la corde CD ; donc une même ligne AH ſeroit perpendiculaire ſur deux lignes AB, CD qui ſe coupent, ce qui eſt impoſſible (*N.* 57.).

282. PROPOSITION LXIX. *Dans tout quadrilatere formé par quatre cordes d'un même cercle, ſi l'on mene les deux diagonales la ſomme des rectangles des côtés oppoſés eſt égale au rectangle des deux diagonales.*

Cette propoſition contient pluſieurs cas que nous allons démontrer en particulier.

En premier lieu, ſi les quatre cordes forment un quarré ABCD (*Fig.* 174.), l'angle à la circonférence ABC étant droit, embraſſe

la demi-circonférence, & par conſéquent la diagonale AC eſt un diamétre. Par la même raiſon la diagonale DB eſt auſſi un diamétre, & ces deux diagonales égales ſe coupent au centre O, & diviſent le quarré en quatre triangles rectangles iſoſceles & égaux. Or, le triangle rectangle DOC étant ſemblable au triangle rectangle ABC à cauſe que celui-ci eſt auſſi iſoſcele, nous avons DO, DC :: AB, AC; donc DO × AC = DC × AB. De même les triangles ſemblables BOC, DAC donnent BO, BC :: DA, AC, donc BO × AC = BC × DA, & ajoutant les membres de cette équation aux membres de la précédente chacun à chacun, nous aurons DO × AC + BO × AC = DC × AB + BC × DA; mais DO × AC + BO × AC eſt la même choſe que DO + BO ou DB multiplié par AC, donc DB × AC = DC × AB + BC × DA.

En ſecond lieu, ſi les quatre cordes forment un rectangle ABCD (*Fig.* 173.), la corde BC ſera donc plus grande que la corde AB, car autrement la figure ſeroit un quarré, & l'arc BC ſera plus grand que l'arc AB; donc l'angle à la circonférence BDC ſera plus grand que l'angle à la circonférence BDA. Je fais en D avec la corde DC un angle CDE égal à l'angle BDA, & ajoutant de part & d'autre le petit angle EDB, j'ai l'angle CDB égal à l'angle EDA. Les triangles ADE, BDC ſont ſemblables à cauſe de l'angle à la circonférence DAC égal à l'angle à la circonférence DBC, puiſqu'ils embraſſent le même arc DC, & de l'angle ADE égal à l'angle BDC par la conſtruction. Donc AE, AD :: BC, BD, & partant AE × BD = AD × BC; de même les triangles EDC, BAD ſont ſemblables à cauſe de l'angle EDC égal à l'angle BDA par la conſtruction, & de l'angle à la circonférence DCE ou DCA égal à l'angle à la circonférence ABD, car ces angles embraſſent le même arc AD. Donc EC, DC :: AB, BD, ce qui donne EC × BD = DC × AB, & ajoutant les membres de cette équation à ceux de la précédente, nous aurons AE × BD + EC × BD = AD × BC + DC × AB, c'eſt-à-dire, AC × BD = AD × BC + DC × AB.

En troiſiéme lieu, les quatre cordes ne peuvent pas former un paralellogramme, car les deux grands arcs ſoutenus par les deux grands côtés paralelles ſeroient égaux, & les deux petits arcs ſoutenus par les deux petits côtés paralelles ſeroient auſſi égaux, & comme ces quatre arcs compoſeroient la circonférence, la ſomme d'un grand & d'un petit vaudroit la demi-conférence, &

par conſéquent l'angle à la circonférence fait par un grand côté & un petit embraſſeroit la demi-circonférence & ſeroit droit, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

En quatriéme lieu, ſi les cordes forment un trapezoïde ABCD (*Fig.* 175.), il n'arrivera jamais que les quatre angles ſoient diviſés en deux également par les diagonales, car ſi les angles DAC, CAB étoient égaux, les arcs CD, CB ſeroient égaux entr'eux, & à l'arc DA égal à l'arc CB à cauſe des paralelles CD, BA (*N.* 263.), & ſi outre cela les angles CDB, BDA étoient égaux l'arc CB ſeroit égal à l'arc BA, & par conſéquent les quatre arcs ſeroient égaux, & la figure ſeroit un quarré. Cela poſé, ſuppoſons que l'angle BDA ſoit plus grand que l'angle CDB, je fais en D avec le côté AD un angle ADE égal à l'angle CDB, & ajoutant de part & d'autre le petit angle EDB, j'ai l'angle CDE égal à l'angle ADB; ainſi les triangles ADE, CDB ſemblables à cauſe de l'angle ADE égal à l'angle CDB, & de l'angle EAD égal à l'angle CBD, donnent AE, AD :: BC, BD, d'où l'on tire $AE \times BD = AD \times BC$; or, les triangles CDE, DBA ſemblables à cauſe de l'angle CDE égal à l'angle BDA, & de l'angle ECD égal à l'angle DBA, donnent CE, CD :: BA, BD, d'où je tire $CE \times BD = CD \times BA$, & partant nous aurons comme ci-deſſus $AE \times BD + CE \times BD = AD \times BC + CD \times BA$, c'eſt-à-dire $AC \times BD = AD \times BC + CD \times BA$.

Enfin, ſi les quatre cordes forment un trapeze ABCD (*Fig.* 172.) on démontrera encore plus aiſément que dans le cas précédent que les quatre angles ne peuvent pas être diviſés par les diagonales chacun en deux également, & par conſéquent faiſant la même conſtruction, on trouvera encore $AC \times BD = AD \times BC + CD \times BA$.

283. PROPOSITION LXX. *Si d'un point quelconque* R *d'une circonférence* (Fig. 176.) *on abaiſſe une perpendiculaire* RM *ſur un diamétre* AB, *le quarré de cette perpendiculaire eſt égal au rectangle des parties* AM, MB *du diamétre qu'elle coupe.*

Des extrêmités A, B du diamétre AB, je mene les cordes AR, BR; l'angle à la circonférence ARB vaut la moitié de la demi-circonférence qu'il embraſſe (*N.* 252.), & par conſéquent eſt droit; donc le triangle ARB eſt rectangle; or, la droite RM eſt menée perpendiculairement du ſommet R de l'angle droit ſur l'hypothenuſe; donc cette perpendiculaire eſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens AM, MB de l'hypothenuſe (*N.* 169.); ainſi

nous avons AM, MR :: MR, MB; ce qui donne AM × MB $= \overline{MR}^2$.

284. COROLLAIRE II. *Le quarré de la même perpendiculaire* RM *eſt égal au quarré du rayon* OA *moins le quarré de la partie* OM *interceptée entre le centre* O *& le point* M.

Le diamétre AB étant diviſé en deux également en O & en deux inégalement en M, nous avons $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$ (*N.* 146.); or, $AM \times MB = \overline{MR}^2$ (*N.* 283.); donc $\overline{MR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$.

285. COROLLAIRE III. *La corde* AR *eſt moyenne proportionnelle entre le ſegment* AM *du diamétre & le diamétre, & l'autre corde* RB *eſt moyenne proportionnelle entre le ſegment* BM, *& le diamétre.* Le triangle ARC eſt rectangle, & la droite RM eſt menée du ſommet de l'angle droit ſur l'hypothenuſe AB. Donc, &c. (*N.* 170.).

COROLLAIRE IV. *On peut donc au moyen de ceci trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, de deux façons différentes de celle que nous avons enſeignée ci-deſſus* (N. 182.).

Par exemple, ſi l'on demande une moyenne proportionnelle entre les deux lignes AM, MB, je les ajoute l'une à l'autre en ligne droite, je coupe la ſomme AB en deux également en O; du pont O pris pour centre, & avec le rayon OA ou OB je décris un demi-cercle ORB, & élevant en M la perpendiculaire MR, cette perpendiculaire eſt la moyenne proportionnelle demandée (*N.* 283.).

Que ſi l'on demande une moyenne proportionnelle entre AB & ſa partie AM, je décris un demi-cercle ARB ſur la grande AB priſe pour diamétre; du point M, j'éleve la perpendiculaire MR & la corde AR, eſt la moyenne demandée (*N.* 285.).

286. PROPOSITION LXXI. *Les circonférences de cercles concentriques* ABC, *efh* (Fig. 177.) *ſont paralelles.*

De tous les points de la circonférence *efh*, je conçois des lignes menées au centre O, & prolongées juſqu'à la circonférence ABC, les diſtances des points *e*, *f* &c. de la circonférence *efh* à la circonférence ABC ſeront donc les droites A*e*, B*f* (*N.* 234.); or, ces droites ſont égales, puiſqu'elles ſont les différences des rayons égaux AO, BO, &c. aux rayons égaux *e*O, *f*O du petit cercle. Donc tous les points de la petite circonférence ſont éga-

lement éloignés de la grande, & partant ces deux circonférences ſont paralelles.

287. PROPOSITION LXXII. *Tous les cercles ſont ſemblables entr'eux.*

Soient les deux cercles ABC, EFH (*Fig.* 177.), je les rends concentriques, c'eſt-à-dire du centre O du grand, & avec un rayon O*e* égal au rayon OE, je décris une circonférence *efh*, & le cercle *efh* eſt par conſéquent le même que le cercle EFH, ainſi il s'agit de faire voir que les deux cercles concentriques ABC, *efh*, ſont ſemblables entr'eux.

Je conçois que la circonférence ABC ſoit diviſée en une infinité de petits arcs égaux, tels que AB, & menant des points de diviſion A, B, &c. des rayons au centre, ces rayons coupent la circonférence *efh* en un même nombre de petits arcs tous égaux entr'eux, tels que *ef*; je mene les cordes des arcs dans l'un & l'autre cercle, & à cauſe des égalités des arcs, les cordes du premier cercle ſont toutes égales entr'elles, de même que les cordes du ſecond, ce qui fait que dans le grand cercle tous les petits triangles iſoſceles AOB, &c. faits par les rayons & les cordes ſont tous égaux entr'eux (*N.* 100.); de même que les petits triangles *eOf*, &c. faits par les rayons, & les cordes du petit, & que chaque triangle AOB du grand eſt ſemblable à chaque triangle *eOf* du petit à cauſe de l'angle commun O, & des baſes paralelles AB, *ef*; ainſi nous avons dans les deux cercles deux polygones réguliers d'un même nombre infini de côtés, & partant ſemblables entr'eux; mais à cauſe de l'infinie petiteſſe des arcs AB, &c. du grand cercle, les cordes de ces arcs en ſont infiniment proches, & ſe confondent avec eux, de façon que l'on peut prendre les cordes pour les arcs, & il en eſt de même à l'égard du petit cercle; donc nous pouvons prendre les polygones pour les cercles mêmes. Or, dans les polygones ſemblables, les circuits ſont entr'eux comme les rayons (*N.* 165.); donc les circonférences ABC, *efh* qui ſont ici les mêmes que les circuits des polygones ſont entr'elles comme les rayons AO, *eo*, & par conſéquent les cercles ſont ſemblables, & ainſi des autres.

288. COROLLAIRE Ier. *Si l'on mene des tangentes* MN, RS (Fig. 177.) *à deux ou pluſieurs cercles inégaux, les points d'attouchement* A, e *ſont proportionnels aux circonférences ou aux rayons.*

Les côtés des polygones ſemblables d'un nombre infini de côtés qui compoſent les deux cercles, ſont infiniment petits,

donc chacun de ces côtés ou chaque arc eſt un point de ſa circonférence. Or, les côtés des polygones ſemblables ſont entr'eux comme leurs circuits ou comme leurs rayons ; donc les points A, *e* des circonférences ſont auſſi entr'eux comme leurs rayons.

Nota. On ne pourroit concevoir ceci, ſi l'on diſoit comme Euclide, que les lignes n'ont point de largeur ; mais dès-lors que nous leurs en donnons une, quelque petite qu'elle ſoit, on s'apperçoit que les points des lignes menées de tous les points de la grande circonférence au centre, anticipent ſur les points des lignes voiſines de plus en plus à meſure qu'elles approchent du centre, & que par conſéquent eu égard à ces anticipations, les points dans leſquels une petite circonférence eſt coupée, ſeront plus petits.

289. COROLLAIRE II. *Les ſegmens donc les arcs comprennent un même nombre de degrés de leurs circonferences ſont ſemblables entr'eux, & il faut dire la même choſe des ſecteurs.*

Soient les ſegmens ABC, *abc* (*Fig.* 178.) dont le centre commun eſt au point O. Il eſt clair que les arcs ABC, *abc* ſeront entr'eux comme leurs circonférences ou comme leurs rayons, (*N.* 287.) puiſqu'ils contiennent un même nombre de degrés de leurs circonférences. Or, les triangles ACO, *ac*O ayant l'angle O commun & les baſes paralelles ſont ſemblables, & donnent AC, *ac* :: AO, *a*O ; donc les cordes AC, *ac* ſont entr'elles comme les arcs ABC, *abc*, & par conſéquent les lignes qui comprennent les ſegmens ſont proportionnelles ; il ne reſte donc plus qu'à faire voir que les angles faits par ces lignes, c'eſt-à-dire les angles mixtilignes faits par les cordes avec les arcs, ſont égaux. Et pour cela :

Concevons que l'arc ABC ſoit diviſé en une infinité de petits arcs tous égaux, & que des points de diviſion ſoient menés au centre des rayons qui diviſeront l'arc *abc* en un même nombre d'arcs égaux, qui vaudront chacun autant par rapport à leurs circonférences, que chaque petit arc de l'arc ABC par rapport à la ſienne. Concevons encore que des points A, *a* ſoient menés des droites AH, AR, AB, &c. *ah*, *ar*, *ab*, &c. tous les angles que ces lignes feront entr'elles, & qui auront leurs ſommets aux circonférences aux points A, *a*, ſeront égaux, puiſqu'ils embraſſent des arcs de même valeur. Ainſi, tous les angles CAH, HAR, &c. compris dans le ſegment ABC, ſeront égaux à tous

les angles *cah*, *har*, &c. compris dans le ſegment *abc*; mais tous les angles CAH, HAR, &c. compoſent enſemble l'angle mixtiligne CAB, & tous les angles *cah*, *har*, &c. compoſent l'angle mixtiligne *cab*; donc l'angle mixtiligne CAB, eſt égal à l'angle mixtiligne *cab*; & on prouvera la même choſe des autres angles mixtilignes ACB, *acb*; d'où il ſuit que les ſegmens ABC, *abc*, ayant les côtés proportionnels & les angles égaux ſont ſemblables.

Dans les triangles ſemblables AOC, *a*O*c* l'angle OAC eſt égal à l'angle O*ac*, ajoutant donc l'angle OAC à l'angle mixtiligne CAB, & l'angle O*ac* à l'angle mixtiligne *cab*, l'angle mixtiligne OAB du ſecteur OAC ſera égal à l'angle mixtiligne O*ab* du ſecteur O*ac*, & par la même raiſon l'autre angle OCB mixtiligne eſt égal à l'angle mixtiligne O*cb*; or, les arcs & les rayons de ces ſecteurs ſont proportionnels. Donc ces ſecteurs ſont ſemblables.

290. COROLLAIRE IV. *Si on mene deux tangentes* MN, mn *à deux cercles inégaux* (Fig. 179.), *les angles mixtilignes* NAB, nab *faits par les tangentes, & les circonférences ſont égaux.*

Je mene des points d'attouchement A, *a*, les diamétres AB, *ab*; les angles BAN, *ban* ſont droits (*N.* 240.), & partant égaux. Or, les demi-cercles ATB, *atb* étant des ſegmens ſemblables (*N.* 289.), les angles mixtilignes BAT, *bat* ſont égaux; donc retranchant de l'angle BAN l'angle BAT, & de l'angle *ban*, l'angle *bat*, il reſte l'angle NAT égal à l'angle *nat*.

291. COROLLAIRE V. *Donc ſi pluſieurs cercles inégaux touchent une même ligne* MN (Fig. 180.) *en un point* A, *tous les angles mixtilignes faits par cette tangente avec les circonferences, ſont égaux entr'eux.*

Puiſque les cercles touchent la même ligne MN au point A, la même perpendiculaire AS élevée ſur le point A, paſſera par tous les centres (*N.* 242.), & coupera tous les cercles en deux parties égales. Ainſi on démontrera la même choſe que dans le Corollaire précédent.

Nota. Ceci ſeroit impoſſible ſi les cercles touchoient la droite MN dans une égale partie. Mais comme les points des plus grands cercles ſont plus grands que les points des petits; il arrive que les circonférences des grands cercles n'abandonnent pas ſi vîte la droite MN que les petites, & que par conſéquent les angles mixtilignes qu'elles font avec la tangente, ſont un peu à côté les uns

uns des autres, ce qui eſt aiſé de concevoir par la ſeule inſpection de la Figure 181, qui repréſente pluſieurs polygones réguliers ſemblables mais inégaux, qui touchent une même droite.

Et il ne faut pas dire qu'il s'enſuivra delà qu'un cercle peut toucher une ligne droite en plus d'un point, car quoiqu'un plus grand cercle touche une ligne droite en une partie plus grande que ne fait un petit cercle, cependant ce grand cercle ne touche que par un de ſes points, de même que le petit ne touche que par un des ſiens.

On peut encore expliquer ceci de cette façon : Concevons que pluſieurs polygones réguliers ſemblables mais inégaux, ayent tous un même angle commun A (*Fig.* 182.), & qu'à l'extrémité de la ligne AB qui diviſe cet angle en deux également, & qui paſſe par leurs centres, on éleve une perpendiculaire MN, il eſt viſible que cette perpendiculaire touchera tous les polygones, & que les angles qu'elle fera avec eux ſeront tous égaux ; or, cela arrivera à l'égard de tous les polygones ſemblables, quelque grand ou petit que ſoit leur nombre de côtés ; donc cela doit arriver auſſi à l'égard des cercles.

Et cette ſeconde explication reſout facilement une difficulté qu'on pourroit former, car puiſque tous les angles mixtilignes intérieurs des demi-cercles, qui touchent en A la droite MN (*Fig.* 180.) ſont égaux ; il s'enſuit néceſſairement, dira-t-on, que les angles curvilignes que les circonférences font en A, doivent être nuls, & cela eſt vrai ; car on voit dans la Figure 182, que les circuits des polygones ne font point d'angles entr'eux au point A, quoiqu'ils en faſſent après, à cauſe que les jambes de l'angle fait en A, changent enſuite de direction, & il en eſt de même à l'égard des cercles.

L'angle mixtiligne fait par la tangente & les circonférences, eſt nul au point A (*Fig.* 180.), car tous les petits côtés par leſquels les cercles touchent la droite MN, tombent les uns ſur les autres au point A, & ne font enſuite d'angles que parce qu'ils viennent à changer de direction, la Figure 181, fait voir cela clairement. D'ailleurs, on peut confirmer cette vérité par le raiſonnement ſuivant. Entre la perpendiculaire AS & la tangente, on ne peut mener de ligne droite du point A qui ne coupe toutes les circonférences, car autrement du même point A, on pourroit mener deux tangentes, ce qui eſt impoſſible (*N.* 241.). Or, on peut pourtant faire au point A avec AN une infinité d'an-

gles de plus petits en plus petits à l'infini, juſqu'à faire évanouir totalement l'angle, & il eſt clair que le plus petit de ces angles ſeroit encore plus grand que l'angle mixtiligne, puiſqu'il couperoit les circonférences; donc l'angle mixtiligne en A doit être plus petit que tout ce qu'il y a de plus petit, & par conſéquent il doit être nul.

Proprietés du Cercle, utiles pour l'intelligence des Sections Coniques.

292. PROPOSITION LXXIII. *Deux tangentes* AB, AC (*Fig.* 183.) *étant menées d'un même point extérieur* A, *avec la ſecante* AD *qui paſſe par le centre* O, *& la droite* CB *qui joint les points d'attouchement; je dis qu'on aura toujours* OR. OS :: OS. OA, *c'eſt-à-dire la diſtance du centre* O *au point* R, *ou la droite* CB *coupe la ſecante* AD, *eſt au rayon, comme le rayon eſt à la diſtance* OA *du centre* O *au point extérieur* A.

Du centre O au point d'attouchement, je mene le rayon OB; l'angle OBA étant droit (*N.* 240.), le triangle OBA eſt rectangle, & à cauſe que BC, coupe la ſecante AD perpendiculairement (*N.* 270.), la droite BR eſt une perpendiculaire menée du ſommet A de l'angle droit ſur l'hypothenuſe AO; donc le côté OB du triangle rectangle OBA, eſt moyen proportionnel entre le petit ſegment RO, & l'hypothenuſe entiere (*N.* 170.); & par conſéquent nous avons OR. OB :: OB. OA; mais le rayon OB eſt égal au rayon OS, donc OR. OS :: OS. OA.

293. *REMARQUE.* Comme la perpendiculaire menée du point d'attouchement ſur la ſecante AD qui paſſe par le centre, paſſe par l'autre point d'attouchement C de l'autre tangente; dans la ſuite, je ne mettrai qu'une tangente dans les Figures, & au lieu de dire *deux tangentes étant menées avec la ſecante, &c. & la ligne qui joint les points d'attouchement, je dirai pour abreger la tangente* AB, *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre, & la perpendiculaire* BR *étant données*, &c.

294. PROPOSITION LXXIV. *La tangente* AB, *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre & la perpendiculaire* BR *étant données, on aura toujours* AS. AR :: AO. AD.

Je mene le rayon OB, & à cauſe que dans le triangle rectangle OBA la droite BR menée de l'angle droit, eſt perpendiculaire ſur l'hypothénuſe AO; le côté AB eſt moyen proportionnel

entre le ſegment AR de l'hypothénuſe, & l'hypothénuſe entiere AO; ainſi AR. AB :: AB. AO, ce qui donne $\overline{AB}^2 = AR \times AO$; mais par la propriété de la ſecante nous avons $\overline{AB}^2 = AS \times AD$; (*N.* 271.) donc $AS \times AD = AR \times AO$; ce qui donne AS. AR :: AO. AD.

295. PROPOSITION LXXV. *Suppoſant toujours la tangente* AB (Fig. 184.), *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre, & la perpendiculaire* BR *données; je dis,* 1°. *Que ſi aux extrêmités* S, D *& au centre* O *du diametre, on éleve trois perpendiculaires* SH, OM, DN *qui ſe terminent ſur la tangente* AB *prolongée aux points* H, M, N, *les quatre lignes* SH, RB, OM, DN *ſont en proportion.* 2°. *Que le rectangle des deux perpendiculaires ou tangentes* SH, DN *eſt égal au quarré du rayon.*

Les quatre lignes SH, RB, OM, DN étant perpendiculaires ſur la ſecante AD ſont paralelles entr'elles, & par conſéquent les triangles ASH, ARB, AOM, ADN qui ont l'angle A commun & les baſes paralelles, ſont ſemblables entr'eux, & leurs baſes ſont entr'elles comme leurs côtés AS, AR, AO, AD; mais par la propoſition précédente nous avons AS. AR :: AO. AD; donc SH. RB :: OM. DN : ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Du point B, j'abaiſſe BP perpendiculaire ſur MO que je prolonge de l'autre côté en V. La droite MV eſt une ſecante qui paſſe par le centre; la droite MB eſt une tangente menée du même point M, & la droite BP eſt une perpendiculaire menée du point d'attouchement; donc nous avons OP. OE :: OE. OM; mais à cauſe des paralelles nous avons OP = RB; donc RB. OE :: OE. OM, & partant $RB \times OM = \overline{OE}^2$; mais nous venons de trouver SH. RB :: OM. DN, ce qui donne $RB \times OM = SH \times DN$ donc; $SH \times DN = \overline{OE}^2$.

296. PROPOSITION LXXVI. *Suppoſant encore la tangente* AB (Fig. 185. 186.) *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre & la perpendiculaire* BR *données; je dis que la ſecante* AD *& toutes les autres ſecantes qu'on peut mener du même point* A, *ſont toutes diviſées harmoniquement en trois parties par la circonférence & la droite* BR; *c'eſt-à-dire que dans chaque ſecante, la partie extérieure eſt à ſa petite partie intérieure, comme la ſecante entiere eſt à l'autre partie intérieure.*

Des extrémités S, D du diametre, je mene des tangentes SH,

DN (*Fig.* 186.) qui ſe terminent ſur la tangente AB prolongée en N; ainſi, à cauſe que ces tangentes ſont paralelles entr'elles, puiſqu'elles ſont perpendiculaires ſur le diametre; les triangles ASH, ADN ſont ſemblables, & donnent AH. SH :: AN. DN; mais les tangentes SH, HB, étant menées d'un même point, ſont égales de même que les tangentes DN, BN; mettant donc dans la proportion que nous venons de trouver, la droite HB au lieu de ſon égale SH, & la droite BN au lieu de ſon égale DN, nous aurons AH. HB :: AN. BN : or, à cauſe des paralelles SH, RB, DN, la droite AD eſt diviſée par ces paralelles en même raiſon que la droite AD; donc AS. SR :: AD. RD; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Maintenant, prenons une ſecante AV (*Fig.* 185.) qui ne paſſe pas par le centre, cette ſecante ſera coupée en quelque point L par la perpendiculaire BRH, & il s'agit de prouver que AP. PL :: AV. LV, & que par conſéquent AV eſt coupée en trois parties harmoniquement, & pour cela je décris ſur la partie intérieure VP priſe pour diametre, un cercle VTPQ; du point L je mene une corde TQ perpendiculaire ſur ce diametre, & du point T je mene au point A la droite TA; ſi je fais voir que TA eſt tangente du cercle TPQV, il eſt clair que la droite AV étant une ſecante qui paſſe par le centre de ce cercle, & la droite TL étant perpendiculaire menée du point d'attouchement T, nous aurons, comme nous venons de voir dans le premier cas AP, PL, AV. LV : venons donc à la démonſtration.

Dans le triangle rectangle ALR nous avons $\overline{AL}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2$ (*N.* 71.), & le triangle rectangle ATL donne $\overline{AT}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{TL}^2$ mettant donc dans cette derniere équation la valeur de $\overline{AL}^2$ nous aurons $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2 + \overline{TL}^2$; or, à cauſe que TL eſt perpendiculaire ſur le diametre VP, nous avons $\overline{TL}^2 = VL \times LP$ (*N.* 283.), & parce que VP, HB ſont deux cordes du grand cercle SBD & qui ſe coupent en L, nous avons $VL \times LP = HL \times LB$; (*N.* 275.) donc $\overline{TL}^2 = HL \times LB$ & mettant cette valeur de $\overline{TL}^2$ dans $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2 + \overline{TL}^2$, nous aurons $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2 + HL \times LB$; mais à cauſe que la ligne HB eſt diviſée en deux également en R, & en deux inégalement en L, nous avons $HL \times LB + \overline{LR}^2 = \overline{HR}^2$

ou $\overline{RB}^2$; donc $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$; or, dans le triangle ARB, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$; donc $\overline{AT}^2 = \overline{AB}^2$; & comme par la propriété de la tangente AB & des ſecantes, nous avons AP × AV $= \overline{AB}^2$, nous aurons auſſi AP × AV $= \overline{AT}^2$, c'eſt-à-dire que dans le cercle VTPQ le rectangle de la partie extérieure AP de la ſecante AV, par cette ſecante, eſt égal au quarré de la droite AT menée du même point A à la circonférence de ce cercle; mais dans ce même cercle le rectangle AP × AV eſt égal au quarré de la tangente menée du point A du côté du point T; donc le quarré de cette tangente eſt égal au quarré $\overline{AT}^2$, & partant la tangente & la droite AT ſont égales; or, du même point A on ne peut mener à la circonférence VTPQ du même côté deux différentes lignes qui ſoient égales; (*N.* 235. 237.) donc AT eſt la tangente qu'on meneroit du point A à la circonférence VTPQ.

297. COROLLAIRE. *Si deux ou pluſieurs ſecantes* AV, &c. (Fig. 187.) *menées d'un même point* A, *ſont coupées harmoniquement par la circonférence, & par une droite* BH *perpendiculaire ſur la ſecante qui paſſe par le centre, la tangente menée à l'une ou l'autre des extrémités de la corde* BH *paſſera par le point* A.

Si l'on prétend que la tangente menée du point B ne paſſe pas par le point A; je mene de ce point A une tangente qui touchera par conſéquent le cercle en un point P différent du point B, à cauſe que deux tangentes ne peuvent toucher le cercle en un même point; (*N.* 241.) du point P, je mene PQ perpendiculaire ſur la ſecante AD qui paſſe par le centre & qui coupe la ſecante AV en N; ainſi par la propoſition précédente, la ſecante AV ſera coupée harmoniquement par la circonférence & par la droite PQ, & ſes trois parties ſeront AF, FN, NV; mais par la ſuppoſition, la même ſecante AV eſt coupée harmoniquement par la circonférence & la droite BH, & ſes trois parties ſont AF, FL, LV, & la premiere AF de ces trois-ci, eſt la même que la premiere AF des trois précédentes; donc les deux dernieres FL, LV doivent être égales aux deux dernieres FN, NV chacune à chacune, (*N.* 206.) & partant FL, doit être égal à FN, & le point d'attouchement P, doit tomber ſur le point d'attouchement B.

298. PROPOSITION LXXVII. *Poſant encore que* AB (Fig. 188.) *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre & la perpendiculaire* BRH *ſoient données; ſi d'un point quelconque* M *pris ſur la circonférence; on mene*

une corde MN *qui paſſe par le point* R *où la perpendiculaire* BR *coupe la ſecante* AD, *& qu'après avoir mené des extrêmités* M, N *de cette corde, deux cordes* MT, NV *paralelles à* BR, *on mene les droites* VM, NT *par les extrêmités des cordes ; je dis que les droites* VM, NT *prolongées au-delà du cercle, ſeront deux ſecantes égales qui paſſeront par le point* A *& qui ſeront diviſées harmoniquement par la circonférence & la perpendiculaire* BH.

A cauſe des cordes paralelles MT, VN, les arcs compris MV, TV ſont égaux, (*N.* 263.) & ajoutant à chacun d'eux l'arc MT, les deux arcs VMT, MTN ſont égaux, & les angles à la circonférence MVN, TNV qui embraſſent ces arcs, ſont auſſi égaux; or, à cauſe que la corde MN ne paſſe pas par le centre O du cercle, & qu'elle coupe, par conſéquent, la circonférence en deux parties inégales, l'arc MTN du petit ſegment, vaut moins qu'une demi circonférence, & l'angle MVN qui en vaut la moitié, eſt aigu, de même que ſon égal TNV ; ainſi, puiſque les deux lignes MV, TN font ſur la droite VN les angles internes oppoſés, moindres enſemble que deux droits; ces lignes ne ſont pas paralelles, (*N.* 72.) & venant à être prolongées du côté de A, elles doivent former avec la baſe VN, un triangle iſoſcele dont le ſommet ſera ſur quelque point de la perpendiculaire AQ qui coupe la baſe VN en deux également (*N.* 107.).

Maintenant, comme nous ne ſçavons pas encore ſi le point où les droites MV, NT, prolongées, coupent la perpendiculaire AQ, eſt le même que le point A; nommons ce point $= x$ quelque part où il ſoit. Le triangle MNV étant coupé par la droite BH paralelle à ſa baſe, donne MR. RN :: ML. LV, (*N.* 158.) & dans les triangles ſemblables M*a*R, NQR, nous avons MR. RN. M*a*. NQ ou VQ, donc ML. LV :: M*a*. VQ; mais les triangles ſemblables xMA, xVQ, donnent M*a*. VQ :: xM. xV; donc xM. xV :: ML. LV ou xM. ML :: xV. LV, & partant la droite xV eſt diviſé harmoniquement par la circonférence & la droite BH, & il eſt viſible qu'à cauſe des paralelles MT, HB, VN, l'autre côté xN du triangle iſoſcele MxN eſt auſſi diviſé harmoniquement par la circonférence & la droite HB; ainſi les deux lignes Vx, Nx étant deux ſecantes qui partent d'un même point x, & qui ſont diviſées harmoniquement par la circonférence & la droite HB perpendiculaire ſur la ſecante AD qui paſſe par le centre; la tangente menée du point B, doit paſſer par le point x, (*N.* 297.) & ce point n'eſt pas différent du point A, puiſque la

tangente BA qui coupe AD en A, ne peut la couper en un autre point.

299. COROLLAIRE Ier. *Si dans le trapezoide* MTNV (Fig. 188.) *fait par les quatre cordes* MT, TN, VN. MV, *on mene l'autre diagonale* VT, *cette diagonale paſſera auſſi par le point* R. Car les angles MNV, TVN étant égaux à cauſe des arcs égaux MV, TN, les deux diagonales en ſe coupant, font un triangle iſoſcele, dont le ſommet doit être ſur la perpendiculaire AR qui coupe la baſe VN en deux également; or, la diagonale MN paſſe par le point R de cette perpendiculaire, & ne la coupe qu'en ce point; donc la diagonale VT doit paſſer par le même point.

300. COROLLAIRE II. *Si d'un même point* A (Fig. 188.) *d'où partent la tangente* AB, *la ſecante* AD, &c. *on mene deux ſecantes égales* AV, AN, *& qu'on joigne par des diagonales* MN, VT, *les quatre points où elles coupent la circonférence; ces deux diagonales ſe couperont au point* R *de la perpendiculaire* BH.

Les ſecantes AV, AN donnent AV × AM = AN × AT; mais par la ſuppoſition AV = AN, donc, ſi d'une part l'on diviſe par AV, & de l'autre, par AN, nous aurons AM = AT; d'où il ſuit que les droites VN, MT menées par les extrêmités des ſecantes AV, AN & de leurs parties extérieures, ſont perpendiculaires ſur AD, (*N.* 236. 238.) & par conſéquent paralelles à BH; ainſi les arcs VM, TN compris entre les paralelles MT, VN étant égaux, (*N.* 263.) les angles à la circonférence MNV, TVN qui s'appuyent ſur ces arcs, ſont auſſi égaux; c'eſt pourquoi le triangle que les diagonales MN, TV forment du côté de VN en ſe coupant, eſt iſoſcele, & ſon ſommet doit être ſur la perpendiculaire AD qui coupe la baſe VN en deux également (*N.* 107.).

Or, comme nous ne ſçavons pas encore ſi le point où ces deux diagonales ſe coupent ſur AD eſt le point R; nommons ce point z, quelque part où il ſoit; les triangles ſemblables MAz, NQz donnent Mz. zN :: M*a*. NQ ou QV, & à cauſe des triangles ſemblables MA*a*, VAQ, nous aurons M*a*. QV :: MA. VA; donc Mz. zN :: MA. VA; or, à cauſe que la ſecante AV eſt coupée harmoniquement par la circonférence & la droite BH, nous avons MA. ML :: AV. LV ou MA. VA :: ML. LV; donc Mz. zN :: ML, LV : ainſi dans le triangle MNV les côtés MV, MN étant coupés proportionnellement aux point L, z, la droite Lz menée par ces deux points, eſt paralelle à la baſe VN; (*N.* 158.)

mais LR ou HB eſt auſſi paralelle à la baſe VN, & du point L on ne peut mener qu'une ſeule paralelle à une même ligne VN; donc la paralelle LR & la paralelle Lz ne ſont qu'une ſeule & même ligne, & le point z eſt le même que le point R.

301. COROLLAIRE III. Donc, ſi deux ſecantes égales AV, AN (*Fig.* 188.) ſont menées d'un même point, & qu'après avoir mené les diagonales MN, TV, on mene par le point R où elles ſe coupent, une droite HB paralelle à la droite VN qui paſſe par les extrêmités des ſecantes; les points H, B de la droite HB ſeront les points d'attouchement des deux tangentes égales qu'on peut mener du point A; car on prouvera comme ci-devant que les deux ſecantes AV, AN ſont coupées harmoniquement par le cercle & la droite HB, &c.

302. PROPOSITION LXXVIII. *Suppoſant toujours la tangente* AB (Fig. 189.) *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre & la perpendiculaire* BRH *données; ſi du point* A *on mene une droite indéfinie* XZ *paralelle à la perpendiculaire* BRH, *& que d'un point quelconque* C *pris ſur cette paralelle on mene une ſecante* CN *qui paſſe par le point* R, *cette droite* CN *ſera coupée harmoniquement par la circonférence & la droite* BH.

Des points M, N je mene les droites MT, NV paralelles, & par les points M, V, N, T les droites VA, NA qui ſeront deux ſecantes égales qui paſſeront par le point A, & qui ſeront diviſées harmoniquent par la circonférence & la perpendiculaire HB (*N.* 298.) ou, ce qui revient au même par les droites MT, HB; ainſi dans l'eſpace paralelle XZVN, la ſecante AV étant diviſée harmoniquement par les droites MT, HB paralelles aux paralelles XZ, VN, la droite CN compriſe dans ce même eſpace doit être coupé en même raiſon par les mêmes paralelles MT, HB, (*N.* 153.) & par conſéquent nous avons CM. MR :: CN. RN.

303. COROLLAIRE. *Si d'un point quelconque* C *de la droite* XZ (Fig. 190.) *paralelle à* BR, *on mene deux tangentes* CP, CQ *& la droite* PQ *qui joint leurs points d'attouchement; cette droite* PQ *paſſe par le point* R.

Car menant la ſecante CN qui paſſe par le point R, cette droite eſt coupée harmoniquement en M, R, N; (*N.* 302.) & ſes trois parties CM, MR, RN; or, ſi on veut que la droite PQ ne paſſe pas par le même point R, cette droite coupera donc la ſecante CN en un autre point quelconque *x*, & comme PQ eſt la même

que

que la perpendiculaire qu'on meneroit du point d'attouchement P ſur la ſecante qui partant du point C, paſſeroit par le centre, (*N.* 293.) la droite ſeroit auſſi diviſée harmoniquement aux points C, *x*, N, & ſes trois parties ſeroient CM, M*x*, *x*N; mais la premiere partie CM de ces trois, eſt la même que la premiere partie CM des trois précédentes; donc les deux autres M*x*, *x*N doivent être égales chacune à chacune aux deux autres MR, RN, & par conſéquent le point R & le point *x* ne peuvent être différens & la droite PQ doit paſſer par le point R.

Nota. On peut prouver avec la même facilité l'inverſe de cette Propoſition, c'eſt-à-dire que *ſi par le point* R *on mene une corde quelconque* QP, *& que de ſes extrêmités* P, Q *on mene deux tangentes* QC, PC, *ces tangentes ſe couperont en un point* C *de la ligne* XZ. Car ſi elles ſe coupoient en un point *a* en deçà ou en delà de RZ; la ſecante *a*N menée du point *a* par le point R, ſeroit coupée harmoniquement par la circonférence & la droite PQ qui joint les points d'attouchement P, Q, & ſes trois parties ſeroient *a*M, MR, RN. Or comme cette même ſecante *a*N couperoit XZ en quelque points C, & que la ligne CN ſeroit auſſi coupée en trois parties harmoniquement CM, MR, RN, nous aurions deux lignes *a*N, CN coupées toutes les deux harmoniquement, & qui auroient deux parties MR, RN communes, & dont cependant les deux troiſiémes *a*M, CM ne ſeroient pas égales; ce qui eſt impoſſible: (*N.* 207.) donc, afin que *a*N ſoit diviſée harmoniquement, en ſorte que MR, RN ſoient deux de ſes parties; il faut néceſſairement que *a*M ſoit égal à CM, & que les points *a*, C, ne ſoient qu'un même point de la ligne XZ.

304. PROPOSITION LXXIX. *Suppoſant encore la tangente* AB, (Fig. 191.) *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre & la perpendiculaire* BRH *données; ſi l'on mene deux ſecantes inégales* AV, AN, *& qu'on joigne leurs points de diviſions par des droites* TM, EL, NV; *ces droites étant prolongées ſe couperont en un même point ſur la perpendiculaire* BH *prolongée de part & d'autre.*

Les lignes TM, EL, NV ne ſont pas paralelles entr'elles; car les deux TM, NV ſeroient perpendiculaires ſur la droite AD qui paſſe par le centre, à cauſe que EL eſt perpendiculaire ſur AD; d'où il ſuivroit que TM, NV ſeroient diviſées chacune également par AD de même que leurs arcs; & que par conſéquent les ſecantes AV, AN ſeroient égales; (*N.* 236.) ce qui eſt contre la ſuppoſition; cela poſé.

Puiſque les ſecantes AN, AV ſont diviſées harmoniquement par la circonférence & la droite BH, & qu'elles ont un point commun A, les droites TM, EL, NV qui joignent leurs autres points de diviſion, ſont paralelles entr'elles ou doivent ſe couper toutes en un même point lorſqu'on viendra à les prolonger; (*N.* 211.) or nous venons de voir qu'elles ne ſont pas paralelles; donc elles ſe coupent en même point; mais cela ne peut ſe faire à moins que les deux TM, NV prolongées, ne coupent en un même point la ligne EL prolongée; donc, &c.

305. PROPOSITION LXXX. *Poſant toujours que la tangente* AB (Fig. 192.), *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre & la perpendiculaire* BH *ſoient données; ſi l'on prolonge* BH *de part & d'autre, & que d'un point quelconque* I *de ſes prolongemens, on mene deux tangentes* IM, IV, *la ligne* VM *qui joint les points d'attouchement étant prolongée, paſſera par le point* A.

Je mene du point A une autre ſecante APQ; du point I, par le point P, où cette ſecante coupe le cercle, je mene la droite IPT qui eſt auſſi une ſecante; enfin du point A, par le point T, je mene une ſecante ATN. Les deux ſecantes AQ, AN ſont diviſées harmoniquement par le cercle & par la droite BH, & comme elles ont un point commun A, & que les deux lignes TP, BH, qui joignent quatre de leurs points de diviſion ſe coupent en un point I; la ligne droite NQ qui joint leurs extrêmités N, Q, doit paſſer par le même point I, cela poſé. Les ſecantes IT, IN, ſont coupées harmoniquement par le cercle & par la droite MV qui joint les points d'attouchement des tangentes IM, IV qui partent du même point I, (*N.* 316.) & les droites PQ, NT qui paſſent par quatre de leurs points, ſe coupent au point A; donc la droite VM qui paſſe par les points V, M, paſſe auſſi par le point A.

Nota. On peut prouver très-facilement l'inverſe de cette propoſition; c'eſt-à-dire que *ſi des points* M, V *de la partie intérieure* MV *d'une ſecante* VA *qui paſſe par le point* A, *on mene deux tangentes, ces tangentes ſe couperont ſur la perpendiculaire* BH *prolongée.* Car, ſuppoſons pour un moment que le point I où les tangentes VI, MI ſe coupent, ne ſoit point ſur le prolongement de BH, je mene par ce point I une ſecante IPT qui coupe le cercle en P & T, & qui eſt coupée harmoniquement par la circonférence & par la droite VM qui joint les points d'attouchement V, M. Du point A, par les points P & T, je mene deux autres ſecantes

AQ, AN, & par l'extrêmité N de la derniere AN, je mene la droite NI; les deux ſecantes IT, IN ſont coupées harmoniquement par le cercle & la droite VMA qui joint les points d'attouchement V, M des tangentes IM, IV menées du même point I; & comme les droites VMA, NTA qui joignent quatre points de diviſion de ces deux ſecantes IT, IN, paſſent par le point A, la ligne QP qui joint les points Q, P, paſſe auſſi par le même point A; (*N.* 211.) ainſi les droites APQ, ATN étant deux ſecantes qui partent du point A, ſont diviſées harmoniquement par la circonférence & la droite BR; & à cauſe que les lignes TP, NQ qui joignent quatre de leurs points, paſſent par le point I, la ligne BH qui joint deux autres de leurs points doit paſſer auſſi par le point I, & par conſéquent le point I où les deux tangentes MI, VI ſe coupent, ne peut pas être hors de la droite BH prolongé, comme on le ſuppoſeroit.

306. PROPOSITION LXXXI. *Suppoſant encore la tangente* AB (Fig. 193. 194.) *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre & la perpendiculaire* BH *données; ſi d'un point quelconque* M *de la partie extérieure* AS *de la ſecante prolongée, ſi l'on veut au-delà du point* A, *on mene une droite* MP *paralelle à la tangente* AB, *& qui ſe termine ſur la droite* BH, *prolongée s'il le faut au-delà du point* B; *le quarré de cette droite* PM *ſera toujours plus grand que le rectangle de la ſecante* MD *qu'elle coupe par ſa partie extérieure* MS.

Du point B, je mene aux extrémités du diamétre SD, les droites BS, BD & du point P, les droites PV, PN paralelles à BS, BD; je prolonge AB, en Z & MP en X.

Les triangles ſemblables ABD, MPN donnent AB. AD :: MP. MN; & à cauſe des triangles ſemblables ABS, MPV, nous avons AB. AS :: MP. MV, multipliant donc les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons $\overline{AB}^2$. AD × AS :: $\overline{MP}^2$. MN × MV; mais $\overline{AB}^2 =$ AD × AS (*N.* 271.); donc $\overline{MP}^2 =$ MN × MV. Ainſi, il ne s'agit plus que de faire voir que MN × MV eſt plus grand que MD × MS, & premierement dans la Figure 193.

L'angle du ſegment ABS vaut la moitié de l'arc BS (*N.* 253.) & l'angle à la circonférence SBH vaut la moitié de l'arc BH (*N.* 252.) égal à l'arc SB, à cauſe du diamétre SD perpendiculaire ſur la corde (*N.* 224.); donc ces deux angles ſont égaux; or, l'angle ABQ eſt égal à ſon alterne BQP; donc les angles

QBP, BQP ſont égaux, & dans le triangle iſoſcele BQP, nous avons BP = QP. De même l'angle du ſegment ZBD eſt égal à l'angle à la circonférence HBD, & à cauſe que l'angle ZBD eſt égal à ſon alterne BXP, le triangle BXP eſt iſoſcele, & donne BP = XP, donc XP = QP; ainſi les trois lignes MQ, MP, MX étant en progreſſion Arithmétique, à cauſe que leurs différences XP, QP ſont égales, la premiere eſt plus petite par rapport à la ſeconde, que la ſeconde par rapport à la troiſiéme (*N.* 216.), c'eſt-à-dire, MQ, MP < MP, MX; mais les triangles ſemblables MQS, MPV, donnent MQ. MP :: MS. MV, & dans les triangles ſemblables MPN, MXD, nous avons MP, MX :: MN, MD, mettant donc dans MQ, MP < MP, MX, la raiſon MS, MV, au lieu de ſon égale MQ, MP, & la raiſon MN, MD, au lieu de ſon égale MP, MX, nous aurons MS, MV < MN, MD; or, ſi ces quatre termes étoient en proportion, le produit des extrêmes ſeroit égal au produit des moyens; donc puiſque MS eſt plus petit qu'il ne faut pour faire qu'il y ait proportion, le produit MS × MD des extrêmes, eſt plus petit que le produit MN × MV des moyens, c'eſt-à-dire, plus petit que le quarré de MP.

Dans la Figure 194, menant les droites BS, BD, PV, PN, comme ci-devant, nous trouverons par les mêmes raiſonnemens $\overline{PM}^2 = MV \times MN$, & il ne s'agira plus que de prouver que MV × VN eſt plus grand que MS × MD. Ce qu'on fera en prolongeant SB en X, & DB en Q, car les angles *a*BD, HBD étant égaux, comme on vient de voir, leurs oppoſés aux ſommets QBA, QBP ſont auſſi égaux, & à cauſe que QBA eſt égal à ſon alterne BQP, le triangle BQP eſt iſoſcele, & donne PB = PQ. De même les angles ABS, SBH étant égaux, leurs oppoſés au ſommet *a*BX, XBP le ſont auſſi, & à cauſe de l'angle *a*BX égal à ſon alterne BXP, le triangle BXP eſt iſoſcele, & donne PB = PX; donc PQ = PX, & les trois lignes MQ, MP, MX, ſont en progreſſion Arithmétique, ce qui donne MQ, MP < MP, MX, & le reſte de la Démonſtration s'achevera comme auparavant.

CHAPITRE VII.

De l'Inſcription des Polygones réguliers dans un Cercle, & de leur Circonſcription autour du Cercle.

307. UN Polygone régulier eſt *inſcrit* dans un cercle, lorſque tous ſes angles ſont à la circonférence de ce cercle; & il eſt *circonſcrit*, lorſque tous ſes côtés touchent la circonférence.

308. PROBLEME. *Inſcrire un triangle équilatéral dans un cercle* (Fig. 195.)

Je mene un diamétre BD, dont je coupe la moitié OD en deux également en R; par le point R, je mene une corde AC perpendiculaire ſur le diamétre, & des extrêmités A, C de cette corde, je mene à l'extrêmité la plus éloignée du diamétre les droites AB, BB, ce qui donne le triangle équilatéral ABC demandé.

Pour le prouver, je mene la corde DC; l'angle à la circonférence BCD étant droit (*N.* 252.) le triangle BCD eſt rectangle; & à cauſe de la perpendiculaire CR, nous avons RD. DC :: DC. DB (*N.* 170.); or, RD $= \frac{1}{4}$ DB par la conſtruction, donc $\frac{1}{4}$ DB. DC :: DC. DB, d'où l'on tire $\frac{1}{4}\overline{DB}^2 = \overline{DC}^2$, & tirant la racine quarrée, nous aurons $\frac{1}{2}$ DB $=$ DC, c'eſt-à-dire, DC eſt double de RD; mais les triangles ſemblables DRC, BRC donnent DR. DC :: RC. BC. Donc BC eſt double de RC, de même que CD eſt double de RD; or, AC eſt auſſi double de RC (*N.* 224.), donc BC $=$ AC, mais BC $=$ BA à cauſe de BD perpendiculaire ſur le milieu de AC (*N.* 56.); donc les trois côtés AB, BC, AC du triangle ABC ſont égaux.

309. COROLLAIRE. *Le côté de l'Exagone inſcrit dans un cercle eſt égal au rayon.* L'arc ADC eſt coupé en deux également par le diamétre BD perpendiculaire ſur le côté AC du triangle équilatéral ABC inſcrit au cercle; ainſi l'arc DC eſt la ſixiéme partie de la circonférence, & la corde DC de cet arc eſt le côté de l'exagone qui ſeroit inſcrit au cercle. Or, nous venons de trouver DC $= \frac{1}{2}$ DB $=$ OD. Donc, &c.

310. COROLLAIRE. *Autour d'un cercle donné* ABC (Fig. 196.) *circonſcrire un triangle équilatéral.*

Je mene le diamétre que je prolonge de part & d'autre, faiſant RM = RO & AN = AO du point O, & avec le rayon ON, je décris un cercle NQMP; du point A, je mene la corde PQ perpendiculaire ſur MN, & des points P, Q je mene les droites PM, QM qui forment avec PQ le triangle demandé.

Car à cauſe de OA = NA, on démontrera comme ci-deſſus (*N.* 308.), que le triangle PQM eſt équilatéral & inſcrit au cercle PNQM; ainſi les cordes PQ, QM, MP étant égales, les perpendiculaires OA, OB, OC menées du centre O ſur ces cordes ſeront égales; or, la perpendiculaire OA eſt le rayon du cercle donné ABC, donc la circonférence de ce cercle paſſe par les autres points B, C, & les trois côtés PQ, QM, MP du triangle, touchent ce cercle aux trois points A, B, C.

311. PROBLEME. *Inſcrire un quarré dans un cercle & le circonſcrire autour du cercle* (*Fig.* 197.).

Je mene deux diamétres AC, BD qui ſe coupent à angles droits, & je joins leurs extrêmités par les droites AB, BC, CD, DA, qui forment le quarré inſcrit demandé; car ces quatre droites ſoutenant des arcs égaux ſont égales, & les angles ABC, BCD, &c. ſont chacun droits à cauſe qu'ils embraſſent chacun une demi-circonférence.

Par les extrêmités A, B, C, D des deux diamétres, je mene des tangentes, qui en s'entrecoupant, forment un quarré HMNR circonſcrit au cercle; car les droites HM, RN étant perpendiculaires ſur BD ſont paralelles à AC, & à cauſe qu'elles ſont compriſes entre les droites HR, MN perpendiculaires ſur AC, elles ſont égales à AC; par la même raiſon les droites HR, MN ſont paralelles & égales à BD; ainſi les quatre côtés HM, MN, &c. de la figure HMNR étant égaux entr'eux, & les angles qu'ils forment étant droits, cette figure eſt un quarré.

312. PROBLEME. *Inſcrire un exagone dans un cercle, & le circonſcrire autour d'un cercle* (Fig. 198.).

Je porte le rayon OA ſur la circonférence de A en B, de B en C, &c. & joignant les points de diviſion par les droites AB, BC, &c. J'ai l'exagone inſcrit ABCDEF, ce qui eſt évident, après ce qui a été dit ci-deſſus (*N.* 309.).

A tous les ſommets A, B, C, &c. des angles de l'exagone inſcrit, je mene des tangentes au cercle, & ces tangentes en

s'entrecoupant forment l'exagone circonſcrit GHLMNR ; car les cordes AB, AF, de même que leurs arcs étant égales, les angles de ſegment HAB, HBA, GAF, GFA, ſont tous égaux entr'eux, d'où il ſuit que les triangles iſoſceles FGA, AHB ſont parfaitement égaux, & par la même raiſon les autres triangles iſoſceles BLC, CMD, DNE, ERF ſont égaux entr'eux, & aux deux précédens FGA, AHB ; ainſi les côtés de la figure circonſcrite étant compoſés chacun de deux côtés égaux de ces triangles iſoſceles, ſont égaux entr'eux ; de même que les angles qu'ils forment, & partant la figure eſt un exagone circonſcrit.

313. *Remarque.* Lorſqu'un polygone eſt inſcrit dans un cercle, on peut toujours circonſcrire, à ce même cercle, un polygone ſemblable de la façon que nous venons de faire pour l'exagone. C'eſt pourquoi je n'en parlerai plus.

314. Proposition LXXXII. *Le quarré du côté du pentagone inſcrit dans un cercle eſt égal à la ſomme des quarrés du côté de l'exagone, & du côté du décagone inſcrits dans le même cercle.*

Soit AB (*Fig.* 199.) le côté du pentagone ; je diviſe ſon arc en deux également en C, & les cordes AC, CB, ſont égales chacune au côté du décagone ; je mene les rayons AO, BO, chacun deſquels eſt égal au côté de l'exagone : du centre O, je mene ſur AC la perpendiculaire OR qui diviſe l'arc AC, & ſa corde en deux également (*N.* 224.) ; ainſi menant SC, le triangle ASC eſt iſoſcele, & ſemblable au triangle iſoſcele ACB à cauſe de l'angle CAB commun ; donc AS. AC :: AC. AB, d'où je tire $AS \times AB = \overline{AC}^2$.

L'angle SOB embraſſe les trois quarts de l'arc du pentagone, & vaut par conſéquent 54 degrés ; car l'arc du pentagone en vaut 72 ; or, l'angle ABO étant l'un des angles ſur la baſe du pentagone, vaut auſſi 54 degrés ; donc le triangle SOB eſt iſoſcele & ſemblable au triangle OAB, à cauſe de l'angle commun SBO ; ainſi SB. BO :: BO. AB, d'où je tire $SB \times AB = \overline{BO}^2$, & ajoutant chaque membre de cette équation à chaque membre de la précedente $AS \times AB = \overline{AC}^2$, j'ai $AS \times AB + SB \times AB = \overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$; or, $AS \times AB + SB \times AB = AB \times \overline{AS + SB}$, & $AS + SB = AB$; donc $AB \times AB$ ou $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$.

315. Proposition LXXXIII. *Le côté* AB *du décagone inſcrit*

dans un cercle (Fig. 200.) *eſt égal à la mediane* OR *du rayon* OB *diviſé en moyenne & extrême raiſon.*

Dans le décagone l'arc AB eſt la dixiéme partie de la circonférence, & vaut par conſéquent 36 degrés ; donc des extrêmités A, B menant les rayons AO, BO, l'angle AOB vaut 36 degrés, & les deux autres angles OAB, OBA du triangle iſoſcele OBA, valent chacun 72 degrés, & ſont doubles de l'angle AOB du ſommet ; or, dans tout triangle iſoſcele dont chaque angle de la baſe eſt double de l'angle du ſommet, la baſe AB eſt égale à la mediane du côté OB diviſé en moyenne & extrême raiſon (*N.* 196.). Donc, &c.

316. PROBLEME. *Dans un cercle donné, inſcrire un décagone* (Fig. 201.).

Je mene un diamétre AB ; du centre O j'éleve le rayon OC perpendiculaire ſur AB, je coupe le rayon AO en deux également en R ; du point R pris pour centre, & d'un rayon égal à la diſtance RC, je décris l'arc CH qui coupe le rayon OB en H, & la droite OH eſt le côté du décagone : ainſi en portant ce côté dix fois ſur la circonférence, j'aurai le décagone.

Car par la conſtruction, ſi je portois OH ſur le rayon CO, de O en S, ce rayon ſeroit coupé en S en moyenne & extrême raiſon, & la droite SO ſeroit ſa médiane (*N.* 190.), donc SO ou OH étant la médiane du rayon coupé en moyenne & extrême raiſon, doit être le côté du décagone (*N.* 315.).

317. COROLLAIRE. *Toute ligne* AH *compoſée du côté* AO *de l'exagone, & du côté* OH *du décagone, eſt coupée en moyenne & extrême raiſon en* O.

Si je portois OH ſur AO le rayon AO ſeroit coupé en moyenne & extrême raiſon, & OH ſeroit ſa mediane ; donc ſi à ce rayon AO, j'ajoute ſa mediane la ligne entiére AH eſt encore coupée en moyenne & extrême raiſon (*N.* 191.).

318. PROBLEME. *Dans un cercle donné, inſcrire un pentagone* (Fig. 201.).

Je fais la même conſtruction que j'ai faite dans le Problême précédent pour le décagone ; & du point C au point H, je mene la droite CH qui eſt le côté du pentagone demandé.

Car le triangle rectangle COH donne $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OH}^2$ (*N.* 171.) ; mais CO eſt le côté de l'exagone, & OH eſt le côté du décagone ; donc CH doit être le côté du pentagone (*N.* 314.).

319.

319. PROBLEME. *Dans un cercle donné, inſcrire un pentadécagone, c'eſt-à-dire une figure de 15 côtés* (Fig. 202.).

J'inſcris d'abord un pentagone ABCDE, enſuite j'inſcris dans le même cercle un triangle équilatéral LDH; donc le ſommet D de l'un des angles ſoit le même que le ſommet D de l'un des angles du pentagone, & la corde AL eſt le côté du pentadécagone demandé; ce que je démontre ainſi:

Du point D, je mene le diamétre DM qui coupe le cercle, & les deux polygones chacun en deux également; ainſi le côté AB du pentagone, & le côté LH du triangle étant coupés chacun en deux également par DM, ſont perpendiculaires ſur DM, & paralelles entr'eux; donc AL = BH (*N.* 263.); or l'arc AB du pentagone étant de 72 degrés, ſa moitié AM eſt de 36; de même l'arc LMH du triangle étant de 120 degrés, ſa moitié LM eſt de 60, retranchant donc de l'arc LM, l'arc AM, le reſte AL ſera de 24 degrés; ainſi diviſant la valeur 360 de la circonférence entiere par 24, le quotient 15 fera voir que l'arc AL eſt contenu 15 fois dans la circonférence. Donc, &c.

320. *REMARQUE.* Si l'on coupe en deux parties égales les arcs des polygones qu'on vient de trouver, on aura des polygones qui auront un nombre de côtés doubles. Par exemple, le quarré donnera l'octogone; l'octogone donnera le polygone de 16 côtés; celui-ci donnera le polygone de 32 côtés, & ainſi des autres. Mais quant aux polygones de 7 côtés, de 9, de 11, &c. il faut néceſſairement avoir recours à la Géométrie compoſée, & ce que cette Géométrie nous enſeigne, n'eſt guéres facile à mettre en pratique. A la vérité quelques Auteurs nous donnent des Méthodes faciles qui ne ſont que des approximations; & d'autres nous apprennent à conſtruire des courbes nommées *Quadratrices*, par le moyen deſquelles, il ſemble qu'on peut aiſément inſcrire tel polygone que l'on voudra: Cependant, ſi l'on y prend garde de près, tout cela n'avance de rien, les approximations ſont toujours imparfaites, & les quadratrices ne pouvant être décrites que par pluſieurs points, ſont toujours peu exactes, à cauſe qu'il n'eſt pas poſſible de trouver abſolument tous leurs points. Ainſi, ce que je vois de plus ſûr dans ces occaſions, c'eſt de tâtonner juſqu'à ce qu'on ait trouvé exactement le polygone qu'on demande, ou de ſe ſervir du compas de proportion, ainſi que nous l'enſeignerons dans la ſuite, ce qui vaut encore mieux.

CHAPITRE VIII.

De la Trigonométrie, de la Longimétrie & du Nivellement.

321. LA *Trigonométrie* eſt la ſcience de connoître tous les côtés & les angles d'un triangle par la connoiſſance de quelques-unes de ces choſes.

322. Il faut obſerver que parmi les choſes connuës, il doit y avoir tout au moins un côté, car j'ai démontré (*N.* 101.) que deux ou pluſieurs triangles peuvent avoir les angles égaux chacun à chacun ſans avoir les côtés égaux.

323. Un angle aigu ABC étant donné (*Fig.* 203), ſon angle de ſuite ABE, ſe nomme *Complement* à deux droits de l'angle ABC, & l'angle DBA qui manque à l'angle ABC pour valoir un droit, ſe nomme *Complement* à l'angle ABC. Il faut prendre garde de ne pas confondre ces deux ſortes de complemens.

324. Le ſommet B de l'angle ABC étant au centre d'un cercle, la perpendiculaire AS tirée de l'extrêmité A de l'une de ſes jambes ſur l'autre BC, ſe nomme *Sinus droit*, ou ſimplement *Sinus* de l'angle ABC ou de l'arc AC, la partie SC, que cette perpendiculaire coupe du côté de la circonférence, eſt le *Sinus verſe*; le côté BA ou BC, eſt le *Sinus total*, ou le rayon, la perpendiculaire RC élevée à l'extrêmité C du rayon BC, juſqu'à la rencontre du rayon BA prolongé, ſe nomme la *Tangente*, & la droite BR eſt la *Secante*.

325. Il faut donc diſtinguer la *Secante* qu'on employe dans la Trigonométrie, d'avec celle dont nous avons parlé dans le Chapitre du Cercle; car l'une s'arrête au centre du cercle, & l'autre coupe la circonférence en deux points.

326. Si l'on prolonge le ſinus AS d'un angle ABC, juſqu'à ce qu'il coupe la circonférence en T, la corde AT ſera double du ſinus AS, à cauſe que la perpendiculaire BC menée du centre, la coupe en deux également, & ſon arc ACT ſera double de l'arc AC; ainſi l'on doit dire que *le ſinus* AS *d'un angle* ABC, *eſt la moitié de la corde* AT *qui ſoutient un arc double.*

327. De-là il ſuit 1°. que le ſinus de l'angle ABE complement a deux droits de l'angle ABC eſt le même que le ſinus de l'angle

ABC, car la corde AT ſoutient l'arc AET double de l'arc AE, de l'angle ABE, & par conſéquent la moitié AS de cette corde eſt le ſinus de l'angle ABE. 2°. Que le ſinus de l'angle droit DBC eſt le rayon DB; car ce ſinus étant prolongé ſoutiendroit la demi-circonférence, laquelle eſt double de l'arc DC, que l'angle droit embraſſe.

328. Le ſinus de l'angle ABD complement à un droit de l'angle ABC étant la perpendiculaire AN (*N.* 324.), laquelle eſt paralelle & égale à BS, il eſt clair que ſi du rayon BC on retranche le ſinus verſe SC de l'angle ABC, le reſte BS ou AN ſera le ſinus du complement de l'angle ABC.

329. On a calculé les ſinus, tangentes & ſecantes de tous les degrés du quart de cercle, & de leurs minutes par des voyes aſſez ſimples & faciles qu'on trouve à la tête de toutes les Trigonométries, & dont il ſeroit inutile de parler ici. Or, comme on ne pouvoit faire ces calculs ſans employer la Régle de Trois qui donne ſouvent des fractions, ou l'extraction de la racine quarée qui ne peut pas toujours ſe faire exactement, on a ſuppoſé le rayon diviſé en dix millions de parties, afin de pouvoir négliger les fractions ou les reſtes, leſquels étant au-deſſous de l'unité, ne peuvent jamais valoir la dixiéme millioniéme partie du rayon, ce qui peut être compté pour rien: Ces calculs faits, on a diſpoſé en colonnes d'une part les ſinus, tangentes & ſecantes, depuis un degré juſqu'à quarante-cinq, en y joignant les ſinus, tangentes & ſecantes des minutes de chacun de ces degrés, & de l'autre, on a mis auſſi en colonnes les ſinus tangentes & ſecantes des complemens des degrés, depuis un juſqu'à quarante-cinq, en y joignant auſſi les ſinus tangentes & ſecantes de leurs minutes, ce qui eſt d'une grande utilité à cauſe qu'on a ſouvent beſoin des complemens.

Or, il faut obſerver que quoique les Meſures dont nous ſervons pour meſurer un rayon, un ſinus, &c. ſoient différentes de celles qu'on a employé en calculant les Tables des ſinus, tangentes & ſecantes, cela n'altére en rien leur rapport. Suppoſons par exemple, que le rayon étant diviſé en cent millions de parties, il ſe trouve une tangente qui n'en contienne que cinquante millions, & qui par conſéquent ne ſoit que la moitié du rayon, il eſt clair que ſi je diviſe le rayon & la tangente en pieds ou en pouces, le nombre de pieds que la tangente contiendra ne ſera que la moitié du nombre de pieds contenus dans le rayon. Ainſi

quand les Tables nous auront fait connoître le rapport de deux lignes, ſi nous connoiſſons la valeur de l'une des deux en toiſes, pieds ou pouces ; nous trouverons aiſément la valeur de l'autre en toiſes, pieds ou pouces, par le moyen d'une ſimple regle de Trois. Par exemple, ſi la Table nous donne pour la tangente cinq millions, & que le rayon ſoit de dix toiſes ; je dirai comme dix millions valeur du rayon, ſelon les Tables, eſt à cinq millions valeur de la tangente, ſelon les mêmes Tables, ainſi 10 toiſes valeur du rayon en toiſes, eſt à un quatriéme terme qui ſera la valeur de la tangente en toiſes, & ce quatriéme terme ſera cinq toiſes, & ainſi des autres.

330. PROPOSITION LXXXIV. *Dans tout triangle* ABC (Fig. 204.) *les côtés ſont entr'eux comme les ſinus des angles oppoſés à ces côtés.*

L'angle ABC étant à la circonférence, vaut la moitié de l'arc ARC qu'il embraſſe ; or, le côté AC oppoſé à l'angle ABC ſoutient l'arc entier ARC, ou le double de l'arc qui meſure l'angle ABC, donc la moitié du côté AC eſt le ſinus de l'angle ABC. Par la même raiſon la moitié du côté BC eſt le ſinus de l'angle oppoſé A, & la moitié du côté AB, eſt le ſinus de l'angle oppoſé C ; or, les côtés AC, AB, BC ſont entr'eux comme leurs moitiés ; donc ils ſont entr'eux comme les ſinus des angles qui leurs ſont oppoſés.

331. PROPOSITION LXXXV. *Dans tout triangle ſcalene* ABC (Fig. 205.) *la ſomme de deux côtés* AB, BC *eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié de la ſomme des deux angles* BAC, BCA *faits ſur le troiſiéme côté* AC, *eſt à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles.*

Du ſommet B pris pour centre, & avec un rayon égal au côté BC, qui eſt le plus grand des deux côtés AB, BC ; je décris un cercle, je prolonge le petit côté AB de part & d'autre juſqu'à la circonférence, ce qui donne AD égal à la ſomme AB plus BC des côtés AB, BC, & AE égal à la différence de ces mêmes côtés ; l'angle DBC externe au triangle ABC eſt égal à la ſomme des deux angles internes oppoſés BAC, BCA, & l'angle à la circonférence DEC, étant la moitié de l'angle au centre DBC, vaut par conſéquent la moitié de la ſomme des angles BAC, BCA ; or, l'angle BAC externe au triangle ACE, vaut les deux internes oppoſés AEC, ACE, donc la différence de l'angle BAC à l'angle AEC eſt le petit angle ACE ; mais dans le triangle iſoſcele EBC, l'angle BEC étant égal à l'angle BCE, la diffé-

rence de l'angle BEC à l'angle BCA eſt encore le petit angle ACE; donc puiſque l'angle BAC ſurpaſſe l'angle AEC du petit angle ACE, & que l'angle AEC ſurpaſſe l'angle BCA encore du petit angle ACE; il s'enſuit que la différence des angles BAC, BCA eſt double de l'angle ACE, & que par conſéquent la moitié de cette différence eſt l'angle ACE.

Du point E pris pour centre, & avec la droite EC priſe pour rayon, je décris un arc CN, & je mene la tangente DC qui va aboutir à l'extrêmité de la droite ED, à cauſe que l'angle droit ECD doit embraſſer une demi-circonférence; du point C pris pour centre, & avec la même droite EC priſe pour rayon, je décris l'arc EI, & je mene ſa tangente EF; ainſi en prenant EC pour rayon, l'arc NC eſt la meſure de l'angle DEC, & la droite DC eſt ſa tangente; de même l'arc EI eſt la meſure de l'angle ECI, & la droite EF eſt ſa tangente; or, les tangentes DC, EF étant paralelles entr'elles à cauſe qu'elles ſont perpendiculaires ſur EC, l'angle FED eſt égal à ſon alterne EDC, mais l'angle FAE eſt égal à l'angle DAC qui lui eſt oppoſé; donc les deux triangles DAC, FAE ſont ſemblables, & nous avons DA. AE :: DC. EF, c'eſt-à-dire, la ſomme des côtés AB, BC eſt à leur différence AE comme la tangente DC de la moitié de la ſomme des angles BAC, BCA eſt à la tangente EF de la moitié de la différence de ces deux angles.

332. PROPOSITION LXXXVI. *Dans tout triangle ſcalene* ABC (Fig. 206.) *le plus grand côté* AC *eſt à la ſomme* AB + BC *des deux autres, comme la difference de ces côtés eſt à la difference des ſegmens* AR, RC *du grand côté* AC *faits par la perpendiculaire* BR, *menée de l'angle oppoſé.*

Du point B pris pour centre, & avec le rayon BC, je décris le cercle CDSE, & je prolonge le côté AB juſqu'à la circonférence en D; ainſi j'ai BD = BC = BS, & partant AB — SB ou AS eſt la différence des côtés AB, BC, & AB + BD ou AD en eſt la ſomme; de même à cauſe de la corde EC diviſée en deux également par la perpendiculaire BR, j'ai ER = RC, & par conſéquent AR — ER ou AE eſt la différence des ſegmens AR, RC; or, les ſecantes AC, AD donnent AC. AD :: AS. AE (*N.* 273.); donc le grand côté AC eſt à la ſomme AD des deux autres, comme leur différence AS eſt à la différence AE des ſegmens AR, RC.

De la Réſolution des Triangles Rectangles.

333. PROBLEME. *Connoiſſant l'hypothenuſe* AB *de 636 toiſes, & le côté* BC *de 386, trouver les angles* (Fig. 207.).

L'angle ACB oppoſé à l'hypothenuſe étant droit, ſon ſinus eſt égal au rayon & vaut, ſelon les Tables 10000000; or, l'hypothenuſe AB eſt au côté BC, comme le ſinus de l'angle droit ACB oppoſé à l'hypothenuſe eſt au ſinus de l'angle CAB oppoſé au côté CB (*N.* 330.); je dis donc, par regle de Trois; 636 eſt à 386, comme 10000000 eſt à un quatriéme terme, lequel en faiſant la régle eſt 6069135, & cherchant ce nombre dans la colonne des ſinus marquée dans les Tables; je trouve qu'il appartient à l'angle de 37 degrés 22 minutes; ainſi l'angle CAB eſt de 37 degrés 22 minutes; or, cet angle joint à l'angle CBA vaut un droit ou 90 degrés. Retranchant donc de 90 degrés, 37 degrés 22 minutes, le reſte 52 degrés 28 minutes, eſt la valeur de l'angle CBA.

334. *REMARQUE.* Pour abreger le calcul, on retranche du rayon, des ſinus, des tangentes & des ſecantes, deux caractéres à droites en obſervant que ſi les deux caractéres qu'on retranche valent plus de 50, on ajoute 1 au dernier caractére reſtant; & en voici la raiſon.

Soit le ſinus 3786486; ſuppoſons d'abord qu'il ſoit 3786400, tandis que ſon rayon eſt 10000000, il eſt clair qu'en retranchant deux zeros de part & d'autre, c'eſt comme ſi j'avois diviſé l'un & l'autre par 100, & par conſéquent le rapport du ſinus au rayon eſt le même après la diviſion qu'il l'étoit avant la diviſion. Mais ſi le ſinus eſt 3786486, & que je diviſe le ſinus & le rayon par 100, le quotient du ſinus ſera 37864 avec un reſte $\frac{86}{100}$, qui n'eſt pas bien éloigné de valoir 1. Ainſi, ſi je néglige ce reſte, je néglige près d'une unité, & comme le rayon diviſé par 100 eſt 100000, l'unité négligée eſt un cent milliéme du rayon, & quoique ce cent milliéme ſoit peu de choſe; cependant pour plus d'exactitude, on fait fort bien d'ajouter une unité au reſte du ſinus, & de dire que ce ſinus eſt 37865, plutôt que 37864; au contraire, ſi les deux derniers caractéres qu'on retranche du ſinus, ſont au-deſſous de cinquante, alors ces deux caractéres valent moins qu'une demi-unité du rayon ou la moitié d'un cent milliéme, & par conſéquent on peut négliger cette valeur ſans crain-

dre que le rapport du rayon au ſinus en ſoit ſenſiblement alteré.

335. PROBLEME. *Connoiſſant le côté* AC *de* 456 *toiſes, & l'angle oppoſé* B *de* 33 *degrés* 48 *minutes, trouver l'hypothenuſe* AB (Fig. 208.).

Je dis, comme le ſinus de l'angle B qui eſt dans les Tables 55630 en retranchant deux caractéres eſt au ſinus de l'angle droit C, qui eſt 100000 en retranchant auſſi deux caractéres, ainſi le côté AC de 456 toiſes, eſt à un quatriéme terme, qui eſt l'hypothenuſe, & la régle faite, je trouve que cette hypothenuſe vaut 820 toiſes.

336. PROBLEME. *Connoiſſant le côté* AC *de* 456 *toiſes, & l'angle* BAC *de* 56 *degrés* 12 *minutes, trouver le côté* BC *oppoſé à cet angle* (Fig. 209.).

Du point A pris pour centre, & avec un intervalle égal au côté AC, je décris l'arc CD, ainſi prenant AC pour rayon, le côté CB eſt la tangente de l'angle A; c'eſt pourquoi prenant dans les Tables la valeur 149378 de la tangente de l'angle A: je dis, le rayon AC de 100000, ſelon les Tables, eſt à la tangente CB de 149378, ſelon les mêmes Tables, comme le même rayon AC de 456 toiſes, eſt à un quatriéme terme qui ſera la valeur en toiſes de la tangente CB, & la regle faite, je trouve 681 pour la valeur de CB.

337. PROBLEME. *Connoiſſant les côtés* AC, CB, *connoître les angles* (Fig. 210.).

Je décris l'arc CD, & par conſéquent CB eſt la tangente de l'angle A & AC eſt le rayon; je dis donc, comme le rayon AC en toiſes eſt à la tangente CB auſſi en toiſes, ainſi le rayon AC de 100000, ſelon les Tables, eſt à un quatriéme terme qui ſera la tangente CB exprimée en parties égales à celles du rayon, & cherchant dans les Tables cette tangente, je trouverai à quel angle elle appartient.

338. PROBLEME. *Les côtés* AC, CB *étant connus, connoître l'hypothenuſe* (Fig. 211.).

Je cherche d'abord l'angle A par le Problême précédent, après quoi, je trouverai l'hypothenuſe AB, comme ci-deſſus (*N.* 335.).

De la Réſolution des Triangles Obliquangles, ou qui ne ſont pas Rectangles.

339. PROBLEME. *Connoiſſant deux angles* C, B (Fig. 212.) *& le côté* AB *oppoſé à l'un des angles connus* C, *trouver les deux autres côtés.*

Je cherche dans les Tables les ſinus des angles C & B, & je dis, comme le ſinus de l'angle C oppoſé au côté connu AB, eſt au ſinus de l'angle B oppoſé au côté inconnu AC; ainſi le côté AB eſt au côté AC, & faiſant la régle, je trouve la valeur de AC.

Les angles C & B étant connus, le troiſiéme eſt auſſi connu, puiſqu'il eſt le complement à deux droits de la ſomme des angles C & B; ainſi je dis, le ſinus de l'angle C oppoſé au côté connu AB eſt au ſinus de l'angle A oppoſé au côté inconnu BC, comme le côté AB eſt au côté cherché BC, &c.

340. PROBLEME. *Connoiſſant le côté* AB (Fig. 213.) *de* 469 *toiſes, le côté* BC *de* 584, *& l'angle compris* B *de* 68 *degrés, trouver les autres angles & le côté* AC.

Par la propoſition 85 (*N.* 331.), la ſomme des côtés AB, BC eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié de la ſomme des angles A, C eſt à la tangente de la moitié de leur différence. J'ajoute donc les deux côtés 469 & 584, & la ſomme eſt 1053, je retranche le petit du plus grand, & la différence eſt 115. Or, les trois angles pris enſemble étant de 180 degrés, ſi j'en retranche l'angle B = 68, le reſte 112 eſt la ſomme des deux angles; j'en prens la moitié 56, & je trouve dans les Tables que la tangente de 56 degrés eſt 148256; je dis donc, la ſomme 1053 des côtés AB, BC eſt à leur différence 115, comme la tangente 148256 de la moitié de la ſomme des angles A, C eſt à un quatriéme terme, & la régle me donne 16196, qui eſt la tangente de 9 degrés 12 minutes; ainſi j'ai la tangente de la moitié de la différence des angles A, C; or, je ſçais que la moitié de la ſomme de deux grandeurs inégales, plus la moitié de leur différence eſt égale à la grande, & que la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence eſt égale à la petite (*Livre premier, N.* 200.); ajoutant donc à 56 degrés, 9 degrés 12 minutes, la ſomme 65 degrés 12 minutes, ſera la valeur de l'angle A oppoſé au plus grand des deux côtés BC, & retranchant 9 degrés 12 minutes

minutes de 56, le reſte 46 degrés 48 minutes, ſera la valeur de l'angle C oppoſé à l'autre côté AB.

Les angles étant ainſi trouvés. Je dis : le ſinus de l'angle A eſt au côté CB qui lui eſt oppoſé, comme le ſinus de l'angle B eſt au côté oppoſé AC.

341. PROBLEME. *Connoiſſant le côté* AC (Fig. 213.) *de* 348 *toiſes, le côté* AB *de* 236, *& le côté* BC *de* 314, *connoître les angles.*

Par la propoſition 86 (*N.* 332.), le plus grand côté AC eſt à la ſomme des deux autres AB, BC, comme la différence de ces côtés eſt à la différence des ſegmens AE, EC coupés par la perpendiculaire menée de l'angle B ſur le grand côté AC ; or, la ſomme des côtés AB, BC eſt 550, & leur différence eſt 78. Je dis donc : le côté AC = 348 eſt à la ſomme AB + BC = 550, comme la différence 78 eſt à un quatriéme terme, & la régle me donne 123 pour la différence des ſegmens AE, EC, mais la ſomme des ſegmens eſt 348, ajoutant donc la moitié de cette ſomme à la moitié de la différence 123, la ſomme 235 $\frac{1}{2}$ ſera le grand ſegment EC, & retranchant de la moitié de la ſomme la moitié de la différence, le reſte 112 $\frac{1}{2}$ ſera le petit ſegment.

Cela fait, j'ai deux triangles rectangles ABE, BEC dans chacun deſquels, je connois l'hypothenuſe & un côté ; ainſi je trouverai les angles de ces deux triangles, de même que ci-deſſus (*N.* 333.).

342. *REMARQUE.* Je n'entrerai pas dans un plus grand détail pour laiſſer aux Commençans le plaiſir de reſoudre eux-mêmes les autres cas qui peuvent ſe preſenter, mais je ferai obſerver que ſi au lieu des ſinus, des tangentes, &c. & des grandeurs exprimées en toiſes, on met leurs logarithmes, on abregera beaucoup le calcul, & la difficulté des opérations. En voici un exemple :

Soit le triangle rectangle ABC (*Fig.* 210) dont je connois l'angle BAC de 56 degrés 12 minutes, & le côté AC de 456 toiſes ; ſi je veux trouver l'autre côté, je dois faire cette proportion (*N.* 336.), le rayon AC de 100000, ſelon les Tables, eſt à la tangente CB de 149378, ſelon les mêmes Tables, comme le même rayon de 456 toiſes eſt à un quatriéme terme, & la régle me donne 681 toiſes pour la valeur de CB. Or, pour faire cette régle, il faut que je multiplie 149348 par 456, & que je diviſe le produit par 100000, ce qui ne laiſſe pas que de faire des opé-

rations un peu longues, & qui quelquefois deviennent fort ennuyantes.

Pour éviter donc cet embarras, je cherche le logarithme du rayon qui eſt 100000000, & celui de la tangente 149378, qui eſt 101742873; ces logarithmes, dans les Tables de M. Ozanam, ſe trouvent à côté de leurs ſinus, & de leurs tangentes, ce qui eſt d'une grande commodité. Je cherche auſſi dans la Table des logarithmes des nombres, laquelle ſe trouve à la ſuite des Tables des ſinus, le logarithme 26589648 de 456; or, lorſqu'on opére par les logarithmes, il faut faire par l'addition & la ſouſtraction, ce qu'on ſeroit obligé de faire par la multiplication & la diviſion (*Livre premier*, *N.* 344.); c'eſt pourquoi, j'ajoute enſemble les deux derniers logarithmes que je viens de trouver, & leur ſomme eſt 128332521, j'en retranche le logarithme 100000000, & le reſte eſt le logarithme 28332521, lequel étant cherché dans les Tables des logarithmes, appartient au nombre 681, & par conſéquent le côté cherché BC eſt de 681 toiſes, & ainſi des autres.

De la Longimétrie.

343. La *Longimétrie* eſt la ſcience de meſurer ſur le terrein les longueurs, les hauteurs & les profondeurs acceſſibles ou inacceſſibles; on employe pour cela les triangles, & on en meſure les angles par le moyen du *Graphométre*, qui eſt un demi-cercle, ſur lequel tous les degrés ſont marqués, & au centre duquel eſt une régle tournante, armée à ſes extrémités de deux *Pinules* ou plaques de cuivre fenduës par le milieu, afin de pouvoir viſer plus ſûrement un objet; cet inſtrument eſt ſi commun qu'il ſeroit inutile d'en faire une plus ample deſcription.

344. Comme on ne meſure ordinairement les longueurs ſur le terrein que pour les rapporter ſur le papier, & que le papier eſt toujours beaucoup plus petit que le terrein qu'on veut repreſenter; il faut néceſſairement ſe ſervir d'une meſure qui ſoit à proportion plus petite que celle que l'on a employé pour meſurer, & c'eſt ce qu'on fait par le moyen d'une *Echelle* ou d'une ligne droite que l'on diviſe & ſoudiviſe proportionnellement aux diviſions & ſoudiviſions de la meſure dont on s'eſt ſervi. Quand l'étendue que l'on veut repreſenter, eſt extrêmement grande comme ſeroit une grande campagne, on ſe contente de diviſer une ligne en grand nombre de parties égales qui repreſentent des toi-

ſes, & l'on néglige les pieds, les pouces & les lignes, parce que ces ſoudiviſions ne ſçauroient être ſenſibles ſur le papier ; mais ſi ce qu'on veut repreſenter n'eſt pàs d'une grande étendue, comme ſeroit le plan d'une maiſon, d'un jardin, &c. alors il ne faut point négliger les pieds, ni les pouces, &c. & pour une plus grande exactitude, on fera l'échelle ainſi qu'on va voir dans le Problême ſuivant.

345. PROBLEME. *Conſtruire une Echelle qui repreſente des toiſes, pieds, pouces & lignes* (Fig. 214.).

Je prens une ligne AB que je diviſe en parties égales, par exemple, en 4, qui repreſentent quatre toiſes; je diviſe la quatriéme IIIB en 6 parties égales, qui repreſentent des pieds, car la toiſe contient 6 pieds; je conſtruis ſur AB un rectangle ABEH, en lui donnant une hauteur AH à volonté. De tous les points de diviſion de la ligne AB, je mene des paralelles à la ligne AH, & par cette conſtruction il ſe trouve ſur la quatriéme toiſe IIIB ſix petits rectangles tous égaux. Je mene la diagonale IIIR du premier de ces rectangles, & diviſant ſa hauteur IIIN en douze parties égales, je mene par les points de diviſions des paralelles à AB, ainſi le triangle IIINR étant coupé par 12 baſes paralelles, c'eſt comme ſi l'on avoir douze triangles ſemblables qui auroient leurs ſommets au point III, & qui par conſéquent auroient leurs baſes proportionnelles à leurs hauteurs ; or, les hauteurs ſont 1. 2. 3. 4, &c. juſqu'à 12, donc la premiere baſe du côté du ſommet eſt 1; la ſeconde eſt 2, la troiſiéme eſt 3, & ainſi de ſuite, juſqu'à la derniere NR qui eſt douze; or, NR vaut un pied, & par conſéquent douze pouces, donc la premiere baſe du côté du ſommet vaut un pouce, la ſeconde en vaut deux, la troiſiéme en vaut trois, &c. Que ſi je veux repréſenter des lignes, je prolonge HE en S juſqu'à ce que ES ſoit de la grandeur d'un pouce, c'eſt-à-dire de la grandeur de la premiere baſe des douze triangles précédens, & du point S menant la droite SB, j'ai un autre triangle ESB, lequel en prolongeant les paralelles à AB ſe trouvera coupé par 12 autres baſes paralelles, & comme un pouce vaut 12 lignes; on prouvera, comme ci-deſſus, que la premiere des baſes du côté du ſommet B vaut une ligne, que la ſeconde en vaut deux, &c.

Cette Echelle étant conſtruite, ſi je veux prendre, par exemple, 2 toiſes trois pieds, quatre pouces. Je mets la pointe du compas ſur le point I de la droite AB, & je l'ouvre juſqu'à ce

que l'autre pointe tombe ſur le point 3 marqué ſur la quatriéme toiſe IIIB ; ainſi j'ai 2 toiſes 3 pieds ; je porte le compas ainſi ouvert, de ſorte que l'une de ſes pointes tombe ſur le nombre 4 marqué ſur la ligne IIIN, & que l'autre tombe ſur quelque point V de la ligne 4V, & fixant la pointe en V, j'ouvre le compas juſqu'à ce que l'autre pointe tombe en X, & j'ai la grandeur VX qui vaut 2 toiſes 3 pieds 4 pouces, & ainſi des autres.

346. COROLLAIRE. Il eſt aiſé de voir que par le moyen d'une Echelle on peut repréſenter ſur le papier telle longueur, & telle étendue de terrein que l'on voudra, ce qui ſe fait en réduiſant cette étendue en triangles, & tranſportant enſuite ces triangles ſur le papier. Car ſuppoſons que les cotés d'un triangle que j'ai meſuré ſur le terrein ſoient l'un de deux toiſes, l'autre de 3, & le troiſiéme de 4, ſi je prens ſur mon Echelle trois grandeurs, dont l'une vaille 2 parties ou toiſes de cette Echelle, l'autre 3, & la troiſiéme 4, & qu'avec ces trois côtés, je décrive un triangle, ce triangle ſera ſemblable à celui du terrein, puiſque les côtés du triangle meſuré ſur le terrein ſeront entr'eux comme les côtés du triangle deſſiné ſur le papier, & ainſi des autres.

347. PROBLEME. *Meſurer une longueur qui n'eſt acceſſible que par l'une de ſes extrémités.*

Soit la muraille ABCD (*Fig.* 215.) dont on ne peut approcher que du côté de A, je prens ſur le terrein deux points, dont l'un R ſoit en ligne droite avec les points A, B de la muraille, & l'autre S ſoit hors de l'alignement & aſſez écarté de R ; je poſe mon Graphométre en S, enſorte que le plan de l'inſtrument ſoit horizontal ; je viſe en R, où je fais mettre un piquet, & viſant enſuite à l'extrêmité de la muraille en M, j'écris le nombre de degrés que ces deux rayons viſuels embraſſent. Je me tranſporte en R, en meſurant la diſtance SR, & poſant le Graphométre en R, je viſe en S & en M, & j'écris le nombre de degrés compris par les deux rayons viſuels. J'ai donc un triangle, dans lequel je connois la baſe RS, & les deux angles ſur la baſe, donc l'angle au ſommet eſt auſſi connu, à cauſe qu'il eſt le complement des deux angles ſur la baſe, & par conſéquent je n'ai qu'à dire : le ſinus de l'angle B eſt au ſinus de l'angle S, comme la baſe RS eſt au côté RB, & ce côté étant connu, ſi j'en retranche la diſtance RA, le reſte AB ſera la longueur cherchée de la muraille.

Si je ne veux point employer la Trigonométrie, je fais une

Echelle, & par ſon moyen, je tranſporte ſur le papier la baſe RS; enſuite avec un *Rapporteur* ou petit demi-cercle gradué, je fais en R & en S les angles que j'ai trouvé ſur le terrein, ce qui me donne le petit triangle *rbs* ſemblable au triangle RBS, je retranche de *rb* la valeur *ra* de RA, & portant le reſte *ab* ſur mon Echelle, je trouve la valeur de la longueur de la muraille.

Si je n'ai point de Graphométre, ou que je veuille m'en paſſer. Je prens ſur l'alignement RS, une partie RZ de quatre toiſes ou de cinq, &c. & une partie SV égale à RZ; de même ſur RB, je prens RX = RZ, & ſur SB je prens ST = SV; je meſure XZ, & VT, & par conſéquent je connois les côtés des deux triangles ZRX, VST; je tranſporte ſur le papier la baſe RS par le moyen de mon Echelle, je prens ſur *rs* la partie *rz* & la partie *su*, chacune de quatre toiſes de mon échelle; enſuite avec *rz*, & deux autres lignes *rx*, *zx* qui contiennent chacune autant de toiſes de mon Echelle que les droites RX, ZX en contiennent ſur le terrein, je conſtruis le triangle *rzx* qui ſe trouve ſemblable au triangle RZX; je fais de la même façon le triangle *ust*, ſemblable au triangle VST, & prolongeant les côtés *rx*, *st* juſqu'à ce qu'ils ſe coupent en *b*, le triangle *rbs* eſt ſemblable au triangle RBS, puiſque les angles *r*, *s* ſont égaux chacun à chacun aux angles R, S, ainſi retranchant de *rb* la droite *ra* d'un même nombre de toiſes que RA, le reſte *ab* porté ſur mon Echelle donne le nombre de toiſes de la muraille AB.

Cette derniere méthode me paroît la plus commode, non-ſeulement parce qu'elle diſpenſe d'avoir des inſtrumens; mais encore, parce qu'on n'eſt point obligé de meſurer les angles qu'il n'eſt pas toujours aiſé de prendre avec la derniere exactitude.

348. *Remarque.* J'ai dit qu'il falloit que le plan du Graphometre fût horizontal, car comme cet inſtrument eſt toujours élevé ſur un piquet au-deſſus du terrein; il eſt viſible que ſi l'on viſoit au pied de la muraille, les rayons viſuels ſeroient plus longs que les diſtances SB, RB, & que les angles changeroient; c'eſt pourquoi s'il falloit viſer néceſſairement en B, comme lorſqu'il s'agit de meſurer une longueur ſans hauteur, on feroit mettre ſur l'alignement du rayon viſuel, quelques piquets; après quoi remettant l'inſtrument dans ſa poſition horizontale, on viſeroit ſelon cet alignement, & ſelon l'alignement RS pour meſurer l'angle fait en S, & il faudroit faire la même choſe en R. On ſe peut tromper ſouvent faute de faire attention à ceci.

349. PROBLEME. *Meſurer une longueur* AB *inacceſſible de toutes parts* (Fig. 216.).

Je prens une baſe RS ſur le terrein; du point S je viſe en R, en A, en B, & je meſure les angles RSA, ASB; du point R je viſe en S, en B & en A, & je meſure les angles SRB, BRA; ainſi dans le triangle RAS, la baſe RS & les angles ſur la baſe, étant connus, la Trigonométrie me fera connoître aiſément les côtés RA, AS, & je connoîtrai de la même façon les côtés RB, SB du triangle RBS, & par conſéquent dans le rriangle ARB, les côtés AR, RB étant connus de même que l'angle compris ARB, il ſera facile de connoitre la baſe AB (*N.* 340.).

Sans trigonométrie, je tranſporte la baſe RS ſur le papier, & les angles ARS, BRS, BSR, ASB; ce qui me donne les triangles ARS, BRS ſemblables à ceux du terrain, après quoi, menant la ligne AB, je connois par mon échelle la valeur de cette ligne.

Sans inſtrument, je fais ſur RS tranſporté ſur le papier, des triangles ARS, BRS ſemblables aux rriangles qui ſont ſur le terrain en employant la troiſiéme méthode ci-deſſus, (*N.* 347.) & je trouve AB de même qu'auparavant.

350. PROBLEME. *Meſurer une hauteur acceſſible ou inacceſſible* (Fig. 217.).

Je prens un point R dans la campagne, & mettant le Graphometre dans une ſituation perpendiculaire à l'horiſon, en ſorte que ſon diamétre ſoit horizonral; je viſe par le diametre au point M, & tournant la regle, je viſe au ſommet B, & je meſure l'angle BHM. Suppoſant donc que je puiſſe approcher de la hauteur AB, j'ai un triangle HMB dans lequel je connois le côté HM & l'angle aigu BHM, & par conſéquent l'autre angle HBM m'eſt auſſi connu d'où je connoîtrai aiſément le côté BM, (*N.* 336.) & ajoûtant à ce côté la hauteur HR ou MA de l'inſtrumenr, j'aurai la valeur de BA.

Si je dois agir ſans Graphometre, je plante un piquet TS entre R & A à trois ou quatre toiſes de diſtance, & viſanr horizontalement en M, & enſuite en B, j'obſerve les points N, S ou les rayons viſuels coupent le piquet TS, & je meſure NS; je porte HM ſur un papier, par le moyen de mon échelle; je prens ſur cette ligne une partie égale à la diſtance RT ou HN, & j'éleve en N la perpendiculaire NS égale à la valeur que j'ai trouvée ſur le piquer, après quoi je mene HSB qui coupe la perpendiculaire MB en B,

& portant MB ſur l'échelle, je trouve ſa valeur, à laquelle ajoutant la valeur de MA, j'ai la hauteur entiere AB.

Si le pied de la hauteur AB n'eſt pas acceſſible, je prens un autre point Z qui ſoit en ligne droite avec les points A, R, & après avoir fait en R les opérations qu'on vient de dire, je porte le graphometre en Z, & viſant en M, puis en B, je meſure l'angle BFM & la baſe FH; or l'angle FHB étant le complement à deux droits de l'angle BHM, eſt auſſi connu; donc, dans le triangle BFH dont la baſe & les deux angles ſur la baſe ſont donnés, je puis aiſément connoître le côté BH, & par le moyen de ce côté BH & de l'angle aigu BHM; je puis cônnoître auſſi le côté BM, &c.

On peut aiſément ſe ſervir de la troiſiéme méthode ci-deſſus, pour ce cas ci, de même que pour les précédents.

351. PROBLEME. *Mener une ligne paralelle à une ligne* AB *inacceſſible* (Fig. 218.).

Je cherche la longueur AB ainſi que ci-deſſus, (*N.* 349.) & & faiſant en R l'angle VRO égal à l'angle RAB que j'ai connu par le moyen du triangle RAB; la ligne RO eſt la paralelle demandée, à cauſe que les angles VRO, RAB du même côté ſont égaux.

Si je ne me ſers point d'inſtrument, je tranſporte ſur le papier, la baſe RS & les triangles RAS, RBS; je mene enſuite la droite AB, & du point R la droite RO paralelle à AB; je prens ſur RO & RS les parties RY, RT égales entr'elles, & de quatre ou cinq toiſes chacune, & je meſure par le moyen de mon échelle, la droite TY; je prens ſur le terrain la partie RT de quatre toiſes, & mettant un piquet en R & un autre en T auſquels j'attache des cordeaux; je fais le cordeau RY de quatre toiſes, & le cordeau TY égal au nombre de toiſes que j'ai trouvé pour la valeur de TY; je tens les deux cordeaux juſqu'à ce que leurs extrémités ſe touchent en Y, & le triangle RYT eſt ſemblable au triangle RYT, ſur le papier; ainſi RY ſur le papier étant paralelle à AB, la même RY ſur le terrain ſera auſſi paralelle à AB.

352. PROBLEME. *Lever le plan d'une grande Campagne* (Fig. 219.).

Je prens une baſe AB, d'où j'obſerve pluſieurs points tels que C, D, E, H, &c. auſquels je viſe par les extrêmités AB de ma baſe; ainſi je puis connoître aiſément les diſtances CD, DE, HG, GF de tous les points qui ſont à gauche ou à droite de ma

baſe, & leurs diſtances aux extrêmités de la baſe; c'eſt pourquoi j'aurai les poſitions de tous ces points. Quand au point L qui eſt en ligne droite avec la baſe AB, je prens une autre baſe AM, & de ſes extrêmités A, M, je viſe aux points C, L, & par conſéquent je connoîtrai comme ci-deſſus la droite LC, la droite LM, &c. ce qui me donnera la poſition du point L; & je ferois la même choſe s'il ſe trouvoit du côté de B un point qui fût en ligne droite avec AB; tout ceci eſt ſi facile qu'il ſuffit d'en indiquer les voyes.

353. PROBLEME. *Lever le plan d'un endroit fermé dans lequel on ne ſauroit entrer* (Fig. 220.).

Je meſure le côté AB, & le prolongeant enſuite en R, je meſure l'angle extérieur RBC, & le côté BC; ce qui me donne la poſition des deux côtés AB, BC; je prolonge BC en S, & je meſure l'angle SCD & le côté CD; ce qui me donne la poſition CD, & j'acheve le reſte de la même façon.

Comme la muraille BC pourroit empêcher de prendre l'angle RBC avec le graphometre, il faut, ſur le prolongement BRN, prendre un point R, d'où l'on menera une droite RH paralelle à BC, & l'on meſurera l'angle NRH qui eſt égal à l'angle RBC, & ainſi des autres.

Si je veux agir ſans inſtrument, je prens ſur le prolongement BR & ſur le côté BC les parties BP, BM de la valeur d'environ quatre ou cinq toiſes; je meſure la droite MP, & tranſportant le tout ſur le papier, par le moyen de mon échelle; j'ai la poſition des deux côtés AB, BC, & je fais la même choſe à l'égard des autres côtés.

354. PROBLEME. *Lever le plan d'un lieu hors duquel on ne peut ſortir, & dans le milieu duquel on ne ſauroit pénétrer* (Fig. 221.).

Je meſure les côtés EA, AB & l'angle compris A, & le tout étant tranſporté ſur le papier, j'ai la poſition des deux côtés EA, AB, & ainſi des autres.

Du Nivellement.

355. Une ligne droite eſt dite *de Niveau*, lorſque tous ſes points ſont également éloignés du centre de la terre; & comme la figure de la Terre approche beaucoup de la figure Sphérique; il s'enſuit qu'une ligne de niveau eſt une ligne circulaire.

356. Si

356. Si l'on plante à plomb ſur la ſurface de la terre, un piquet AO (*Fig.* 222.) à l'extrêmité duquel on ait mis une lunette ou une regle 1, 5, qui lui ſoit perpendiculaire, & qu'on vienne à travers la lunette ou par les pinules miſes aux extrêmités de la regle, un objet éloigné D; le rayon viſuel AD ſera tangente de la ligne de niveau AC, & s'en écartera d'autant plus qu'il ſera plus long; cependant comme cette ligne AD nous paroît horizontale, on la nomme ligne de *Niveau apparent*, & on la prend même pour la ligne de vrai niveau AB, lorſque ſa longueur AD n'eſt pas au-deſſus de 100 ou de 110, parce que la circonférence de la terre étant extrêmement grande à l'égard de 100 ou 110 toiſes, le hauſſement BD du point D du niveau apparent au-deſſus de B n'eſt pas ſenſible; mais lorſque AD devient plus longue, la différence BD commencera à ſe faire ſentir, & l'on doit néceſſairement la corriger comme on verra bien-tôt.

357. Le niveau dont on ſe ſert le plus communément, lorſqu'il ne s'agit que d'une diſtance de 100 ou 110 toiſes, eſt le niveau d'eau; il eſt compoſé d'un tuyau de fer blanc ABCD (*Fig.* 223.) recourbé à ſes extrêmités, à chacune deſquelles on met un autre petit tuyau de verre. Au milieu O, eſt un autre tuyau de fer blanc qui lui eſt perpendiculaire & dans lequel on enchaſſe un piquet qu'on plante à plomb ſur le terrein. Quand on veut ſe ſervir de cet inſtrument, on le remplit d'eau, & alors la ſurface d'eau RS qui paroît à travers le tuyau de verre mis en A, ſe met de niveau avec la ſurface d'eau TX qui paroit en D; l'expérience nous apprend que les liquides qui agiſſent librement, ſe mettent toujours de niveau; ainſi, ſi l'on viſe de R en X, le rayon viſuel R aura ſes extrêmités R, X de niveau, & ſi l'on viſe en Z, la ligne RZ ſera une ligne de niveau apparent.

358. Les autres niveaux dont on ſe ſert pour les diſtances plus grandes que 100 ou 110, ne différent preſque de celui-ci, qu'en ce qu'on employe des verres de lunette au lieu d'eau, pour voir plus diſtinctement les objets; on en trouve les deſcriptions dans le Traité de Nivellement de Mr. *Picard* mis au jour par Mr. *de la Hire*, & dans celui de *Bullet*.

359. Le Nivellement ſe nomme ſimple lorſqu'il peut ſe faire d'un ſeul coup de niveau, & on le nomme compoſé lorſqu'il eſt néceſſaire de donner pluſieurs coups de niveau pour parvenir à ce qu'on cherche.

360. PROBLEME. *Deux points* A, B (Fig. 224.) *étant donnés ſur*

le terrain, trouver ſi ces deux points ſont de niveau, ou lequel des deux eſt plus éloigné du centre de la terre, & de combien.

Suppoſons d'abord que la diſtance AB ne ſoit pas au-deſſus de 100 ou 110 toiſes, je mets le niveau en A, & j'envoye en B un homme à qui je donne une double toiſe qu'il doit mettre à plomb en B, & un carton ſur lequel eſt une grande ligne noire, & je lui ordonne de faire gliſſer ce carton le long de la double toiſe, enſorte que la ligne noire ſoit toujours perpendiculaire ſur la toiſe. Je viſe par les ſurfaces R, S de l'eau, & lorſque je m'apperçois que la ligne noire du carton paſſe par l'extrêmité T du rayon viſuel RST, je fais ſigne à mon aide de s'arrêter, afin qu'il meſure la hauteur TB, & je meſure en même tems la hauteur VA du rayon viſuel. J'ordonne a mon Aide de revenir, & ſi la hauteur TB qu'il a trouvée ſe trouve égal à la mienne AV, les deux points A, B ſont de niveau; car les points V, T étant également éloignés du centre de la terre; ſi de ces diſtances égales je retranche les parties égales VA, TB, les points AB ſeront auſſi également éloignés du même centre; que ſi la hauteur TB eſt moindre que la hauteur VA, je retranche TB de VA, & le reſte HA fait voir que le point A eſt plus proche du centre de la terre que le point B de la quantité HA; & il eſt aiſé de voir ce qu'il faudroit faire ſi TB étoit plus grand que VA.

Si la diſtance AB (*Fig.* 225.) eſt au-deſſus de 100 toiſes, ſans être au-deſſus de 200; je coupe cette diſtance en deux parties égales AC, CB, & mettant le niveau en C; je viſe d'abord du point R par le point S au point T; enſuite je viſe du point S par le point H, & ſi je trouve que les deux hauteurs AH, BT ſoient égales, les points AB ſeront de niveau; mais ſi l'une eſt plus grande que l'autre, je retranche la moindre de la plus grande, & le reſte me fait voir de combien l'un des points eſt plus élevé que l'autre, ou de combien il eſt plus éloigné du centre de la terre.

Que ſi la diſtance AM eſt au-deſſus de 200 toiſes, je la coupe en parties égales, dont chacune ne ſoit pas au-deſſus de 100: par exemple, en trois AC, CB, BM, puis mettant mon niveau en C, je nivelle les deux points A, B, après quoi mettant le niveau en B, j'éleve les points B, M & ainſi des autres.

361. *Remarque.* Cette méthode eſt excellente pour ſe paſſer du calcul qu'il faut néceſſairement faire lorſqu'il eſt queſtion de corriger l'erreur des coups de niveau trop étendus; mais comme

elle oblige à multiplier les opérations; nous allons voir de quelle maniere ſe doivent faire les corrections dont nous venons de parler.

362. PROBLEME. *Corriger les erreurs du Niveau apparent.*

Suppoſons que le cercle ADI (*Fig.* 226.) repréſente la ſurface de la terre, & que la diſtance AD des deux points A, D qu'on veut niveler, ſoit de 500 toiſes, le niveau apparent AB ſera la tangente, & la droite BOI menée par le centre, ſera la ſecante; ainſi nous aurons BD. BA :: BA. BI; (*N.* 271.) or, la partie DB de la ſecante étant extrêmement petite, à l'égard du diamétre DI de la terre, on ne peut la négliger; & par conſéquent DB. BA :: BA. DI, d'où je tire $DB \times DI = \overline{BA}^2$ & $DB = \frac{\overline{BA}^2}{DI}$; c'eſt-à-dire que ſi on diviſe le quarré de la diſtance AB par le diametre de la terre, le quotient ſera le hauſſement du niveau apparent audeſſus du vrai.

Or, ſelon Meſſieurs *Picard* & *de la Hire*, le diamétre de la Terre eſt de 653894 toiſes; faiſant donc le quarré 250000 de la diſtance BA = 500 toiſes, & le diviſant par 653894, je trouve 2 pouces 9 lignes pour le hauſſement BD, ainſi après avoir nivelé à l'ordinaire, je dois retrancher 2 pouces 9 lignes de la hauteur que je trouve du côté de B lorſque je viſe de A en B.

363 REMARQUE. Quoique cette méthode ne paroiſſe pas de la derniere exactitude, cependant elle eſt extrêmement juſte; car ſi au quarré de AB on ajoûte le quarré de AO, ces deux quarrés enſemble ſeront égaux au quarré de l'hypothénuſe BO, & tirant la racine quarrée, on aura la valeur de BO, de laquelle retranchant DO = AO, on trouvera que la valeur de BD eſt effectivement 2 pouces 9 lignes, comme ci-deſſus.

364. COROLLAIRE. *Les hauſſemens* BD, EH &c. *de différents points* B, E, &c. *du Niveau apparent, ſont comme les quarrés de leurs diſtances* AB, AE &c. *au point* A *où ſe fait le nivellement.*

Nous avons $BD = \frac{\overline{AB}^2}{DI}$ (*N.* 362.) & par la même raiſon $EH = \frac{\overline{AE}^2}{DI}$; donc nous avons BD. EH :: $\frac{\overline{AB}^2}{DI} \cdot \frac{\overline{AE}^2}{DI}$; or, les deux derniers termes étant diviſés par la même grandeur DI, ſont entre eux comme s'ils n'étoient pas diviſés; donc BD. EH :: $\overline{AB}^2$. $\overline{AE}^2$.

165. COROLLAIRE II. *Connoiſſant donc le hauſſement* BD *d'un point* B *de niveau apparent, on peut connoître les hauſſemens de tous les autres points* E, &c. *de ce niveau dont on connoît les diſtances* AE, &c.

Car je n'ai qu'à dire par regle de Trois, comme le quarré de AB eſt au quarré de AE; ainſi le hauſſemeut connu BD eſt à un quatriéme terme qui ſera le hauſſement cherché EH; & ainſi des autres.

C'eſt de cette maniere que Mr. *Picard* a calculé les hauſſemens des points de niveau apparent au-deſſus du vrai niveau, depuis la diſtance de 50 toiſes, juſqu'à celle de 4000.

Table des Hauſſemens du Niveau apparent.

Diſtances.	*Hauſſemens.*			*Diſtances.*	*Hauſſemens.*		
Toiſes.	*Pieds.*	*Pouces.*	*Lignes.*	*Toiſes.*	*Pieds.*	*Pouces.*	*Lignes.*
50	0	0	$\frac{1}{5}$	750	0	6	3
100	0	0	$1\frac{1}{5}$	800	0	7	1
150	0	0	3	850	0	7	$11\frac{1}{2}$
200	0	0	$5\frac{1}{5}$	900	0	8	11
250	0	0	$8\frac{1}{5}$	950	0	10	0
300	0	1	0	1000	0	11	0
350	0	1	$4\frac{1}{5}$	1250	1	5	$2\frac{1}{2}$
400	0	1	$9\frac{1}{5}$	1500	2	0	9
450	0	2	3	1750	2	9	$8\frac{1}{2}$
500	0	2	9	2000	3	8	0
550	0	3	6	2500	5	8	9
600	0	4	0	3000	8	3	0
650	0	4	8	3500	11	2	9
700	0	5	4	4000	14	8	0

366. PROBLEME. *Niveler deux termes dont on ne connoît pas la diſtance.*

Je mets le niveau en A (*Fig.* 227.) & je viſe en B; je tranſporte le niveau en B & je viſe en A. Je meſure les hauteurs CA, SB; j'en retranche de part & d'autre la hauteur AR ou BT de l'inſtrument, & ſi les reſtes CR, ST ſont égaux, je dis que les points A, B ſont de niveau; car le hauſſement du niveau apparent, lorſque je viſe de A en B, eſt le même que le hauſſement lorſque je viſe de B en A; donc les points C, S doivent être également éloignés du centre de la terre; & par conſéquent à cauſe

de CA = SB, les points A, B en doivent être auſſi également éloignés.

Si les reſtes ST, CR (*Fig.* 228.) ſont inégaux, je retranche le moindre CR du plus grand ST, & la moitié du reſte marque de de combien le point A eſt au-deſſus du niveau du point B; car ſuppoſons que le point A ſe trouvât en un point F qui fût de niveau avec le point B; le niveau au lieu d'être en R, ſeroit en X, & les hauteurs LT, CX ſeroient égales; or, le point A venant à s'élever, le niveau s'éleve auſſi de X en R; ce qui fait augmenter la hauteur LT de la quantité LS; & de l'autre côté, la hauteur CX diminuë d'une quantité égale à LS; ainſi CR = LT — LS; rettanchant donc de la hauteur ST, la hauteur CR ou LT — LS, le reſte ST — LT + LS eſt égal à 2LS ou à deux fois la hauteur SL ou AF du point A au- deſſus du point F; donc la moitié de ce reſte eſt la hauteur AF.

Et il ne faut pas dire que la hauteur AF ou RX n'eſt pas égale à la hauteur SL, à cauſe que les lignes RF, SB ne ſont pas paralelles, puiſqu'elles vont aboutir au centre de la terre; la diſtance des points F, B au centre de la terre étant extrêmement grande à l'égard des lignes RF, SB & de leur diſtance FB qui eſt auſſi très-petite par rapport à la circonférence de la terre; les deux lignes FR, SB peuvent paſſer pour paralelles; ce qui rend les parties RX, SL ſenſiblement égales.

Enfin, ſi je trouve d'une part la hauteur SB (*Fig.* 229.) plus grande que la hauteur BT, & de l'autre, la hauteur AX moindre que la hauteur AR du même niveau; j'ajoûte l'excédent ST au défaut RX, & la moitié de la ſomme eſt la hauteur du point A au-deſſus de niveau du point B; car ſuppoſons que le point A s'abbaiſſe en F où il ſoit du niveau avec le point B, le niveau au lieu d'être en R, deſcendra en V, & les hauteurs HT, XV ſeront égales. Or, le niveau montant en R, la hauteur HT augmente d'une partie SH égale à AF, & le point X au lieu d'être au-deſſus du niveau, comme il étoit auparavant, ſe trouve au-deſſous, en ſorte que la partie XV dont il ſurpaſſoit le niveau jointe à la partie RX dont il en eſt ſurpaſſé, ſont enſemble égales à SH; donc RX = SH — HT; & par conſéquent ajoûtant ST ou SH + HT avec RX ou SH — HT, la ſomme 2SH eſt le double de SH ou de la hauteur AF du point A au-deſſus du point B.

Cette méthode eſt excellente pour niveler des termes dont il ſeroit trop embaraſſant de trouver la diſtance.

367. PROBLEME. *Niveler deux termes* A, R (Fig. 230.) *entre leſquels il ſe trouve des hauteurs & des deſcentes.*

Je donne pluſieurs coups de niveau en montant de A en S, puis en deſcendant de S en X; enſuite en remontant de X en Z, & enfin en redeſcendant de Z en R; je fais une colonne de toutes les hauteurs que j'ai trouvées en montant de A en S & de X en Z, & une colonne de celles que j'ai trouvées en deſcendant de S en X & de Z en R; puis faiſant les ſommes de chacune de ces colonnes, je retranche la petite de la grande, & le reſte marque la hauteur du point A au-deſſus du point R; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

CHAPITRE IX.

De la Planimétrie ou Meſure des Surfaces planes, & de leur rapport entr'elles.

368. NOus nommerons *Elémens* d'une ſurface plane les lignes infiniment proches dont on conçoit qu'elle eſt compoſée; toute ligne CR (*Fig.* 231.) qui coupera perpendiculairement tous les Eléments, ſera la ligne qui exprimera leur multitude ou la ſomme de leur épaiſſeur, ou leur épaiſſeur totale.

369. PROPOSITION LXXXVII. *Les paralellogrammes* ABCD, EBCF (Fig. 232.) *qui ont la même baſe* BC *& qui ſont entre deux paralelles* AF, BH, *ſont égaux entr'eux.*

A cauſe des paralellogrammes, nous avons AB = DC, BE = CF, & AD = EF; ajoûtant donc à ces deux dernieres, la partie DE, nous aurons AE = DF; donc les deux triangles AEB, DCF ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, ſont parfaitement égaux; (*N.* 100.) je retranche de part & d'autre le petit triangle DOE, & j'ai ADOB = OEFC, & ajoûtant de part & d'autre le petit triangle BOC, je trouve ABCD = EBCF; donc, &c.

370. COROLLAIRE Ier. *Les paralellogrammes* ABCD, EMHF *qui ſont entre deux paralelles* AF, BH, *& qui ont les baſes égales* BC, HM, *ſont égaux.*

Je mene les droites BE, CF; j'ajoûte aux deux droites égales AD, EF, la partie commune DE, & j'ai AE = DF, & AB = DC; or, l'angle EAB = FDC; donc les triangles EAB, FDC

ayant les côtés EA, AB égaux chacun à chacun aux côtés ED, DC, & l'angle compris égal à l'angle compris, ſont parfaitement égaux, & l'angle AEB eſt égal à l'angle DFC, ainſi les droites BE, CF étant égales & également inclinées entre les paralelles AF, BH, ſont paralelles entr'elles, & par conſéquent EBCF eſt un paralellogramme ; or, EBCF=ABCD; (*N.* 369.) & par la même raiſon EBCF=EMHF; donc ABCD =EMHF.

371. COROLLAIRE II. *Tout paralellogramme* EBCF *eſt égal au produit de ſa baſe* BC *multipliée par ſa hauteur ou par la perpendiculaire* ER *menée de ſon ſommet ſur ſa baſe.* Suppoſons que le paralellogramme ABCD ſoit rectangle, le produit de la baſe BC multipliée par la hauteur AB ſera valeur de ce rectangle ; or, le paralellogramme EBCF eſt égal au rectangle; donc le paralellogramme EBCF eſt auſſi le produit de ſa baſe BC par ER ou par ſon égale AB.

373. COROLLAIRE III. *Les paralellogrammes* BEFC, MEFH *qui ont les baſes & les hauteurs égales, ſont égaux.* Ils ſont chacun égaux à un rectangle BADC qui auroit même baſe & même hauteur qu'eux, ou qui ayant la baſe égale à la baſe ſeroit entre mêmes paralelles; donc, &c.

373. COROLLAIRE IV. *Les paralellogrammes qui ont les baſes inégales & les hauteurs égales, ſont entr'eux comme les baſes; ceux qui ont les hauteurs inégales & les baſes égales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs, & ceux qui ont les hauteurs réciproques à leurs baſes ſont égaux entr'eux.*

Suppoſons que la baſe BC du paralellogramme BADC ſoit plus grande que la baſe MH du paralellogramme EMHF, & que les hauteurs AB, ER ſoient égales; le paralellogramme BADC eſt donc le produit de ſa baſe BC par ſa hauteur BA, & le paralellogramme MEFH eſt auſſi le produit de ſa baſe MH par ſa hauteur ER ou par ſon égale BA; mais nous ſçavons que ſi deux grandeurs inégales BC, MH ſont multipliées par une même grandeur BA, les produits ſont entr'eux comme les grandeurs inégales BC, MH; donc les deux paralellogrammes ſont entr'eux comme leurs baſes inégales BC, MH.

Si l'on ſuppoſe que les baſes BC, MH ſont égales & leurs hauteurs BA, ER inégales, on démontrera de la même façon que les deux paralellogrammes ſont entr'eux comme leurs hauteurs.

Enfin, ſi les hauteurs ſont réciproques aux baſes, on démontrera comme ci-deſſus (*N.* 184.) que les paralellogrammes ſont égaux.

374. COROLLAIRE V. *Les triangles* ABC, AEC (Fig. 233.) *qui ont même baſe & qui ſont entre deux paralelles ſont égaux.*

Je mene CR paralelle à AB, & CH paralelle à AE, ce qui me donne les deux paralellogrammes égaux ABRC, AEHC; (*N.* 369.) mais BC étant la diagonale du paralellogramme ABRC, le triangle ABC eſt la moitié de ce paralellogramme, & par la même raiſon, le triangle AEC eſt la moitié du paralellogramme AEHC; donc ces deux triangles ſont égaux à cauſe que les moitiés ſont entr'elles comme leur tout.

375. COROLLAIRE VI. *Tout triangle eſt égal au produit de ſa baſe multiplié par la moitié de ſa hauteur.* Car tout triangle eſt la moitié d'un paralellogramme de même hauteur & de même baſe; mais le paralellogramme eſt le produit de ſa baſe par ſa hauteur; donc le triangle eſt le produit de la baſe par la moitié de ſa hauteur.

376. COROLLAIRE VII. *Donc*, 1°. *Les triangles qui ont des baſes égales & qui ſont entre mêmes paralelles ou qui ont des hauteurs égales, ſont égaux*, 2°. *Ceux qui ont des baſes inégales & des hauteurs égales, ſont entre eux comme leurs baſes*, 3°. *Ceux qui ont des hauteurs inégales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs*, 4°. *Ceux qui ont les hauteurs réciproques aux baſes, ſont égaux.* Tout cela eſt évident, par la raiſon que les triangles ſont moitiés des paralellogrammes de même baſe & de même hauteur qu'eux.

377. COROLLAIRE VIII. *Tout polygone régulier* EFCGH (Fig. 234.) *eſt égal à un triangle* ABC; *donc la baſe* BC *eſt égale au circuit du polygone, & la hauteur* AB *eſt égale à l'apothême* OR.

Suppoſons que le polygone ſoit un pentagone; du centre O je mene des rayons à tous les angles, ce qui le diviſe en cinq triangles de même hauteur & de même baſe; or le triangle OHG eſt égal à ſa baſe HG multipliée par la moitié de ſa hauteur OR; (*N* 375.) donc le pentagone eſt égal à 5HG multiplié par $\frac{1}{2}$ OR; mais le triangle ABC eſt égal à BC multiplié par $\frac{1}{2}$ AB, (*N.* 375.) & par la ſuppoſition, nous avons BC = 5HG, & AB = OR; donc le triangle ABC eſt égal au polygone.

378. COROLLAIRE IX. *Tout cercle eſt égal à un triangle qui auroit*

roit pour baze une ligne égale à la circonférence, & pour hauteur une ligne égale au rayon.

Le cercle eſt un polygone d'une infinité de côtés dont le circuit eſt la circonférence, & dont l'apothéme n'eſt pas différent du rayon, à cauſe que les côtés ſont infiniment proches de la circonférence. Donc, &c.

Ceci peut ſe démontrer encore en cette ſorte : ſoit le cercle BQM (*Fig.* 235.) dont le rayon eſt OB ; je conçois que du même centre O, & par tous les points infiniment proches du rayon, ſoient décrites des circonférences CRS, DHN, &c. qui ſeront les élemens du cercle, enſorte que leur ſomme ne différera pas du cercle même. Du point B, j'éleve la perpendiculaire BA que je conçois égale à la circonférence BQM. Du point A, je mene au centre la droite AO ; & de tous les points de diviſion, je conçois des droites CF, DG, & paralelles à la droite BA, & qui ſe terminent ſur AO ; les cercles BQM, CRS étant ſemblables (*N.* 287.), nous avons BQM. CRS :: OB. OC, & à cauſe des triangles ſemblables OBA, OCF, nous avons auſſi BA. CF :: OB. OC ; donc BQM. CRS :: BA. CF ; mais par la ſuppoſition BQM = BA, donc CRS = CF ; & on prouvera de même que la circonférence DHN eſt égale à la droite DG ; d'où il ſuit que tous les élemens DG, CF, BA du triangle OBA ſont égaux chacun à chacun à tous les élemens du cercle BQM, & que par conſéquent ce cercle eſt égal au triangle OBA, qui a pour baſe la droite BA égale à la circonférence, & pour hauteur le rayon OB.

379. Corollaire X. Donc *tous les cercles de differens rayons, tels que* BQM, CRS, DHN, &c. *peuvent ſe changer en triangles ſemblables* OBA, OCF, ODG, &c.

380. Corollaire XI. *Toute couronne, c'eſt-à-dire, tout eſpace compris entre deux circonférences* BQM, CRS *concentriques & inégales, eſt égale à un trapezoïde* BCFA, *dont les côtés paralelles & inégaux* BA, CF *ſont égaux chacun à chacun aux deux circonférences, & dont la hauteur* CB *eſt la différence des rayons* OB, OC. Car la couronne n'eſt autre choſe que le cercle BQM moins le cercle CRS ; or, le cercle BQM eſt égal au triangle OBA, & le cercle CRS eſt égal au triangle OCF, donc la couronne eſt égale au triangle OBA, moins le triangle OCF ; c'eſt-à-dire au trapezoïde BCFA.

381. *Remarque.* De tout ce que nous venons de dire, il pa-

roit s'enſuivre qu'on peut trouver la quadrature du cercle, c'eſt-à-dire une figure rectiligne égale au cercle; mais la difficulté conſiſte à trouver une ligne droite égale à la circonférence, & c'eſt à quoi il n'y a pas d'apparence qu'on parvienne ſi-tôt.

Comme les côtés des polygones inſcrits & circonſcrits au cercle, approchent d'autant plus de la circonférence que leur nombre eſt plus grand, il eſt ſûr qu'à force d'inſcrire & de circonſcrire des polygones ſemblables, on en trouveroit à la fin deux dont les côtés ſe confondroient avec la circonférence, mais parce qu'il faudroit pour cela faire des calculs à l'infini, ce qui n'eſt pas poſſible. *Archiméde* n'a pouſſé le ſien que juſqu'aux polygones inſcrit & circonſcrit de 96 côtés; & il a trouvé que le diamétre étoit au circuit du polygone circonſcrit, comme 1 eſt à $3\frac{1}{7}$, ou comme 7 à 22, & que le même diamétre étoit au circuit du polygone inſcrit, comme 1 à $3\frac{10}{71}$, ou comme 7 à $21\frac{70}{71}$, de ſorte qu'en réduiſant le diamétre 7, & les deux circuits 22, & $21\frac{70}{71}$ au même dénominateur 71, ce qui donne $\frac{497}{71}$ pour le diamétre, & $\frac{1562}{71}$, $\frac{1561}{71}$ pour les deux circuits, la différence des deux circuits eſt un, c'eſt-à-dire, une partie du diamétre diviſé en 497 parties ou $\frac{1}{497}^{e}$ du diamétre. Or, comme la circonférence du cercle approche beaucoup plus du circuit du polygone circonſcrit, que de celui de l'inſcrit, il eſt clair que la différence de la circonférence du cercle au circuit du polygone circonſcrit doit être moindre que la moitié de la 497e partie du diamétre, c'eſt-à-dire moindre que la 994e partie du diamétre, & c'eſt pourquoi on ſe ſert plutôt du rapport de 7 à 22, pour exprimer le rapport du diamétre du cercle à ſa circonférence, que du rapport de 7 à $21\frac{70}{71}$; cependant quoique le rapport de 7 à 22 ſoit aſſez juſte dans la pratique, les Géométres qui ſe piquent de grande exactitude, employent ordinairement des nombres plus grands pour diminuer la différence; celui qui me paroit le plus commode pour l'uſage, c'eſt le rapport de 1000 à 3141, parce que dans les Régles de Trois qu'il faut faire le nombre 1000, épargne quelquefois une multiplication, & quelquefois une diviſion.

382. PROBLEME. *Trouver l'aire d'un cercle dont on connoît le rayon* OB (Fig. 236.).

Soit le rayon OB de 3 toiſes; le diamétre en contiendra 6; ainſi je n'ai qu'à dire par Régle de Trois 1000 eſt à 3141, comme 6 eſt à un quatriéme terme, & ce quatriéme terme ſera la circonférence, laquelle étant multipliée par la moitié du rayon don-

nera l'aire du triangle OBA, lequel eſt égal à la ſurface du cercle.

383. COROLLAIRE. Si on connoiſſoit la circonférence du cercle, & qu'on cherchât le rayon pour trouver enſuite la ſurface du cercle; on diroit par Régle de Trois: 3141 eſt à 1000, comme la circonférence donnée eſt à un quatriéme terme, qui ſeroit le diamétre de la circonférence donnée, & par conſéquent la moitié de ce diamétre ſeroit le rayon cherché.

384. COROLLAIRE II. *Tout ſecteur* ABC (Fig. 236.) *eſt égal au produit de ſon arc* AC *multiplié par la moitié du rayon* AB. Le cercle ARC étant un polygone régulier d'une infinité de côtés eſt compoſé d'une infinité de triangles qui ont tous pour hauteur le rayon, & dont la ſomme des baſes eſt égale à la circonférence, & par la même raiſon le ſecteur ABC eſt compoſé d'une infinité de petits triangles qui ont auſſi pour hauteur le rayon AB, & dont la ſomme des baſes eſt égale à l'arc RC; mais la ſomme des triangles qui compoſent le cercle eſt égale à la ſomme totale des baſes ou à la circonférence multipliée par la moitié du rayon; donc la ſomme des triangles qui compoſent le ſecteur, eſt égale à la ſomme totale des baſes, c'eſt-à-dire à l'arc AC multiplié par la moitié du rayon.

385. COROLLAIRE III. *L'aire d'un ſegment* ASC *eſt égale au ſecteur* ABCS, *moins le triangle* ABC. Ce qui eſt évident.

386. PROBLEME. *Meſurer un Trapezoïde* ABCD (Fig. 237.).

J'ajoûte enſemble les deux baſes AD, BC, & multipliant leur ſomme par la moitié de la hauteur ou de la perpendiculaire AB, menée entre les deux baſes, le produit eſt la valeur du trapezoïde. Ce que je démontre ainſi:

Je diviſe l'un des côtés non-paralelles DC en deux également en O, & du point A par le point O, je mene la droite AR qui coupe BC prolongé en R. Les triangles ADO, OCR ayant l'angle AOD égal à l'angle COR qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'angle ADO égal à ſon alterne OCR, & le côté DO égal au côté OC, ſont parfaitement égaux (*N.* 100.), & le côté AD eſt égal au côté CR; ajoutant donc de part & d'autre la partie commune AOCB, nous aurons le trapezoïde ADCB égal au triangle ABR; mais le triangle ABR eſt égal au produit de ſa baſe BR ou BC + AD multipliée par $\frac{1}{2}$ AB (*N.* 375.); donc le trapezoïde eſt égal au même produit.

Ou bien je coupe les côtés non-paralelles AB, DC (*Fig.* 238.)

chacun en deux également en R, S, & menant la droite RS qui ſera paralelle à AD ou BC, je multiplie cette ligne RS par la hauteur AB, ce qui donne la valeur du trapezoïde, & pour le prouver :

Du point S, je mene FE perpendiculaire ſur BC, & qui rencontre AD prolongé en E; les triangles DSE, CSF ayant l'angle DSE égal à l'angle CSF qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'angle EDS égal à ſon alterne FCS, & le côté DS égal au côté SC ſont parfaitement égaux. Ajoutant donc à chacun d'eux la partie commune ADSFB, nous aurons le rectangle AEBF égal au trapezoïde ADCB; mais le rectangle eſt égal au produit de BF ou RS par la hauteur AB, donc le trapezoïde eſt égal au même produit.

387. PROBLEME. *Meſurer une bande à retours* ABCDEFG (Fig. 239.).

Je coupe les droites AH, BG, CF, DE, chacune en deux également, & par les points de diviſion, je mene la ligne ORST, laquelle étant multipliée par la largeur AH de la bande, donne la ſurface de cette bande; car le trapezoïde ABGH eſt égal au produit de OR multiplié par AH (*N.* 386.) le trapezoïde BCFG eſt égal à RS × AH, & le trapezoïde CDEF eſt égal à ST × AH; mais ces trapezoïdes compoſent la bande; donc cette bande eſt égale à OR × AH + RS × AH + ST × AH ou ORST × AH.

388. COROLLAIRE. Une couronne ABCDEFGN (*Fig.* 240.) étant égale au trapezoïde EART, dont les baſes paralelles AR, ET ſont égales chacune à chacune aux deux circonférences, & dont la hauteur eſt la différence AE des deux rayons; il eſt clair que ſi du centre O & du point H qui diviſe AE en deux également, on décrit une circonférence, la couronne ſera égale à cette circonférence multipliée par AE, car cette circonférence ſera égale à la droite HS qui coupe en deux également les côtés non-paralelles AE, RT du trapezoïde, &c.

389. PROBLEME. *Meſurer une figure irrégulière* ABDEC (Fig. 241.).

De l'un des angles C, je mene des droites aux angles oppoſés, ce qui diviſe la figure en triangles; je meſure chacun de ces triangles, & leur ſomme me donne la valeur de la figure.

390. PROPOSITION LXXXVIII. *Les Rectangles, les Paralellogrammes & les Triangles, ſont en raiſon compoſée de la raiſon de leurs hauteurs, & de celle de leurs baſes.*

Soient comme dans la Figure 242, deux rectangles, dont la

hauteur de l'un eſt *a*, la baſe *b*, la hauteur de l'autre *c*, & la baſe *d*; je compare la hauteur du premier à la hauteur du ſecond, & la baſe à la baſe, ce qui me donne les deux Raiſons *a*, *c*; *b*, *d*, je fais la raiſon compoſée de ces deux rayons, & j'ai *ab*, *cd*. Or, le premier terme *ab* de cette raiſon, étant le produit de la hauteur du premier rectangle par ſa baſe, eſt égal à ce rectangle, & par la même raiſon le ſecond terme *cd* eſt égal au ſecond rectangle; donc les deux rectangles ſont en raiſon compoſée de la raiſon de leurs hauteurs, & de celle de leurs baſes.

Les paralellogrammes étant égaux aux rectangles de même baſe & de même hauteur, ſont donc auſſi en raiſon compoſée de la raiſon de leurs hauteurs, & de celle de leurs baſes; & il faut dire la même choſe des triangles, à cauſe qu'ils ſont moitiés des rectangles de même hauteur & de même baſe.

391. PROBLEME. *Sur un côté donné* ab, *conſtruire une Figure ſemblable à une Figure donnée* ABCDE (Fig. 243.).

De l'un des angles A de la Figure donnée, je mene des droites AC, AD aux angles oppoſés; aux extrémités *a*, *b* de la droite donnée *ab*, je fais les angles *cab*, *cba* égaux chacun à chacun aux angles CAB, CBA, & par conſéquent le triangle *cab* eſt ſemblable au triangle CAB; je fais aux extrémités *a*, *c* de la droite *ac* les angles *dac*, *dca*, égaux chacun à chacun aux angles DAC, DCA, & le triangle *dac* eſt auſſi ſemblable au triangle DAC. Enfin, je fais aux extrémités *a*, *d* de la droite *ad* les angles *ead*, *eda*, égaux chacun à chacun aux angles EAD, EDA, & le triangle *ead* eſt ſemblable au triangle EAD; ainſi les Figures *abcde*, ABCDE étant compoſées d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, ſont ſemblables entr'elles (*N.* 164.).

392. PROPOSITION LXXXIX. *Les Figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ou des lignes ſemblablement poſées.*

Soient comme dans la Figure 244, deux rectangles ſemblables, enſorte qu'on ait *a. b* :: *c. d*; je fais le quarré *aa* de la hauteur *a* du premier, & le quarré *cc* de la hauteur *c* du ſecond. Or, le quarré *aa* ayant même hauteur que le premier rectangle *ab*; ces deux Figures ſont entr'elles comme leurs baſes *a*, *b* (*N.* 373.); donc *aa. ab* :: *a. b*; & par la même raiſon, nous avons *cc. cd* :: *c. d*; mais les raiſons *a*, *b*; *c*, *d*, ſont égales à cauſe des rectangles ſemblables *ab*, *cd*, donc les raiſons *aa*, *ab*, & *cc*, *cd* ſont auſſi égales, & partant nous avons *aa. ab* :: *cc. cd*, ou *aa. cc* :: *ab. cd*;

ce qui fait voir que les rectangles *ab*, *cd* ſont entr'eux comme les quarrés *aa*, *cc* de leurs côtés homologues *a* & *c*.

Or, à cauſe de la ſimilitude des Figures *ab*, *cd*, nous avons *a*. *c* :: *b*. *d*, donc *aa*. *cc* :: *bb*. *dd*, mais les deux rectangles ſont entr'eux comme les quarrés *aa*, *cc* de leurs hauteurs ; donc ils ſont auſſi comme les quarrés *bb*, *dd* de leurs baſes, & on démonrrera de la même façon qu'ils ſont comme les quarrés des lignes ſemblablement poſées, à cauſe que ces lignes ſont entr'elles comme les baſes, ou comme les hauteurs (*N.* 165.).

Les paralellogrammes ſemblables étant égaux aux rectangles de même hauteur & de même baſe, ſont donc auſſi entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, ou des lignes ſemblablement poſées, & il faut dire la même choſe des triangles ſemblables, à cauſe qu'ils ſont moitiés des rectangles de même hauteur & de même baſe.

Quant aux Polygones ſemblables réguliers ou irréguliers ; il eſt clair que ces Figures étant compoſées d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, tous ces triangles ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs baſes, &c. Par exemple, dans la Figure 243 les triangles ABC, *abc* ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs baſes BC, *bc*, de même les triangles ACD, *acd* ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs baſes CD, *cd*, ou comme les quarrés des baſes BC, *bc* à cauſe de BC. *bc* :: CD. *cd*, & ainſi de ſuite, & par conſéquent les Figures ſeront auſſi entr'elles comme les quarrés de BC, *bc*, ou de CD, *cd*, &c.

Enfin, les Cercles étant des polygones, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diamétres, &c.

393. PROPOSITION XC. *Si trois lignes* a, b, c, (Fig. 245.) *ſont en proportion continue, le quarré de la premiere eſt au quarré de la ſeconde, comme la premiere eſt à la troiſiéme.*

Je fais le rectangle *ab* de la premiere par la ſeconde, & j'y ajoute le quarré *aa* de la premiere. Je fais de même le rectangle *bc* de la ſeconde par la troiſiéme, & j'y ajoute le quarré *bb* de la ſeconde. Le quarré *aa* & le rectangle *ab* ayant même haureur, ſont entr'eux comme leurs baſes *a* & *b*, donc *aa*. *ab* :: *a*. *b*, & par la même raiſon *bb*. *bc* :: *b*. *c* ; mais les raiſons *a*, *b*, & *b*, *c* ſont égales par la ſuppoſition ; donc *aa*. *ab* :: *bb*. *bc*, ou *aa*. *bb* :: *ab*. *bc* ; & les rectangles *ab*, *bc*, ayant une dimenſion commune *b* ſont entr'eux comme leurs dimenſions inégales *a*, *c* ; donc

ab. bc :: *a. c*, & par conſéquent *aa. bb* :: *a. c*, ce qui fait voir que le quarré de la premiere ligne *a* eſt au quarré de la ſeconde, comme la premiere eſt à la troiſiéme.

394. *Remarque.* J'aurois pû démontrer ces propoſitions de la même façon que je l'ai fait dans l'Algebre ; mais j'ai été bien aiſe de faire voir qu'on peut tirer les vérités Géométriques des principes les plus ſimples de cette ſcience d'une maniere même plus naturelle qu'on ne le feroit par l'Algebre.

395. Proposition XCI. *Si ſur les trois côtés d'un triangle rectangle* ABC (Fig. 246.) *on conſtruit trois Figures ſemblables, la Figure* AHLC *faite ſur l'hypothenuſe* AC *eſt égale aux deux autres* ADEB, BFGC *faite ſur les deux autres côtés* AB, BC.

Les trois Figures étant ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues AC, AB, BC, mais le quarré de AC eſt égal aux quarrés des deux autres côtés AB, BC (*N.* 171.), donc la Figure AHLC eſt égale aux deux autres.

396. Corollaire. *Si ſur les trois côtés* AC, AB, BC (Fig. 247.) *du triangle rectangle* ABC, *on décrit des demi-cercles* AEBRC, AHB, BSC, *le triangle* ABC *eſt égal aux deux portions de cercles* AHBE, BSRC, *qu'on nomme communément* Lunules.

Les demi-cercles étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diamétres (*N.* 392.), & par conſéquent le demi-cercle AEBRC eſt égal aux deux autres, & retranchant de part & d'autre les ſegmens communs AEB, BRC, il reſte le triangle ABC égal aux deux Lunules.

397. Corollaire II. *Si le triangle rectangle* ABC (Fig. 248.) *eſt iſoſcele, chaque Lunule eſt égale à la moitié du triangle* ABC, *c'eſt-à-dire qu'en abaiſſant du ſommet* B *la perpendiculaire* BT, *la Lunule* AHBE *eſt égale au triangle* ABT, *& la Lunule* BSCR *égale au triangle* BTC. Les deux demi-cercles AHB, BSC ſont égaux à cauſe des diamétres égaux AB, BC, & les ſegmens AEB, BRC ſont auſſi égaux à cauſe des cordes égales AB, BC ; retranchant donc des deux petits demi-cercles les deux ſegmens, les deux Lunules reſtantes ſeront égales. Or, ces deux Lunules ſont égales au triangle ABC, donc chacune d'elles vaut la moitié de ce triangle.

398. *Remarque.* Ce n'eſt que dans le cas où le triangle rectangle ABC eſt iſoſcele, qu'on peut trouver en particulier la valeur de chaque Lunule, & alors l'une ou l'autre de ces Lunules ſe nomme Lunule d'*Hypocrate*, fameux Mathématicien, qui

vivoit du tems des Grecs, & qui le premier en a trouvé la quadrature; or, dans cette Lunule, il faut obſerver que le quart de cercle BTCR eſt égal au demi-cercle BSC, car le triangle BTC étant égal à la Lunule BSCR; ſi on ajoute de part & d'autre le ſegment BRC, on aura le quart de cercle BTCR égal au demi-cercle BSC. Et de-là, *Wiſthon*, célébre Anglois, a trouvé le moyen de diviſer la Lunule d'Hypocrate en telles parties qu'on voudra, ainſi qu'on va voir dans le Problême ſuivant.

399. PROBLEME. *Diviſer la Lunule d'Hypocrate* BSCR *en tel nombre de parties que l'on voudra* (Fig. 249.).

Du centre T du quart de cercle, je mene par le centre O du demi-cercle la droite TS qui diviſe la Lunule en deux parties BSR, RSC; ainſi ſuppoſé qu'on veuille la diviſer en quatre parties égales, je diviſe le diamétre BC en quatre parties égales, & des points de diviſion, j'éleve des perpendiculaires MP, ZY, puis des points P, Y, menant les droites PT, YT, qui coupent la circonférence du quart de cercle aux points H, V, je dis que les parties de Lunule SRHP, SRVY en ſont chacune le quart, ce que je démontre ainſi:

Je mene les droites OP, TM, & à cauſe des paralelles PM, ST, les triangles PMO, PMT qui ont la même baſe PM, & qui ſont entre deux paralelles ſont égaux (*N.* 374.), & retranchant de part & d'autre la partie commune PXM, il reſte le triangle POX égal au triangle MXT.

Dans le triangle iſoſcele POT, l'angle extérieur POS étant égal aux deux intérieurs oppoſés, eſt par conſéquent double de l'angle OTP; or, à cauſe que le quart de cercle BTCR eſt égal au demi-cercle BSC, il s'enſuit que le cercle entier du rayon BT eſt double du cercle entier du rayon OB, & que par conſéquent le ſecteur SOP du demi-cercle eſt égal au ſecteur RTH du quart de cercle, à cauſe de l'angle SOP double de l'angle RTH. Retranchant donc de ces deux ſecteurs la partie commune ORL, le reſte SRLP eſt égal au reſte LOTH, & ajoutant PLH de part & d'autre, j'ai SRHP égal au triangle POT, ou aux deux triangles POX, OXT, & enfin mettant au lieu du triangle POX, le triangle XMT qui lui eſt égal; nous avons SRHP égal au triangle OTM; mais le triangle OMT ayant la même hauteur OT que le triangle BTC, n'eſt que le quart de ce triangle, à cauſe que ſa baſe OM eſt le quart de la baſe BC (*N.* 376.), donc la partie SRHP eſt égale au quart du triangle

PTC

PTC, ou au quart de la Lunule BSCR, laquelle eſt égale au triangle BTC.

400. PROBLEME. *Trouver un quarré égal à pluſieurs quarrés donnés, ou une Figure ſemblable & égale à pluſieurs Figures ſemblables* (Fig. 250.).

Suppoſons que les droites AB, BC ſoient les côtés des deux premiers quarrés donnés; je leur fais faire un angle droit ABC, & menant la droite AC, j'ai le triangle rectangle ABC, dans lequel le quarré de AC eſt égal aux quarrés des deux autres côtés AB, BC (*N.* 171.); je prens le côté CD du troiſiéme quarré donné, & lui faiſant faire un angle droit ACD avec AC; je mene la droite AD, ce qui me donne un autre triangle rectangle ACD, dans lequel le quarré de AD eſt égal aux quarrés de AC & de DC, mais le quarré de AC eſt égal aux quarrés de AB, BC, donc le quarré de AD eſt égal aux trois premiers quarrés donnés, & continuant de la même façon, je trouverai le quarré de AE égal aux quatre premiers quarrés donnés; faiſant donc le quarré de AE, j'aurai ce qu'on demande, & ainſi des autres.

Et ſi l'on demandoit une Figure ſemblable & égale à pluſieurs Figures ſemblables, je mettrois au lieu des droites AB, BC, CD, DE, & les côtés homologues de ces Figures, après quoi la Figure ſemblable faite ſur AE ſeroit égale aux quatre Figures données, &c. à cauſe que les Figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

401. PROPOSITION XCII. *Si l'on mene dans un cercle* (Fig. 251.) *deux diametres* AC, BD *qui faſſent entr'eux un angle aigu, & que de leurs extrêmités* A, B *on mene des tangentes* AV, BR, *qui ſe terminent aux diametres, & qui ſe coupent en* H. *Je dis* 1°. *que les triangles* AVO, BRO *faits par les deux diametres, avec chacune des tangentes ſont égaux.* 2°. *Que les triangles* AHR, BHV *faits par les tangentes avec chaque diamétre ſont auſſi égaux.*

A cauſe des tangentes perpendiculaires ſur les diamétres aux points A, B les triangles AVO, BRO ſont rectangles, & à cauſe de l'angle aigu O commun, & du côté AO égal au côté BO, ces deux triangles ſont égaux (*N.* 100.). Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Retranchant donc des deux triangles égaux AVO, BRO le trapezoïde commun AHBO, le reſte VHB eſt égal au reſte RHA. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

402. COROLLAIRE. *Si des extrêmités* A, B *des diamétres, on mene*

des perpendiculaires AX, BF *ſur les diamétres oppoſés, le triangle* AVX *fait entre les diamétres par l'une des perpendiculaires* AX, *& la tangente* AV *menée du même point* A *eſt égal au trapezoïde* AXBR *fait entre les diamétres par la même perpendiculaire* AX, *& l'autre tangente* BR.

Par la Propoſition précédente, le triangle VHB eſt égal au triangle AHR, ajoutant donc à chacun de ces triangles le trapezoïde commun AHBX, on aura AVX = BRAX.

403. PROPOSITION XCIII. *Poſant que les deux diamétres* AC, BD (Fig. 252.) *ſoient donnés avec leurs tangentes* AV, BR; *ſi d'un point quelconque* S *pris ſur la circonférence, on mene entre les diamétres deux droites* LZ, MT *paralelles aux tangentes* AV, BR; *le triangle* LST *fait par ces deux paralelles avec l'un des diamétres* DB *prolongé en* V, *eſt égal au trapezoïde* BRMT *fait par la tangente* BR *de ce diamétre* DBV, *& ſa paralelle* MT; *& le triangle* MSZ *fait par les mêmes paralelles avec l'autre diamétre* CAR *eſt égal au trapezoïde* AVLZ *fait par la tangente* AV *de ce diamétre & ſa paralelle.*

Du point A, je mene AX perpendiculaire ſur DB, & j'ai AVX = BRAX (*N.* 402.). Or, à cauſe de la perpendiculaire AX paralelle à la tangente RB, & à ſa paralelle MT, & de LZ paralelle à AV, les triangles VAX, LST ſont ſemblables & ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues (*N.* 392.); donc VAX. LST :: $\overline{AX}^2$. $\overline{ST}^2$. Mais par la proprieté du cercle, nous avons $\overline{AX}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{XO}^2$ (*N.* 284.), & $\overline{ST}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{TO}^2$; donc VAX. LST :: $\overline{BO}^2 - \overline{XO}^2$. $\overline{BO}^2 - \overline{TO}^2$; or, les triangles BRO, TMO, XAO étant ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés $\overline{BO}^2$, $\overline{TO}^2$, $\overline{XO}^2$ de leurs côtés homologues BO, TO, XO (*N.* 393.); mettant donc les triangles au lieu des quarrés, nous aurons VAX. LST :: BRO — XAO. BRO — TMO ou VAX. LST :: BRAX. BRMT; mais l'antecédent VAX eſt égal à l'antecédent BRAX, donc le conſéquent LST eſt égal au conſéquent BRMT; & on prouvera la même choſe toutes les fois que la paralelle ST coupera le diamétre BD entre le centre O & le point B.

Mais ſi le point Q d'où l'on mene les droites QL, QE paralelles aux tangentes AV, BR eſt tellement poſé que la paralelle

QE coupe le diamétre BD en deſſous de O. Je mene à l'extrémité D la tangente DF qui coupe RC prolongé en F, & comme le triangle LQP fait par les deux paralelles avec le diamétre BD eſt encore ſemblable au triangle VAX; j'ai de même VAX. LQP :: $\overline{AX}^2$. $\overline{QP}^2$ :: $\overline{BO}^2 - \overline{XO}^2$. $\overline{OD}^2 - \overline{OP}^2$, & au lieu des quarrés mettant les triangles BRO, AXO, ODF, OPE, qui ſont entr'eux comme ces quarrés, nous aurons VAX. LQP :: BRO — AXO. ODF — OPE, c'eſt-à-dire VAX. LQP :: BRAX. DFEP, mais VAX = BRAX, donc LQP = DFEP; ainſi le triangle LQP fait avec le diamétre BD par les paralelles QL, QE menées du point Q, eſt toujours égal au trapezoïde DFEP fait par ces mêmes paralelles avec la tangente DF, & ce ſeroit encore la même choſe ſi le point d'où l'on mene les paralelles aux tangentes, étoit pris ſur la demi-circonférence BCD. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Maintenant pour démontrer que le triangle MSZ fait avec l'autre diamétre AC par les paralelles LZ, MT eſt égal au trapezoïde AVLZ fait par la tangente AV de ce diamétre & ſa paralelle LZ. Je n'aurois qu'à mener du ſommet B de l'autre diamétre une perpendiculaire B3 ſur AC, & achever le reſte, comme ci-deſſus; mais comme cette démonſtration ne réuſſiroit pas par rapport aux Sections Coniques que ceci concerne; voici une autre démonſtration qui ſera commune aux Sections Coniques, & au Cercle.

Nous avons VAX = BRAX (*N.* 402.), & retranchant de VAX le triangle LST, & de BRAX, le trapezoïde BRMT égal au triangle LST, comme on vient de voir; nous aurons AVLSTX = MTXA, & retranchant la partie commune STX2, nous aurons AVL2 = MS2A, & ajoutant de part & d'autre le triangle A2Z, nous aurons enfin AVLZ = MSZ.

Si le point Q d'où les paralelles QL, QE aux tangentes ſont menées, eſt tellement poſé que la paralelle ſoit en-deſſous du centre O, je mene du point D une tangente KDF qui coupe AC prolongé en F, & la tangente AV prolongée en K; les triangles rectangles BRO, DOF ſont ſemblables & égaux à cauſe de BO = OD, & des angles ſur BO égaux chacun à chacun aux angles ſur DO. Or, le triangle BRO eſt égal au triangle AVO (*N.* 401.); donc AVO = FOD, & ajoutant de part & d'autre le trapeze AKDO, nous avons VKD = AKF, & retran-

chant de VKD le triangle LQP, & de AKF le trapezoïde PEFD égal au triangle LQP, comme on a vû ci-deſſus ; il reſte VLQPDK = AEPDK ; enfin retranchant de part & d'autre la partie commune AKDPQZ, nous aurons VAZL = ZQE, c'eſt-à-dire le triangle ZQE fait par les paralelles menées du point Q, avec le diamétre AC égal au trapezoïde AVLZ fait par la tangente AV de ce diamétre & ſa paralelle.

Si le point Q d'où l'on mene des paralelles aux tangentes étoit ſur la demi-circonférence BCT (*Fig.* 253.), de façon que la paralelle QT coupât le diamétre BD en-deſſus de O, la ſimilitude des triangles QTL, VAX, feroit conclure comme auparavant que le triangle TLQ fait avec le diamétre BD eſt égal au trapezoïde BRMT, puis menant du point C la tangente CK qui coupe BD en *t*, & MA en K, on trouveroit aiſément, comme on vient de voir, que le triangle QME fait avec l'autre diamétre eſt égal au trapezoïde EL*t*C fait par la tangente C*t* de ce diamétre, & ſa paralelle.

Enfin, la Figure 254 fait voir que ſi le point Q étoit ſur la demi-circonférence BCD, & que la paralelle QT coupât BD en-deſſous de O, il faudroit faire de ce côté ce qu'on a fait de l'autre dans la Figure 252. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Remarque. Cette Propoſition & la précédente, ſont eſſentielles pour les Sections Coniques, & j'avertis d'avance que pourvû qu'on ſçache bien ceci, & ce que nous avons dit touchant le Cercle, on ſera ſurpris quand on viendra aux Sections Coniques, de voir que l'étude de ces Courbes ne ſera plus qu'une application naturelle des principes les plus ſimples.

Du changement des Figures & de leur réduction de grand en petit & de petit en grand.

404. *Une Figure quelconque* ABCDEF (Fig. 282.) *étant donnée, faire un triangle qui lui ſoit égal.*

Je retranche de la Figure un triangle ABC par la diagonale AC ; du ſommet B, je mene la droite BP paralelle à AC, juſqu'à ce qu'elle coupe en P, l'un des côtés AF prolongé, ce qui me donne un quadrilatere PBCA, dans lequel menant l'autre diagonale PC, j'ai deux triangles égaux BAC, CPA à cauſe qu'ils ont la même baſe CA, & qu'ils ſont entre les deux paralelles CA, BP. Retranchant donc de la Figure donnée, le triangle

BAC, & ſubſtituant en ſa place le triangle PAC, j'ai la figure PCDF égale à la figure donnée, & qui a une angle de moins.

Je coupe le triangle DEF par la diagonale DF; du ſommet E de ce triangle, je mene EH paralelle à DE, juſqu'à ce qu'elle rencontre le côté AF prolongé en H; ce qui me donne le quadrilatere FDEH, dans lequel menant l'autre diagonale DH, j'ai deux triangles égaux FED, FHD, à cauſe qu'ils ont la baſe commune FD, & qu'ils ſont entre deux paralelles; retranchant donc de la figure PCDF le tiangle FDE, & mettant en ſa place le triangle FDH, j'ai la figure PCDH égale à la figure donnée & qui a deux angles de moins.

Je retranche de cette figure le triangle CDH par la diagonale CH, & du ſommet D de ce triangle, je mene DR paralelle à CH juſqu'à ce qu'elle rencontre AF prolongé en R, & menant la droite CR, les triangles CDH, CHR qui ont la même baſe CH & qui ſont entre deux paralelles, ſont égaux; ainſi mettant CHR au lieu de CDH, j'ai le triangle PCR égal à la figure donnée.

405. PROBLEME. *Faire un rectangle égal à un triangle donné* ABC (Fig. 255.)

Du ſommet B j'abaiſſe la perpendiculaire BS ſur la baſe AC; je coupe BS en deux également en R, & avec la baſe AC & la hauteur SR, je fais le rectangle AEDC, lequel eſt égal au triangle donné ABC; car le triangle ABC eſt égal à ſa baſe AC multipliée par la moitié de ſa hauteur BS, c'eſt-à-dire par SR, (*N.* 375.) & le rectangle AEDC eſt égal au même produit.

Ou bien je coupe la baſe AC du triangle en deux également en R, (*Fig.* 256.) & avec la moitié AR & la hauteur BS du triangle, je fais un rectangle AEDR lequel eſt égal au triangle donné. Car le rectangle AEFC de même hauteur & de même baſe que le triangle, eſt double du triangle; or, les rectangles AEDR, AEFC ayant même hauteur AE, ſont entr'eux comme leurs baſes AR; AC (*N.* 373.) donc AEDR étant la moitié de AEFC, eſt par conſéquent égal au triangle.

406. PROBLEME. *Un triangle* ABC *étant donné*, (Fig. 257.) *faire un paralellogramme qui lui ſoit égal, & qui ait un angle donné.*

Du ſommet B, je mene EF paralelle à la baſe AC; je fais en A un angle CAE égal à l'angle donné, & achevant le paralellogramme AEFC, je coupe AC en deux également en P; d'où je

mene PB paralelle à AE, ce qui donne le triangle ABC égal au paralellogramme AEBP; car les paralellogrammes AEBP, AEFC ayant la même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes AP, AC; c'eſt-à-dire le paralellogramme AEBP eſt la moitié du paralellogramme AEFC; or, le triangle ABC eſt auſſi la moitié du paralellogramme AEFC; donc, &c.

Ou bien je coupe le côté AE en deux également en H, d'où je mene HR paralelle à AC, ce qui me donne le paralellagramme AHRC égal au triangle, à cauſe que l'un & l'autre ſont la moitié du paralellogramme AEFC.

407. PROBLEME. *Une figure quelconque étant donnée, faire un rectangle ou un paralellogramme qui lui ſoit égal.*

Je change la figure en un triangle qui lui ſoit égal, (*N.* 404.) & de ce triangle je fais le rectangle ou le paralellogramme requis (*N.* 405. 406.)

408. PROBLEME. *Faire un quarré égal à un paralellogramme ou à un triangle ou à une figure quelconque donnée.*

Pour faire un quarré égal au paralellogramme ABCD, je prens (*Fig.* 258.), je prens une moyenne proportionnelle AE entre la hauteur AB & la baſe AD, & le quarré AF fait ſur cette proportionnnelle eſt égal au rectangle; car puiſque nous avons AB. AE :: AE. AD, nous avons auſſi $\overline{AE}^2 = AB \times AD$; or $AB \times AD$ eſt le paralellogramme; donc le quarré AF eſt égal à ce paralellogramme.

Si la figure donnée eſt un triangle, je prens une moyenne proportionelle entre la moitié de ſa hauteur & ſa baſe, & le quarré de cette moyenne proportionnelle étant égal au produit des extrêmes, eſt par conſéquent égal au triangle donné.

Enfin ſi la figure eſt un polygone régulier, je la réduis en triangles, & j'acheve le reſte comme il vient d'être dit.

409. PROBLEME. *Changer un triangle en un autre qui ait une hauteur donnée ou une baſe donnée.*

Soit le triangle ABC (*Fig.* 259.) qu'on demande de changer en un autre qui ait la hauteur EH. Je cherche une quatriéme proportionnelle à la hauteur donnée EH, à la hauteur BD du triangle ABC & à ſa baſe AC; à l'extrémité H de la hauteur EH, j'éleve la perpendiculaire RP, que je fais égale à la quatriéme proportionnelle trouvée, & menant les lignes RE, PE, le triangle REP dont la hauteur eſt EH, eſt égal au triangle donné ABC; car

par la conſtrnction, les hauteurs EH, BD de ces deux triangles ſont réciproques aux baſes AC, RP; donc les deux triangles ſont égaux (*N.* 376.).

Si on demande que le triangle ABC ſoit changé en un autre qui ait la baſe RP; je cherche une quatriéme proportionnelle à cette baſe RP, à la baſe AC & à la hauteur BD, & élevant ſur RP une perpendiculaire HE que je fais égale à la quatriéme proportionnelle trouvée; je mene les droites RE, EP qui me donnent le triangle REP égal au triangle ABC, à cauſe des baſes RP, AC réciproques aux hauteurs BD. EH par la conſtruction.

410. COROLLAIRE. *On changera de la même façon un rectangle ou un paralellogramme en un autre qui ait une hauteur ou une baſe donnée.*

411. COROLLAIRE. De même, ſi on vouloit changer un polygone quelconque regulier ou irrégulier en un triangle qui eût une hauteur ou une baſe donnée, on changeroit d'abord cette figure en triangle, (*N.* 404.) & on changeroit enſuite ce triangle en un autre qui eût la hauteur ou la baſe donnée, & ſi on vouloit changer le polygone en un rectangle ou paralellogramme qui eût une hauteur ou une baſe donnée, on le changeroit d'abord en rectangle ou en paralellogramme, (*N.* 407.) après quoi on changeroit ce rectangle ou ce paralellogramme en un autre qui eût la hauteur ou la baſe donnée (*N.* 410.).

412. PROBLEME. *Faire une Figure égale à pluſieurs Figures données.*

Je réduis les figures données en triangles (*N.* 404.) que je ſuppoſe être le triangle ABC, EFD, HIL; (*Fig.* 260.) je réduis ces trois triangles une même hauteur IM, (*N.* 409.) ou ce qui revient au même, je cherche la baſe LP qu'il faut donner au triangle ABC, afin qu'il puiſſe avoir la hauteur IM; je mets cette baſe en ligne droite avec la baſe HL, & menant la droite PI, le triangle PLI eſt égal au triangle ABC, (*N.* 376.) & par conſéquent le triangle HIP eſt égal aux deux HIL, ABC. Je cherche de même la baſe PQ qu'il faut donner au triangle EFD, afin qu'il puiſſe avoir la hauteur IM, & mettant cette baſe en ligne droite avec HP, & menant la droite QI, le triangle PQI eſt égal au triangle EFD; donc le triangle entier HIQ eſt égal aux trois triangles, & par conſéquent aux trois figures données.

413. PROBLEME. *Deux figure* X, Q *étant données*, (Fig. 261.)

trouver une troiſiéme figure qui ſoit ſemblable à la premiere X, *& égale à la ſeconde* Q.

Je change la figure X en un triangle que je change enſuite en un autre AMB qui ait pour baſe le côté AB; je change de même la figure Q en un triangle BMP qui ait la même hauteur que le triangle AMB; ainſi le triangle AMP eſt égal aux deux figures données. Je décris ſur AP un demi cercle APR, & au point B j'éleve la perpendiculaire BR ſur laquelle je conſtruis la figure Y ſemblable à la figure X, & je dis que la figure Y eſt égale à la figure Q.

Car les triangles AMB, BMP ayant la même hauteur, ſont entr'eux comme leur baſes AB, BP; mais AMB = X & BMP = Q; donc X. Q :: AB. BP; or, les figures ſemblables X, Y ſont entr'elles comme les quarrés $\overline{AB}^2$. $\overline{BR}^2$ de leurs côtés homologues AB, BR, (*N.* 392.) & à cauſe que dans le demi cercle APR, la ligne BR eſt moyenne proportionnelle entre les ſegments AB, BP, nous avons AB. BR :: BR. BP; donc nous avons auſſi $\overline{AB}^2$. $\overline{BR}^2$:: AB. BR, & par conſéquent X. Y :: AB. BP; mais nous venons de trouver X. Q :: AB. BP; donc X. Y :: X. Q; ce qui donne Y = Q.

414. Corollaire. On peut donc par ce moyen changer pluſieurs figures qui ne ſont pas ſemblables entr'elles en un même nombre de figures toutes ſemblables à l'une des figures données.

415. Probleme. *Le côté d'un Polygone régulier étant donné, trouver le Polygone.*

Soit la droite AB (*Fig.* 262.) ſur laquelle on demande de décrire un pentagone régulier, je décris un cercle avec un rayon quelconque OM, & dans ce cercle j'inſcris un pentagone régulier que je diviſe en ſes cinq triangles égaux; enſuite ſur la droite AB je conſtruis un triangle ARB ſemblable au triangle MON, en faiſant les angles A, B égaux chacun à chacun aux angles M, N; enfin du ſommet R pris pour centre, & avec le rayon RA, je décris un cercle dans lequel portant cinq fois la corde AB, j'ai le pentagone demandé. Car l'angle ARB égal à l'ange MON vaut la cinquiéme partie de la circonférence ABVTX, de même que l'angle MON, vaut la cinquiéme partie de la circonférence MNPQT.

416. Probleme. *Changer une figure quelconque en Polygone régulier.*

Je

Je change la figure donnée en un triangle que je ſuppoſe être le triangle ABC; (*Fig.* 263.) je diviſe ſa baſe AC en cinq parties égales, & des points de diviſion je mene au ſommet les droites DB, EB, &c. qui diviſent le triangle en cinq triangles égaux, à cauſe qu'ils ont tous la même hauteur & les baſes égales. Je décris avec un rayon quelconque OR un cercle dans lequel j'inſcris un pentagone que je diviſe en ſes cinq triangles. Je fais un triangle TSV ſemblable à l'un des triangles ROT du pentagone & égal au triangle ABD, cinquiéme partie du triangle ABC, (*N.* 413.) & du ſommet V décrivant un cercle avec le rayon VT; je porte ST cinq fois autour de la circonférence, ce qui me donne un pentagone égal au triangle ABC, & par conſéquent à la figure donnée; car les cinq triangles de ce pentagone ſont égaux aux cinq triangles qui compoſent le triangle ABC, & l'angle TVS embraſſe la cinquiéme partie de la circonférence de ſon cercle de même que l'angle ROT ſon égal embraſſe la cinquiéme partie de la circonférence du ſien.

417. PROPOSITION XCIV. *Un quadrilatere quelconque* ABCD (Fig. 264.) *étant donné avec ſes diagonales* AC, BD, *ſi l'on diviſe l'un des côtés* AB *en deux également en* E, *& que de ce point de diviſion on mene la droite* EF *paralelle à l'une des diagonales* AC; *enſuite du point* F *la droite* FG *paralelle à l'autre diagonale* BD, *puis du point* G *la droite* HG *paralelle à la diagonale* AC, *& enfin du point* H *la droite* HE *paralelle à la diagonale* BD; *je dis que cette derniere paralelle coupera le côté* AB *au point* E *qui le diviſe en deux également, & que la figure* EFGH *ſera un paralellogramme qui ſera la moitié du quadrilatere donné.*

Dans le triangle ABC, les baſes AC, EF étant paralelles, coupent les côtés AB, BC proportionnellement; or, AB eſt coupé en deux également en E; donc BC eſt auſſi coupé en deux également en F. Par la même raiſon, dans le triangle BCD dont les baſes BD, FG ſont paralelles, le côté CD eſt coupé en deux également en G, & dans le triangle CDA dont les deux baſes AC, GH ſont paralelles, le côté AD eſt coupé en deux également en H; ainſi dans le triangle ABD la ligne HE menée du point H paralellement à la baſe, doit couper le côté AB au point E qui le diviſe en deux également : ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Les droites EF, HG étant paralelles à la même droite AC, ſont paralelles entr'elles; par la même raiſon, les droites EH,

FG paralelles à la même droite BD, ſont paralelles entr'elles; donc la figure EFGH eſt un paralellogramme : ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

Les triangles ſemblables ABC, EBF étant entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues AB, EB (*N.* 392.) qui ſont comme 2 à 1; il s'enſuit que ces deux triangles ſont entr'eux comme 4 à 1; c'eſt-à-dire le triangle EBF eſt le quart du triangle ABC, & par la même raiſon HGD eſt le quart du triangle ACD; ainſi les deux enſemble EBF, HGD ſont le quart du quadrilatere ABCD, & on prouvera de même que le triangle EAH étant le quart du triangle BAD, & le triangle FCG, le quart du triangle BCD; les deux enſemble EAH, FCG ſont auſſi le quart du quadrilatere ABCD; retranchant donc du quadrilatere les quatre triangles EBF, HDG, EAH, FCG qui valent les deux quarts ou la moitié du quadrilatere; le reſte, c'eſt-à-dire le paralellogramme EFGH ſera la moitié de ce quadrilatere.

418. COROLLAIRE. *Si le quadrilatere a un de ſes angles rentrans* (Fig. 265.), *on démontrera toujours que le paralellogramme* EFGH *en eſt la moitié.*

Je prolonge les paralelles EH, FG, & la diagonale BD juſqu'à ce qu'elles coupent l'autre diagonale AC aux points M, N, R, & je prouverai, comme ci-deſſus, que le triangle EBF, eſt le quart du triangle ABC, que le triangle AEM eſt le quart du triangle ABR, & le triangle CFN, le quart du triangle BRC, d'où il ſuit que les trois triangles EBF, AEM, CFN ſont enſemble les deux quarts ou la moitié du triangle ABC, & que par conſéquent le paralellogramme reſtant EFNM eſt la moitié de ce triangle ou la moitié du quadrilatere ABCD, plus la moitié du triangle ADC, c'eſt-à-dire $EFNM = \frac{1}{2}ABCD + \frac{1}{2}ADC$.

Or, dans le triangle ADC, les trois triangles HDG, AHM, CGN étant égaux à la moitié de ce triangle, le reſte HGNM vaut l'autre moitié, & nous avons $HGNM = \frac{1}{2}ADC$; mais nous avons trouvé $EFNM = \frac{1}{2}ABCD + \frac{1}{2}ADC$; retranchant donc du premier membre le paralellogramme HGNM, & de l'autre $\frac{1}{2}ADC$ qui lui eſt égal, nous aurons $EFGH = \frac{1}{2}ABCD$.

419. PROPOSITION XCV. *Une Figure quelconque* ABC (Fig. 266.) *étant donnée, ſi d'un point pris en-dehors ou en-dedans de la Figure, on mene les droites* OA, OC, OB, *à tous les angles, & qu'ayant diviſé l'une de ces droites* OA *en raiſon quelconque en* E, *on mene du point* E *la droite* EF *paralelle à la baſe* AC *du triangle* AOC,

puis du point F *la droite* FH *paralelle à la baſe* BC *du triangle ſuivant* COB, *& ainſi de ſuite, la derniere paralelle* HE *paſſera par le point* E, *& la Figure* EFH *formée par ces paralelles, ſera ſemblable à la Figure* ABC.

Dans le triangle AOC, la paralelle EF coupe le côté OC en meme raiſon que le côté OA, de même dans le triangle COB la paralelle FH coupe le côté OB en même raiſon que le côté OC, donc OB eſt coupé en H en même raiſon que AO eſt coupé en E, & par conſéquent la paralelle menée du point H, doit paſſer par E. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Le triangle OEF eſt ſemblable au triangle OAC à cauſe de l'angle commun O, & des baſes EF, AC paralelles; par la même raiſon le triangle OFH eſt ſemblable au triangle OCB, & le triangle OHE au triangle OBA, donc les deux Figures ACB, EFH étant compoſées d'un égal nombre de triangles ſemblables ſont auſſi ſemblables entr'elles.

420. COROLLAIRE. Si le point O étoit pris ſur le circuit de la Figure (*Fig.* 267.), on démontreroit de la même façon que EF, FH, &c. formeroient une Figure EFHRS ſemblable à la Figure APBDC.

421. PROBLEME. *Une Figure* ABCD (Fig. 268.) *étant donnée, en décrire une autre ſemblable, & qui ſoit avec elle en telle raiſon que l'on voudra.*

Je prens un point O, ou dans la Figure ou en-dehors ou ſur le circuit, ou enfin à l'un des angles; de ce point, je mene des droites à tous les angles, & ſuppoſant qu'on veuille que la Figure demandée ne ſoit que la moitié de la Figure donnée, je diviſe l'une des droites OA en deux également en R; je cherche une moyenne proportionnelle OE, entre OR & OA, & du point E, je mene EH paralelle à AB, puis HS paralelle à CB, & ainſi de ſuite, ce qui me donne la Figure EHSV ſemblable, & moitié de la Figure donnée. Car ces Figures ſont entr'elles comme les quarrés des lignes OE, OA ſemblablement poſées (*N.* 392.), mais par la conſtruction, nous avons OA. OE :: OE. OR, donc $\overline{OA}^2$. $\overline{OE}^2$ :: OA. OR (*N.* 393.); mais OA eſt double de OR, donc $\overline{OA}^2$ eſt double de $\overline{OE}^2$, & par conſéquent la Figure donnée eſt double de la Figure EHSV.

Si l'on veut que la Figure EHSV (*Fig.* 269.) ſoit double de la Figure donnée, je prolonge OA en R, en ſorte que AR ſoit égal à OA; je prens une moyenne proportionnelle OE entre

OA, OR ; du point E, je mene EH paralelle à AB, &c. & la Figure EHSV eſt double de la donnée ; car à cauſe de OA, OE :: OE. OR, nous avons $\overline{OA}^2 . \overline{OE}^2$ :: OA. OR :: 1. 2 (*N.* 393.), & par conſéquent la Figure donnée n'eſt que la moitié de la Figure EHSV.

Si l'on veut que la Figure EHSV ſoit à la Figure donnée comme une ligne MN eſt à une ligne MP. Je cherche une quatriéme proportionnelle OR aux trois lignes MP, MN, OA, enſuite une moyenne proportionnelle OE, entre OA & OR, & j'acheve le reſte, comme ci-deſſus, ce qui ſe démontre de la même façon.

422. *Remarque.* On peut abreger beaucoup l'opération, en mettant le point O ſur les angles de la Figure (*Fig.* 270.), car alors la Figure ſe trouve diviſée en deux triangles de moins, & par conſéquent il y a moins de paralelles à mener, l'une & l'autre méthode ont leur utilité ; & c'eſt par leur moyen qu'on réduit toutes les Figures de grand en petit, & de petit en grand.

423. Probleme. *Deux quarrés étant donnés, en trouver tant d'autres que l'on voudra, leſquels pris deux à deux, ſoient égaux aux deux quarrés donnés.*

Suppoſons que les droites AB, BC (*Fig.* 271.) ſoient les côtés des deux quarrés donnés, je leur fais faire un angle droit ABC, puis menant l'hypothenuſe AC, je décris le demi-cercle ABDC qui paſſe par le point B, puiſque l'angle ABC eſt droit ; d'un point quelconque D de la circonférence, je mene deux droites DA, DC aux extrêmités du diamétre, & par conſéquent l'angle ADC étant auſſi droit, les quarrés des droites AD, DC pris enſemble ſont égaux au quarré de leur hypothenuſe AC, mais les quarrés des droites AB, BC pris enſemble ſont auſſi égaux au quarré de la même hypothenuſe ; donc $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; & comme il y a une infinité de points dans le quart de circonférence ABD, il eſt viſible qu'en menant de chacun de ces points deux lignes aux extrémités A, C du diamétre, on auroit une infinité de quarrés, qui, pris deux à deux, ſeroient égaux aux deux quarrés donnés.

Quant à tous les points de l'autre quart de cercle DC, il eſt clair que toutes les lignes que l'on meneroit de ces points aux extrémités A, C ſeroient les mêmes deux à deux que celles qui

auroient été menées du quart de cercle ABD, & que par conſéquent leurs quarrés ſeroient les mêmes.

424. COROLLAIRE. *Quoiqu'on puiſſe trouver une infinité de quarrés, qui, pris deux à deux, ſoient égaux, on ne trouvera cependant jamais que leurs Racines priſes deux à deux ſoient égales; mais les deux plus grandes ſeront les deux égales* AD, DC, *& les autres* AB, BC *ſeront d'autant moindres que les deux égales* AD, DC, *qu'elles ſeront plus inégales entr'elles.*

Si l'on veut que les deux inégales AB, BC priſes enſemble ſoient égales à la ſomme des deux égales AD, DC, je décris du point C, & avec le rayon CD, l'arc DE, ce qui donne CE=DC, & par conſéquent BE eſt l'excès du côté BC ſur le côté DC; de même du point A, & avec le rayon AB, je décris l'arc BR, ce qui donne AB=AR, & par conſéquent DR eſt l'excès de AD ou DC ſon égale ſur AB. Ainſi, afin que les deux AB, BC ſoient égales aux deux DC, DA, il faut que l'excès BE dont BC ſurpaſſe DC ſoit égal à l'excès DR dont DA ſurpaſſe BA. Cela poſé.

Nous avons $BC = DC + BE$, & $AB = AD - DR = DC - BE$, à cauſe de $AD = DC$, & de $DR = BE$ par la ſuppoſition; donc $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + 2BE \times DC + \overline{BE}^2$, & $\overline{AB}^2 = \overline{DC}^2 - 2BE \times DC + \overline{BE}^2$, & ajoutant enſemble ces deux équations, nous aurons $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{DC}^2 + 2\overline{BE}^2$; mais les quarrés de AD, DC, ſont $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{DC}^2$, donc ſi la ſuppoſition étoit vraye les deux quarrés de AB, BC pris enſemble, ſurpaſſeroient la ſomme des quarrés de AD, DC de deux fois le quarré de BE; mais il eſt démontré que les quarrés de AB, BC ne ſurpaſſent pas les quarrés de AD, DC; donc en ſuppoſant les racines AB, BC égales enſemble aux racines AD, DC, on les ſuppoſe trop grandes.

On démontrera de la même façon que les deux côtés ou racines AH, HC ſont enſemble moindres que les deux AB, BC qui ſont moins inégales entr'elles.

425. PROBLEME. *Trouver une moyenne proportionnelle à deux Figures données.*

Si les deux Figures données ne ſont pas ſemblables, je les réduits en triangles de même hauteur afin qu'elles ſoient entr'elles comme les baſes de ces triangles, puis prenant une moyenne

proportionnelle entre ces deux baſes, je fais ſur cette moyenne proportionnelle un triangle de même hauteur que les deux autres, & ce triangle eſt moyen proportionnel entre les deux autres, & par conſéquent entre les deux Figures : Ce qui eſt évident, puiſque les triangles de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes, & que par la conſtruction les baſes ſont en proportion continue.

Mais ſi les deux Figures ſont ſemblables, je prens une moyenne proportionnelle entre deux de leurs côtés homologues, & ſur cette moyenne proportionnelle, je décris une Figure ſemblable, laquelle eſt auſſi moyenne proportionnelle entre les deux autres, car les trois côtés homologues étant en proportion continue, leurs quarrés le ſeront auſſi. Or, ces Figures ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Donc, &c.

426. PROBLEME. *Exprimer en lignes la Raiſon de pluſieurs Figures données.*

Je réduis les Figures données en triangles de même hauteur, & les baſes de ces triangles expriment la raiſon des Figures entr'elles.

De la Géodeſie ou diviſion des Figures ſur le Terrein.

427. PROBLEME. *Diviſer un triangle en tel nombre de parties égales ou inégales en raiſon donnée que l'on voudra, par des lignes menées de la baſe au ſommet.*

Pour diviſer le triangle ABC (*Fig.* 272.) en trois parties égales ; je diviſe la baſe en trois parties égales aux points E, H, & de ces points menant au ſommet les droites EB, HB, le triangle ſe trouve diviſé en trois triangles égaux, à cauſe qu'ils ont la même hauteur & les baſes égales (*N.* 376.).

Et pour diviſer le même triangle en trois parties qui ſoient entr'elles comme les trois parties RS, SM, MN de la droite RN, je diviſe la baſe en même raiſon que la droite RN, & ſuppoſant que les points de diviſion ſoient les points E, H, je mene des droites au ſommet B qui diviſent le triangle en trois qui ſont entr'eux comme leurs baſes, & par conſéquent comme les droites RS, SM, MN.

428. PROBLEME. *Diviſer un triangle* ABC (Fig. 273.) *en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra, par des lignes menées d'un point* O *pris ſur le circuit du triangle.*

Si l'on demande trois parties égales, je diviſe le côté BC en trois également aux points D, E, & le triangle ABC ſe trouve diviſé en trois triangles égaux BAD, DAE, EAC. Je mene la droite OA, & des points D, E, les droites DR, ES paralelles à OA; enfin, du point O, je mene les droites OR, OS qui diviſent le triangle ABC en trois parties égales.

Car les triangles RDA, RDO qui ont la baſe commune RD, & qui ſont entre les paralelles RD, AO ſont égaux (*N.* 374.), ajoutant donc à chacun d'eux la partie commune RBD, nous aurons le triangle DAB égal au triangle ORB; mais DAB eſt le tiers du triangle ABC, donc ORB en eſt auſſi le tiers.

De même les triangles ESA, ESO qui ont la baſe commune ES, & qui ſont entre les paralelles AO, SE ſont égaux; donc ajoutant la partie commune SEC, les triangles ACE, OSC ſont égaux; mais AEC eſt le tiers du triangle ABC; donc OSC en eſt auſſi le tiers, & par conſéquent le quadrilatere ROSA eſt le tiers reſtant.

Et ſi l'on demande que les trois parties ſoient entr'elles comme les parties HP, PQ, QT de la droite HT, je diviſe la droite BC en même raiſon que la droite HT, & j'acheve le reſte comme ci-deſſus.

429. PROBLEME. *Diviſer un triangle* ABC (Fig. 274.) *en autant de parties qu'on voudra égales ou inégales par des lignes paralelles à la baſe* AC.

Si on demande qu'il ſoit diviſé en trois parties égales, je diviſe le côté AB en trois également aux points E, R; je prens une moyenne proportionnelle BH entre la droite BA & ſon tiers BE, & je mene HM paralelle à la baſe. Je prens de même une moyenne proportionnelle BN entre la droite BA, & ſes deux tiers BR, & menant la droite NP paralelle à la baſe, le triangle ABC ſe trouve diviſé en trois parties égales par les paralelles HM, NP.

Car les triangles ſemblables BHM, BAC ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues BH, BA (*N.* 392.); or, par la conſtruction, nous avons BE. BH :: BH. BA, donc $\overline{BE}^2 . \overline{BH}^2$ :: BE. BA :: 1. 3 (*N.* 393.), & par conſéquent le triangle BHM eſt le tiers du triangle BAC. On prouvera de même que le triangle BNP eſt les deux tiers du triangle BAC; d'où il ſuit qu'en retranchant de ce triangle le triangle BHM, le reſte

HMNP ſera auſſi le tiers du triangle, & par conſéquent le trapezoïde NPCA ſera le tiers reſtant.

Si on demande que le triangle ſoit diviſé en trois parties, qui ſoient entr'elles comme les trois parties SQ, QT, TV de la droite SV, je diviſe le côté BA en même raiſon que la droite SV, & j'acheve le reſte, comme ci-deſſus.

430. PROBLEME. *Diviſer un triangle* ABC (Fig. 275) *en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra, par des lignes qui partent d'un même point dans l'aire qui n'eſt pas donné.*

Si l'on veut que le triangle ſoit diviſé en quatre parties égales, je prens AR égal à la quatriéme partie de la baſe; du point R, je mene la droite RV paralelle au côté AB, je diviſe RV en deux également en O, & menant les droites OA, OB, le triangle OAB eſt le quart du triangle ABC, car menant la droite RB, les triangles ABO, ABR qui ont la baſe commune AB, & qui ſont entre les paralelles AB, RV ſont égaux; mais ABR eſt le quart du triangle ABC, à cauſe que ces deux triangles ont la même hauteur, & que la baſe AR eſt le quart de la baſe AC; donc le triangle ABO eſt auſſi le quart du triangle ABC.

Maintenant le trapezoïde reſtant AOBC eſt les trois quarts du triangle ABC, & par conſéquent, il faut le diviſer en trois parties égales. Or, dans ce trapezoide les triangles ROC, VOC qui ont les baſes RO, VO égales par la conſtruction & la même hauteur, puiſqu'ils ont le ſommet en C ſont égaux, & les triangles AOR, BOV qui ont auſſi les baſes égales, & qui ſont entre les paralelles AB, RV ſont auſſi égaux; donc les triangles AOC, BOC ſont égaux entr'eux; c'eſt pourquoi diviſant chacune de leurs baſes en trois parties, & menant des points de diviſion des droites au point O, j'ai ſix parties égales, leſquelles priſes deux à deux en donnent trois AOS, SOTC, BOT qui ſont chacune le quart du triangle ABC.

Si on veut que le triangle ſoit diviſé en quatre parties qui ſoient entr'elles comme les parties MN, NP, PQ, QX de la droite MX, je prens ſur la baſe AC une partie AR, enſorte que j'aye AR. AC :: MN. NX, & achevant le reſte, comme ci-deſſus, le triangle ABO eſt au triangle total ABC, comme MN eſt à MX, & il ne reſte plus qu'à diviſer le trapezoide AOBC en trois parties qui ſoient entr'elles comme les autres parties NP, PQ, QX de la droite MX, par le point O pris ſur ſon circuit; & c'eſt ce que nous allons enſeigner dans le Problême ſuivant.

431.

431. PROBLEME. *Diviſer une Figure quelconque* ABCDE (Fig. 276.) *en tant de parties que l'on voudra égales ou inégales par des lignes menées d'un point* O *pris ſur le circuit.*

Si l'on veut que la Figure ſoit diviſée en trois parties égales; du point O, je mene à tous les angles les droites OA, OB, OC qui la diviſent en triangles; je change ces triangles en d'autres PMQ, QMR, RMS, SMT qui leur ſoient égaux chacun à chacun, & qui ayent la même hauteur, c'eſt-à-dire PMQ=AEO, QMR = AOB, & ainſi de ſuite, & par conſéquent le triangle total PMT eſt égal à la Figure ABCDE, je diviſe la baſe PT en trois également aux points N, L, d'où je mene au ſommet M les droites NM, LM qui diviſent le triangle PMT en trois autres PMN, NML, LMT égaux entr'eux, à cauſe des baſes égales, & de la hauteur commune.

Maintenant à cauſe que le point N du tiers PN tombe ſur la baſe QR du triangle QMR = AOB, je diviſe la baſe AB du triangle AOB en X en même raiſon que la baſe QR eſt diviſée en N, & menant la droite XO, le triangle AOX eſt au triangle AOB, comme la baſe AX eſt à la baſe AB, mais QMN eſt au triangle QMR, auſſi comme QN eſt à QR, ou comme AX eſt à AB, donc AXO. AOB :: QMN. QMR, & à cauſe de AOB = QMR, nous avons AXO = QMN; or, EOA = PMQ; donc EOA + AOX = PMQ + QMN, ou EOXA = PMN; mais PMN eſt le tiers du triangle PMT, égal à la Figure ABCDE, donc EOXA eſt le tiers de cette Figure.

De même à cauſe que le point L de la ſeconde diviſion égale NL, tombe ſur la baſe RS du triangle RMS égal au triangle BOC, je diviſe la baſe BC de ce triangle en Z en même raiſon que la baſe RS eſt diviſée en L, & menant la droite OZ, la partie XOZB eſt encore un tiers de la Figure; car à cauſe de AOB = QMR, & de AOX = QMN, nous avons XOB = NMR; or, BOZ. BOC :: BZ. BC :: RL. RS, & RML. RMS :: RL. RS; donc BOZ. BOC :: RML. RMS, & à cauſe de BOC = RMS, nous avons BOZ = RML, & par conſéquent XOB + BOZ = NMR + RML, ou XOZB = NML; mais NML eſt le tiers du triangle PMT égal à la Figure ABCDE; donc XOZB en eſt auſſi le tiers, & par conſéquent OZCD eſt le tiers reſtant.

Si on veut que la Figure ſoit diviſée dans la raiſon de trois

lignes inégales, je diviſe la baſe PT dans la même raiſon, & j'acheve le reſte comme auparavant.

432. *Remarque.* On voit par-là qu'il eſt également facile de diviſer une Figure en parties égales ou inégales en raiſon donnée, c'eſt pourquoi je ne parlerai plus que de la diviſion des Figures en parties égales.

433. Probleme. *Diviſer une Figure donnée* ABCD (Fig. 277.) *en tel nombre de parties égales qu'on voudra par un point donné* O *dans l'aire.*

Du point O, je mene à tous les angles les droites OA, OB, OC, OD qui diviſent la Figure en triangles. Je change ces triangles en d'autres MEN, NEP, PEQ, QER qui leur ſoient égaux chacun à chacun, & qui ayent une même hauteur, c'eſt-à-dire MEN=AOD, NEP=AOB, PEQ=BOC, & QER=COD, & par conſéquent le triangle entier MER eſt égal à la Figure ABCD.

Si l'on veut donc diviſer la Figure en trois parties égales, je diviſe la baſe MR en trois également aux points H, L, d'où je mene au ſommet les droites HE, LE qui diviſent le triangle MER en trois triangles MEH, HEL, LER égaux entr'eux, & dont chacun par conſéquent eſt le tiers du triangle MER ou de la Figure ABCD; ainſi à cauſe que le point H du tiers MH tombe ſur la baſe NP du triangle NEP égal au triangle AOB, je diviſe la baſe AB de ce triangle en X, en même raiſon que NP eſt diviſé en H, & menant la droite XO, la partie DOXA eſt le tiers de la Figure, ce que l'on démontrera comme dans le Problême précédent. De même à cauſe que le point L de la ſeconde diviſion égale HL, tombe ſur la baſe PQ du triangle PEQ égal au triangle BOC, je diviſe la baſe BC de ce triangle en Z, en même raiſon que la baſe PQ l'eſt en L, & menant ZO la partie XOZB eſt encore le tiers de la Figure, & par conſéquent DOZC eſt l'autre tiers.

434. Corollaire. On ſe ſervira de la même méthode lorſqu'il faudra diviſer un triangle par un point donné dans l'aire, car il faut prendre garde que dans le Problême du nombre 430, le point dans l'aire n'étoit point donné, & qu'il s'agiſſoit de le trouver, au lieu qu'ici il faut néceſſairement s'aſtreindre au point que l'on donne.

435. Probleme. *Diviſer un trapezoïde* ABCD (Fig. 278.) *en autant de parties égales qu'on voudra.*

Si on veut qu'il ſoit diviſé en quatre parties égales, je diviſe la baſe inférieure AB en quatre parties égales aux points M, N, R; je diviſe de même la baſe ſupérieure DC en quatre également aux points S, T, X, & menant par les points de diviſion les droites MS, NT, RX, le trapezoïde eſt diviſé en quatre trapezoïdes égaux.

Car le trapezoïde ADSM eſt égal au produit de la ſomme de ſes deux baſes AM, DS par la moitié de ſa hauteur (*N.* 386.); or, les trois autres trapezoïdes ont la même hauteur, & les baſes égales aux deux AM, DS; donc ils ſont égaux au même produit.

436. PROBLEME. *Diviſer un trapezoïde* ABCD (Fig. 280.) *par des lignes paralelles à ſa baſe.*

Je prolonge les côtés non-paralelles AD, CB juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en E; je réduis le trapezoïde en un triangle MNP qui lui ſoit égal, & le triangle DEC en un autre PNS qui lui ſoit égal, & qui ait même hauteur que le triangle MNP; ainſi le trapezoïde ABCD eſt au triangle DCE comme le triangle MNP eſt au triangle PNS, ou comme la baſe MP à la baſe PS à cauſe que les deux triangles ont la même hauteur.

Si l'on veut donc que le trapezoïde ſoit diviſé en trois parties égales; je diviſe la baſe MP en trois également aux points Q, R, d'où je mene les droites QN, RN qui diviſent le triangle MNP en trois parties égales; je prens une moyenne proportionnelle SO entre SP & SR; enſuite une quatriéme proportionnelle EL aux trois lignes SP, SO, ED, & du point L menant LH paralelle à la baſe AB la partie LHCD eſt le tiers du trapezoïde.

Car les triangles EDC, ELH étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés $\overline{ED}^2$, $\overline{EL}^2$ de leurs côtés homologues; or, par la conſtruction nous avons ED. EL :: SP. SO, donc $\overline{ED}^2$. $\overline{EL}^2$ :: $\overline{SP}^2$. $\overline{SO}^2$; mais nous avons auſſi SP. SO :: SO. SR, donc $\overline{SP}^2$. $\overline{SO}^2$ :: SP. SR. (*N.* 393.), & par conſéquent EDC. ELC :: SP. SR :: SNP. SNR, & diviſant EDC. ELC—EDC :: SNP. SNR—SNP, ou EDC. LHCD :: SNP. RNP, mais nous avons EDC = SNP, donc LHCD = RNP, c'eſt-à-dire, la partie LHCD eſt égale au triangle RNP qui eſt le tiers du triangle MNP, ou le tiers du trapezoide ABCD.

Je prens de même une moyenne proportionnelle SZ entre

SP & SQ, puis une quatriéme proportionnelle ET aux quatre lignes SP, SZ, ED, & menant TV paralelle à la baſe, la partie TVDC eſt les deux tiers du trapezoïde ABCD, ce qui ſe démontre de même que ci-deſſus; donc retranchant la partie LHCD qui en eſt auſſi le tiers, le reſte TVHL eſt le tiers, & par conſéquent ABVT eſt le tiers reſtant.

437. PROBLEME. *Retrancher d'un triangle* ABC (Fig. 279.) *un triangle égal à un triangle donné* DEF.

Je cherche un triangle HCL égal au triangle DEF, & ſemblable au triangle ABC (*N.* 414.), & retranchant l'un de l'autre le reſte eſt ABLH.

Des Figures Iſopérimetres.

438. Deux ou pluſieurs figures qui ont les circuits égaux ſont dites *Iſopérimetres.*

439. PROBLEME. *Une figure étant donnée, en faire une autre d'une autre eſpece qui lui ſoit iſopérimetre.*

Suppoſé que l'on demande de faire un rectangle iſopérimetre au triangle ABC; (*Fig.* 281.) j'ajoûte enſemble les côtés du triangle, en ſorte qu'ils forment la ligne droite EL; je coupe cette ligne en deux également en G, & enſuite chacune des moitiés en deux parties inégales, faiſant EF=HL, & FG=GH; je prens les deux égales EF, HL pour former les deux baſes ſupérieure & inférieure d'un rectangle MO, & les deux FG, GH pour en former les côtés; ainſi le rectangle MO eſt iſopérimetre au triangle ABC.

440. COROLLAIRE. Il eſt aiſé de voir qu'on pourroit faire de la même façon un quarré, un polygone régulier, &c. iſopérimetre au triangle ABC.

441. PROBLEME. *Un triangle ſcalene* ABC (Fig. 283.) *étant donné, conſtruire ſur la même baſe* AB *un triangle iſoſcele iſopérimetre au triangle* ABC.

Je prens AD égal à la moitié des deux côtés AC, CB, & je fais ſur la baſe AB un triangle ADB dont les côtés AD, BD ſoient égaux.

442. PROPOSITION XCVI. *De tous les triangles iſopérimetres faits ſur une même baſe, celui qui eſt iſoſcele ſur cette baſe eſt plus grand que ceux qui ne ſont pas iſoſceles, & les autres ſont d'autant plus petits que leur côtés ſont plus inégaux.*

Soit le triangle ABC (*Fig.* 284.) iſoſcele ſur la baſe AB, c'eſt-à-dire dont les côtés AC, CB ſont égaux, & le triangle ABE iſopérimetre au triangle ABC, mais qui n'eſt pas iſoſcele ſur ſa baſe, ou qui n'a pas les côtés AE, EB égaux. Je prolonge AC en R, faiſant AC = CR, & je mene la droite ER; dans le triangle AER les deux côtés AE, ER pris enſemble, ſont plus grands que AR ou que AC, CB, ou enfin, que AE + EB = AC + CB, à cauſe que les deux triangles ACB, AEB ſont iſopérimetres, & qu'ils ont la même baſe, ainſi nous avons AE + ER > AE + EB, & retranchant AE de part & d'autre, nous avons ER plus grand que EB; or, les triangles BCE, ECR, ont le côté CE commun, le côté BC égal au côté CR; mais la baſe BE eſt plus petite que la baſe ER, comme on vient de voir; donc l'angle BCE eſt plus petit que l'angle ECR, (*N.* 108.) & par conſéquent moindre que la moitié de l'angle RCB; mais l'angle RCB externe au triangle ACB, étant égal aux deux internes oppoſés A & ABC qui ſont égaux, eſt double de l'angle ABC, & menant la droite CS paralelle à AB, l'angle SCB eſt égal à ſon alterne ABC, & vaut par conſéquent la moitié de l'angle RCB; donc l'angle BCE eſt moindre que l'angle SCB, & par conſéquent le ſommet E du triangle ABE tombe en deſſous de la paralelle CS; ainſi la hauteur du triangle iſoſcele ACB eſt plus grande que celle du triangle AEB; mais ces deux triangles ayant la même baſe AB, ſont entr'eux comme leur hauteur; donc le triangle ACB eſt plus grand que le triangle AEB.

On démontrera de la même façon que le triangle AFB iſopérimetre au triangle AEB; mais dont les côtés AF, FB ſont plus inégaux entr'eux que les côtés AE, EB, eſt moindre que le triangle AEB, & ainſi des autres.

443. COROLLAIRE. *Si deux triangles iſoſceles & iſopérimetres* ABC, AEC (Fig. 285.) *ont un côté* AC *commun, celui qui eſt iſoſcele ſur ce côté; c'eſt-à-dire le triangle* ABC *qui a ſes deux angles égaux ſur* AC, *eſt plus grand que celui qui n'eſt pas iſoſcele ſur ce côté; c'eſt-à-dire que le triangle* AEC *qui a ſes angles égaux ſur* CE *& non pas ſur* AC. Ce qui ſe démontre de même que ci-deſſus; car le triangle AEC conſidéré par rapport à la baſe AC, eſt ſcalene, puiſque ces côtés AE, EC ſont inégaux, au lieu que le triangle ABC, conſidéré par rapport à la même baſe eſt iſoſcele.

444. PROPOSITION XCVII. *Si deux triangles iſopérimetres & iſoſceles* AEC, ABC (Fig. 285.) *ont un côté commun* AC, *celui*

dont la différence de la baſe à chacun de ſes côtés égaux, eſt moindre, eſt plus grand que celui dont la différence de la baſe à chacun de ſes côtés égaux, eſt plus grande.

Soit le triangle iſoſcele ACE dont les côtés égaux ſont AE, AC, & la baſe eſt EC que nous ſuppoſerons plus grande que le côté AE ou AC; ſi je veux faire ſur AC un triangle iſopérimetre au triangle AEC & iſoſcele ſur AC, il faut que des deux côtés inégaux AE, EC, jen faſſe deux égaux AB, BC, & pour cela, je dois prendre la moitié de l'excès de EC ſur AE, & le donner à AC; ainſi dans le nouveau triangle ABC le côté AB ou BC ſera plus grand que AC de la moitié de l'excès de CE ſur AE ou AC, & par conſéquent la différence de la baſe AC de ce nouveau triangle à ſon côté BC ou BA, ſera moindre que dans le triangle ACE, la différence de la baſe CE au côté AC; or, le nouveau triangle ABC étant iſoſcele ſur le côté commun AC, eſt plus grand que le triangle AEC qui n'eſt pas iſoſcele ſur ce côté, donc, &c.

Si dans le triangle AEC la baſe EC étoit plus petite que le côté AE ou AC, il ſeroit facile de faire la même démonſtration.

445. PROPOSITION XCXVIII. *De tous les triangles iſopérimetres, celui qui eſt équilatéral eſt le plus grand.*

Soit le triangle ſcalene ABC, (*Fig.* 286.) je fais ſur ſa baſe AB un triangle iſoſcele ADB, & iſopérimetre à ABC, & par conſéquent ADB eſt plus grand que ACB. (*N.* 442.) Je fais ſur le côté AD du triangle iſoſcele ADB un triangle iſopérimetre & iſoſcele DEA, & ce triangle DEA étant iſoſcele ſur DA, eſt plus grand que ADB qui n'eſt pas iſoſcele ſur DA, (*N.* 443.) & la différence de ſa baſe AD à ſes côtés AE, DE eſt moindre que dans le triangle ADB, la différence de la baſe AB à ſes côtés AD, DB. (*N.* 444.) Je fais de même ſur ED un triangle iſoſcele EOD & iſopérimetre au triangle DEA; ainſi ce dernier triangle EDO eſt plus grand que le triangle DEA, & la différence de ſa baſe à ſes côtés eſt moindre; donc, puiſqu'à meſure que la différence de la baſe aux côtés diminuë, le triangle iſopérimetre devient plus grand; il s'enſuit que quand cette différence ſera nulle; c'eſt-à-dire quand le triangle iſopérimetre ſera équilatéral, ce triangle ſera le plus grand de tous les iſopérimetres.

Si l'on prend un autre triangle ſcalene iſopérimétre au triangle ACB; mais de différente baſe, & qu'on faſſe le même raiſonnement, on trouvera que le triangle équilatéral iſopérimetre à ce

triangle, ſera le plus grand ; or, on ne peut trouver qu'un ſeul triangle équilatéral iſopérimetre à pluſieurs iſopérimetres, donc il eſt vrai en général que de tous les triangles iſopérimetres de mêmes baſes ou de baſes inégales, l'équilatéral eſt le plus grand.

446. PROPOSITION XCXIX. *De tous les paralellogrammes iſopérimetres qui ont la même baſe* AB (Fig. 287.), *le plus grand eſt le rectangle* ADCB, *& les autres ſont d'autant moindres qu'ils ont des angles plus aigus.*

Du point A pris pour centre & avec le rayon AD, je décris un demi-cercle MDN, & du même point menant le rayon AE à un point de la circonférence E différent de D, j'acheve le paralellogramme AEGB, lequel eſt iſopérimetre au rectangle ADCB, puiſqu'ils ont la baſe commune AB, & le côté AE égal au côté AD, à cauſe que ce ſont des rayons d'un même cercle. Or, le point D étant le point de la circonférence le plus éloigné du diamétre MN, la hauteur AD du rectangle ADCB eſt plus grande que la hauteur EF du paralellogramme AEGB ; donc le rectangle eſt plus grand que le paralellogramme, puiſque ces Figures ayant même baſe ſont entr'elles comme leurs hauteurs.

Si l'on prend ſur la circonférence un point H plus éloigné de D que le point E, & qu'ayant mené le rayon AH on acheve le paralellogramme AHLB, on démontrera aiſément que ce paralellogramme eſt moindre que le paralellogramme AEGB, & ainſi des autres.

447. PROPOSITION C. *De tous les rectangles iſopérimetres, le plus grand eſt le quarré* ABCD (Fig. 288.), *& les autres ſont d'autant moindres que leurs côtés ſont plus inégaux.*

Je retranche de la hauteur AB la partie BR, & j'ajoute à la baſe AD la partie AE égale à BR, & achevant le rectangle EFHD, le quarré ABCD, eſt iſopérimetre au rectangle EFHD qui a gagné ſur la longueur de la baſe, ce qu'il a perdu ſur la hauteur. Or, les rectangles BRHC, EARF ayant les baſes BR, EA égales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs RH, AR, & RH eſt plus grande que AR, donc le rectangle BRHC eſt plus grand que le rectangle EARF, & ajoutant la partie commune ARHD, nous avons ABCD plus grand que EFHD. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Je retranche de la hauteur AR ou EF du rectangle EFHD une partie FN, & j'ajoute à ſa baſe ED une partie ES égale à FN ; ainſi achevant le rectangle STVD, ce rectangle STVD eſt

inopérimetre au rectangle EFHD ; or, les rectangles FNHV, TNES ayant les baſes FN, SE égales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs FH, EN, & FH eſt plus grand que EN ; donc le rectangle FNHV eſt plus grand que le rectangle TNES, & ajoutant à chacun d'eux la partie commune ENVD, le rectangle EFHD eſt plus grand que le rectangle STVD dont les côtés ſont plus inégaux. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

448. PROPOSITION CI. *Si deux triangles rectangles* ABC, RCD *ſont ſemblables* (Fig. 289.), *je dis que le quarré d'une ligne compoſée des deux hypothenuſes* BC, CD, *eſt égal au quarré d'une ligne compoſée des deux côtés homologues* AB, CR, *plus au quarré d'une autre ligne compoſée des deux autres côtés homologues* AC, RD.

Je joints en ligne droite les hypothenuſes BC, CD, & à cauſe de l'angle ABC égal à l'angle RCD, les lignes AB, RC ſont paralelles, de même que les lignes AC, RD, à cauſe des angles égaux ACB, RDC. Je prolonge BA juſqu'à la rencontre de DR prolongée en P ; ainſi les droites AC, PR paralelles entre les paralelles BP, CR ſont égales, & par la même raiſon les droites AP, CR le ſont auſſi, & le triangle BPD eſt rectangle ; donc $\overline{BD}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PD}^2$; c'eſt-à-dire le quarré de la ligne BP égale aux deux hypothenuſes, eſt égal au quarré de la ligne BP ou BA + RC, plus au quarré de la ligne PD ou RD + AC.

449. PROBLEME. *Deux triangles iſoſceles* ABC, CDE *d'inégales baſes & qui ne ſont pas ſemblables entr'eux étant donnés* (Fig. 290.), *conſtruire ſur les mêmes baſes deux autres triangles iſoſceles & ſemblables entr'eux* AHC, CRE *dont les quatre côtés* AH, HC, CR, RE *ſoient enſemble égaux aux quatre côtés* AB, BC, CD, DE *des triangles donnés pris enſemble.*

J'ajoute en ligne droite les côtés AB, CD des triangles donnés ; je coupe la ſomme MN en S en même raiſon que la ſomme AE de leurs baſes, eſt coupée en C ; je prens deux droites égales chacune à la grande partie MS, & je conſtruis avec ces deux lignes & la grande baſe AC un triangle iſoſcele AHC. Je prens de même deux lignes égales chacune à la petite partie SN, & je conſtruis avec ces deux lignes & la petite baſe CE un triangle iſoſcele CRE ; ainſi les deux triangles iſoſceles AHC, CRE ſont ſemblables, car nous avons AH. CR :: MS. SN :: AC. CE, & de plus leurs quatre côtés pris enſemble ſont égaux aux quatre côtés

côtés des triangles donnés, puiſque nous avons AH + CR = MS + SN = MN = AB + CD.

450. PROPOSITION CII. *Deux triangles iſoſceles* ABC, CDE *non-ſemblables étant donnés ſur des baſes inégales ou égales* AC, CE (Fig. 291.), *ſi ſur les mêmes baſes on fait deux triangles iſoſceles* AHC, CRE *ſemblables entr'eux, & dont les quatre côtés* AH, HC, CR, RE *ſoient enſemble égaux aux quatre côtés* AB, BC, CD, DE *des triangles donnés, je dis que les deux triangles ſemblables* AHC, CRE, *pris enſemble ſeront plus grands que les deux* ABC, CDE *pris enſemble.*

Des ſommets H, D, j'abaiſſe les perpendiculaires HP, DQ qui paſſeront par les autres ſommets B, R, à cauſe que les quatre triangles ſont iſoſceles ſur les baſes AC, CE; je prolonge la perpendiculaire DQ du plus grand des deux triangles donnés, faiſant QL = DQ; du ſommet B de l'autre triangle donné, je mene la droite BL, & du point L la droite LC. Les deux triangles rectangles CQD, CQL ayant le côté CQ commun, & le côté DQ égal à QL, ſont parfaitement égaux, & par conſéquent nous avons LC = CD, & BC + CL = BC + CD = HC + CR. Or, dans le triangle BCL les deux côtés BC, CL étant enſemble plus grands que le côté BL, le quarré d'une ligne compoſée des deux BC, CL, ou des deux HC, CR eſt donc plus grand que le quarré de BL, & par conſéquent nous avons $\overline{HC+CR}^2 > \overline{BL}^2$.

Les triangles rectangles HPC, RQC étant ſemblables à cauſe de l'angle aigu HCP égal à l'angle aigu RCQ, le quarré d'une ligne compoſée de leurs hypothenuſes HC, CR eſt égal au quarré d'une ligne compoſée des deux côtés HP, RQ, plus au quarré de la ligne PQ compoſée des deux autres côtés PC, CQ (*N.* 448.), ainſi nous avons $\overline{HC+CR}^2 = \overline{HP+RQ}^2 + \overline{PQ}^2$.

De même les triangles rectangles PBS, SLQ étant ſemblables le quarré de la ligne BL compoſée des deux hypothenuſes BS, SL eſt égal au quarré d'une ligne compoſée des deux côtés BP, QL ou QD, plus au quarré de la ligne PQ compoſée des deux autres côtés PC, CQ, & par conſéquent $\overline{BL}^2 = \overline{BP+QD}^2 + \overline{PQ}^2$; or, nous avons trouvé $\overline{BL}^2$ plus petit que $\overline{HC+CR}^2$, donc $\overline{BP+QD}^2 + \overline{PQ}^2$ eſt plus petit que $\overline{HC+CR}^2$, ou que ſon égal $\overline{HP+RQ}^2 + \overline{PQ}^2$; retranchant donc $\overline{PQ}^2$ de part & d'autre, nous

aurons $\overline{BP+QD}^2$ plus petit que $\overline{HP+RQ}^2$, donc en tirant la racine quarrée de part & d'autre, nous aurons $BP+QD$ plus petit que $HP+RQ$, c'eſt-à-dire les hauteurs des deux triangles non-ſemblables, ſont enſemble moindres que les hauteurs des deux triangles ſemblables, d'où il ſuit que l'excès HB de la hauteur HP du triangle AHC ſur la hauteur PB du triangle ABC eſt plus grand que l'excès DR de la hauteur DQ du triangle CDE ſur la hauteur RQ du triangle CRE. Cela poſé.

Le triangle ABC eſt $\frac{1}{2}AC\times PB$, & le triangle CDE eſt $\frac{1}{2}CE\times DQ$ (*N.* 375.), & leur ſomme eſt $\frac{1}{2}AC\times PB+\frac{1}{2}CE\times DQ$, au contraire le triangle AHC eſt $\frac{1}{2}AC\times\overline{PB+BH}$, & le triangle CRE eſt $\frac{1}{2}CE\times\overline{QD-DR}$, & leur ſomme eſt $\frac{1}{2}AC\times\overline{PB+BH}+\frac{1}{2}EC\times\overline{QD-DR}$, comparant donc cette ſomme avec la précédente $\frac{1}{2}AC\times PB+\frac{1}{2}CE\times DQ$, il eſt aiſé de voir que le triangle AHC gagne ſur le triangle ABC, une quantité $\frac{1}{2}AC\times BH$ plus grande que la quantité $\frac{1}{2}EC\times DR$ que le triangle CRE perd par rapport au triangle CDE, puiſque $\frac{1}{2}AC$ eſt plus grand que $\frac{1}{2}CE$, & BH plus grand que DR; donc les deux triangles ſemblables AHC, CRE, ſont enſemble plus grands que les non-ſemblables ABC, CDE.

451. PROPOSITION CIII. *De toutes les Figures iſopérimetres d'un même nombre de côtés, la plus grande eſt celle qui eſt équilaterale, & équiangle.*

Soit la Figure de cinq côtés ABCDE (*Fig.* 292.), qui n'eſt pas équilatérale, & dont les côtés inégaux ſont EA, AB; je mene la droite EB, & je fais ſur cette baſe un triangle iſoſcele ERB dont les deux côtés ER, RB pris enſemble ſoient égaux aux côtés EA, AB pris enſemble; ainſi le triangle ERB eſt plus grand que le triangle EAB (*N.* 442.), & ajoutant la partie commune EDCB, la Figure REDCB eſt plus grande que la Figure AEDCB. Donc toute la Figure irréguliére dans ſes côtés n'eſt pas la plus grande des Figures iſopérimetres d'un même nombre de côtés.

Soit donc la Figure ABCDE (*Fig.* 293.) réguliere dans ſes côtés, mais qui a des angles inégaux EDC, EAB; je mene les droites EC, EB, & faiſant ſur ces droites priſes pour baſes deux triangles iſoſceles ſemblables ERC, EHB, & dont les quatre côtés ſoient enſemble égaux aux quatre côtés des triangles EDC,

EAB, les deux triangles ERC, EHB, ſont enſemble plus grands que les deux EDC, EAB (*N.* 450.), & ajoutant de part & d'autre la partie commune EBC, la Figure ERCH eſt plus grande que la Figure EDCBA, donc toute Figure irréguliere dans ſes angles n'eſt pas la plus grande des Figures iſopérimetres d'un même nombre de côtés.

Or, entre toutes les figures iſopérimetres d'un même nombre de côtés, il faut néceſſairement qu'il y ait une plus grande, à cauſe qu'un contour donné ne peut pas enfermer un eſpace qui devienne toujours plus grand, & nous venons de trouver que toutes celles qui ne ſont pas régulieres ne ſauroient être les plus grandes, donc la Figure réguliere dans ſes côtés & dans ſes angles eſt la plus grande de toutes.

452. PROPOSITION CIV. *Un angle droit* ABC *étant donné* (Fig. 294.) *ſi l'on diviſe l'un de ſes côtés* BA *en parties égales* BD, DE, EF, &c. *& que de tous les points de diviſion on mene des droites* DC, EC, FC, &c. *à un point quelconque* C *de l'autre côté* BC, *je dis que les angles* DCB, ECB, FCB, &c. *iront en diminuant à meſure qu'ils s'éloigneront du premier* DCB.

Du point C pris pour centre, & de l'intervalle CD, je décris un arc de cercle qui coupe les lignes voiſines de CD, l'une en R & l'autre en H; ainſi à cauſe que l'inclinée CD eſt plus grande que la perpendiculaire CB, j'ai CH=CD plus grand que CB; & à cauſe que l'oblique CE eſt plus grande que l'oblique CD qui eſt moins éloignée de la perpendiculaire CB, j'ai CR = CD moindre que CE; or, les triangles CDB, CED ayant la hauteur commune CB, & les baſes DB, DE égales ſont égaux entr'eux, & le ſecteur CDH eſt plus grand que le triangle CDB, au lieu que le ſecteur CRD eſt moindre que le triangle CED, donc le ſecteur CDH eſt plus grand que le ſecteur CRD; mais ces deux ſecteurs ſont comme leurs arcs DH, DR, ou comme les angles DCH, DCR qui ſont meſurés par ces arcs, donc l'angle DCH eſt plus grand que l'angle DCR, & on prouvera de la même façon que l'angle FCE eſt moindre que l'angle ECD.

453. COROLLAIRE. *Donc les angles* DCB, ECD, FCE, &c. *ne ſont pas dans la raiſon des baſes* DB, ED, FE, &c. *des triangles* DCB, ECD, &c. car ces baſes ſont égales, & les angles au contraire vont en diminuant.

454. PROPOSITION CV. *Si deux polygones réguliers* ABCDE, FGHLMN (Fig. 295.) *de différentes eſpeces ſont iſopérimetres, le*

côté AB *du premier eſt au côté* FG *du ſecond, réciproquement comme le nombre des côtés du ſecond, eſt au nombre des côtés du premier, & l'angle au centre* AOB *eſt à l'angle au centre* FPG *dans la même raiſon que le côté* AB *eſt au côté* FG, *c'eſt-à-dire encore réciproquement comme le nombre des côtés du ſecond au nombre des côtés du premier.*

Le côté AB, eſt la cinquiéme du circuit ABCDE, & le côté FG eſt la ſixiéme partie du circuit FGHLMN; mais ces deux circuits ſont égaux, donc AB eſt à FG, comme $\frac{1}{5}$ eſt à $\frac{1}{6}$, & réduiſant ces fractions au même dénominateur, ce qui donnera $\frac{6}{30}$ & $\frac{5}{30}$, nous aurons AB eſt à FG, comme $\frac{6}{30}$ & à $\frac{5}{30}$, ou comme 6 eſt à 5; c'eſt-à-dire comme le nombre 6 des côtés du ſecond eſt au nombre 5 des côtés du premier.

De même à cauſe que tous les angles au centre d'un polygone valent quatre angles droits, l'angle au centre AOB, eſt la cinquiéme partie de quatre droits & l'angle au centre FPG en eſt la ſixiéme partie; donc ces deux angles ſont entr'eux comme $\frac{1}{5}$ eſt à $\frac{1}{6}$, ou comme $\frac{6}{30}$ eſt à $\frac{5}{30}$, ou comme 6 eſt à 5, & par conſéquent dans la même raiſon de AB à FG, ou du nombre des angles du polygone FGHLM au nombre des angles du polygone ABCDE.

455. PROPOSITION CVI. *Deux Polygones réguliers iſopérimetres, mais de differens nombres de côtés étant donnés, le plus grand eſt celui qui a un plus grand nombre de côtés.*

Soit le pentagone régulier ABCDE (*Fig.* 296.) iſopérimetre à l'exagone régulier FGNTVM; le côté AB du pentagone eſt donc au côté FG de l'exagone, comme 6 à 5 (*N.* 454.), & par conſéquent ſi le côté AB eſt diviſé en 6 parties égales, le côté FG en contiendra cinq. Je prens la moitié de l'une de ces parties que je porte de A en H, & l'autre moitié de B en L, & je mene les lignes HO, LO, & l'apothême OQ, ainſi puiſque AB contient 6 parties égales & doubles chacune de la partie AH, la ligne AQ qui eſt la moitié de AB contiendra ſix moitiés de ces parties égales, c'eſt-à-dire ſix parties égales à AH; concevant donc que AQ ſoit diviſé en ces 6 parties égales, & que de tous les points ſoient menées au point O des droites, le triangle AOQ ſera diviſé en 6 petits triangles égaux, chacun au triangle AOH; mais comme les angles au ſommet O de ces ſix triangles iront en diminuant à meſure que leurs baſes s'éloigneront de OQ (*N.* 452.), l'angle AOH ſera moindre que la ſixiéme partie de l'angle AOQ, & par la même raiſon l'angle BOL égal à l'angle AOH ſera auſſi moindre que la ſixiéme partie

de l'angle QOL ; ainſi l'angle HOL ſera plus grand que les cinq ſixiémes de l'angle AOB, c'eſt-à-dire que HOL ſera plus grand par rapport à l'angle AOB que 5 par rapport à 6. Or, l'angle FRG eſt à l'angle AOB, comme 5 à 6 ; donc l'angle HOL ſera plus grand que l'angle FRG, & par conſéquent dans le triangle iſoſcele HOL les deux angles ſur la baſe OHL, OLH ſeront plus petits que les deux angles RFG, RGF ſur la baſe du triangle iſoſcele RFG. Faiſant donc ſur FG deux angles SFG, SGF égaux aux deux angles OHL, OLH, il eſt clair que les deux côtés FS, SG étant plus inclinés ſur la baſe que les deux FR, GR ſe couperont en un point S plus proche de la baſe que le point R où ſe coupent les deux FR, GR ; & que par conſéquent le triangle FSG aura la hauteur SP plus petite que la hauteur RP du triangle FRG ; mais les triangles HOL, FSG étant ſemblables & égaux ont les hauteurs égales OQ, SP ; donc OQ eſt plus petit que RP. Or, le pentagone ABCDE eſt égal au produit de ſon circuit multiplié par la moitié de ſon apotheme OQ (*N.* 377.), & l'exagone FGNTVM eſt égal au produit de ſon circuit par la moitié de ſon apotheme, donc à cauſe de l'égalité des deux circuits, ces deux polygones ſont entr'eux comme la moitié de leurs apothemes, ou comme leurs apothemes, & par conſéquent le pentagone eſt plus petit que l'exagone qui a plus de côtés de lui. Et on démontrera la même choſe à l'égard de deux autres polygones réguliers iſopérimetres de différens nombres de côtés.

456. COROLLAIRE. *De tous les Polygones réguliers, le cercle étant celui qui contient un plus grand nombre de côtés, il s'enſuit que de tous les Polygones reguliers iſopérimetres, le cercle eſt plus grand.*

457. *REMARQUE.* De tout ce que nous venons de dire touchant les Figures iſopérimetres, on en peut aiſément conclure que tous les Magazins que l'on conſtruit dans les Places pour les munitions de guerre & de bouche, les quarrés contiennent davantage que ceux qu'on fait en quarré long en ſuppoſant le même circuit, & que les circulaires ſont ceux qui contiennent le plus. On pourroit ajouter, en faveur de ces derniers, que la Figure de leurs couvertures, les garantit beaucoup plus que tous les autres du choc direct des Bombes.

CHAPITRE X.

De la Steréométrie, ou de la Meſure des Solides, de leurs Surfaces & de leurs rapports.

Des différentes poſitions des Lignes à l'égard des Plans, & de celles des Plans entr'eux.

458. ON dit qu'une ligne droite eſt *ſur un Plan* lorſque toutes ſes parties ſont dans ce Plan.

459. *Si deux points* R, S (Fig. 297.) *d'une ligne droite ſont ſur un Plan* ABCD, *toutes les parties de cette ligne, même prolongée à l'infini, ſeront dans ce Plan auſſi prolongé à l'infini.* Du point R par le point S menez dans le plan ABCD, la droite RS; ce que l'on peut faire, puiſque toutes les parties de ce plan ne hauſſent ni ne baiſſent pas plus les unes que les autres; cette ligne RS aura tous ſes points ſur le plan; or, du point R au point S on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite; donc il n'eſt pas poſſible qu'une autre ligne droite qui a les points R, S ſur le plan ABCD, ait quelqu'un de ſes points entre R & S qui ne ſoient pas ſur ce plan; & il eſt évident que ſi l'on prolonge la ligne droite RS de part & d'autre en Z & en X tous les points de cette ligne ſeront encore ſur le plan ABCD, prolongé s'il le faut.

460. *Deux lignes droites* AB, CB *qui ſe coupent en* B (Fig. 298.) *ſont dans un même plan.*

Je mene la droite AC, & la faiſant mouvoir toujours paralellement à elle-même juſqu'en B, le long de la droite AB, elle décrit par ſon mouvement une ſurface ACEB; or, les points C, B de la droite BC ſont dans cette ſurface; donc toute la ligne BC eſt dans le plan ACEB de même que la ligne AB.

461. *Donc les trois lignes d'un triangle* ABC *ſont dans un même plan.*

462. Une ligne qui n'a que l'un de ſes points dans un plan prolongé même à l'infini, eſt dite perpendiculaire ſur ce plan, lorſqu'elle eſt également inclinée vers tous les côtés de ce plan.

463. *Si une ligne* AB (Fig. 299.) *eſt perpendiculaire ſur deux*

Digitized by Google

lignes TN, SR *qui ſont dans un même plan* CDEF, *& qui ſe coupent en* A ; *je dis que la ligne* AB *eſt perpendiculaire ſur ce plan.* Je prens ſur les lignes TN, SR des parties égales AS, AT, AR, AN ; les droites BS, BR, BT, BN menées du ſommet A aux extrêmités de ces quatre parties, ſeront égales entr'elles à cauſe que AB eſt perpendiculaire ſur TN & ſur SR ; ainſi menant dans le plan les droites ST, NR, les triangles SBT, NBR ſeront égaux entr'eux, de même que les triangles iſoſceles SAT, NAR qui ont les angles au ſommet égaux ; je mene dans le plan par le point A une droite PQ qui ſe termine ſur les droites ST, NR ; les triangles PAT, NAQ ayant l'angle PAT égal à l'angle NAQ qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'angle PTA égal à l'angle ANQ, à cauſe des deux triangles iſoſceles & égaux SAT, NAR, & le côté TA égal au côté AN ſont ſemblables & égaux ; donc PT=NQ, PA =AQ ; de même les triangles PTB, QNB ayant le côté PT égal au côté NQ, le côté TB égal au côté NB, & l'angle compris PTB égal à l'angle compris QNB, à cauſe des triangles iſoſceles égaux SBT, NBR, ſont parfaitement égaux, donc PB=BQ, & par conſéquent à cauſe de PA=AQ, la ligne AB eſt auſſi perpendiculaire ſur PQ, & on démontrera de la même façon que AB eſt auſſi perpendiculaire ſur toutes les lignes menées par le point A ; donc cette ligne eſt perpendiculaire ſur le plan.

464. *D'un même point* A, (Fig. 299.) *on ne peut élever ſur un même plan qu'une ſeule perpendiculaire* AB ; toute autre inclinera néceſſairement plus d'un côté que d'un autre.

465. *Si deux ou pluſieurs lignes ſont perpendiculaires ſur un même plan, elles ſont paralelles entr'elles.* Soient les lignes AB, EF, CD (*Fig.* 300.) perpendiculaires au plan MNOP, je mene par leurs extrémités les lignes droites AE, EC, AC. Je fais mouvoir la ligne AB toujours paralellement à elle-même le long de AE ; & comme dans ce mouvement elle n'incline pas plus d'un côté que de l'autre, il eſt clair que lorſqu'elle ſera arrivée en E, elle ſera encore perpendiculaire ſur le plan, donc elle tombera ſur la ligne EF, car autrement, du même point E on pourroit élever ſur le même plan deux perpendiculaires ; ce qui eſt impoſſible (*N.* 464.). Je prouverois de même qu'en faiſant avancer la ligne EF toujours paralellement à elle-même le long de la ligne EC ; elle tombera ſur CD lorſqu'elle ſera parvenuë en C, & qu'en faiſant mouvoir CD le long de CA, elle tombera ſur AB lorſqu'elle

ſera parvenuë en A; d'où il eſt aiſé de conclure que les trois lignes AB, EF, CD ſont paralelles.

466. *Il ſuit delà que deux lignes paralelles* AB, EF *ſont dans un même plan.* Car menant la ligne AE qui joint leurs extrémités, & faiſant enſuite mouvoir la ligne AB toujours paralellement à elle-même le long de AE, elle doit tomber ſur EF lorſqu'elle ſera parvenuë en E, ſuppoſé qu'elle ſoit paralelle à EF; mais AB, pendant ce mouvement, décrira un plan; donc EF ſera dans ce plan.

467. Il ſuit encore delà, que *ſi deux ou pluſieurs lignes ſont paralelles entr'elles, & que l'une d'entr'elles ſoit perpendiculaire ſur un plan, les autres ſeront auſſi perpendiculaires ſur le même plan.*

468. *Si trois lignes égales* AB, CD, EF (Fig. 301.) *ſont perpendiculaires ſur un plan, & que leurs extrémités* A, E, C, *ne ſoient pas en ligne droite, le plan qui paſſera par les extrêmités ſupérieures* B, F, D *ſera paralelle au plan* MNOP. Je mene dans le plan MNOP les droites AE, EC, AC; les lignes AB, EF étant perpendiculaires ſur le même plan MNOP ſont paralelles entr'elles, (*N.* 465.) & à cauſe qu'elles ſont égales, les droites AE, BF ſont auſſi paralelles & égales; par la même raiſon, les droites EC, FD ſont paralelles & égales de même que les droites AC, BD; donc les trois côtés du triangle BFD, étant paralelles chacun à chacun aux trois côtés du triangle AEC, ces deux triangles ſont paralelles; & par conſéquent le triangle BFD eſt paralelle au plan MNOP.

469. *Si une ligne* AB (Fig. 302.) *eſt perpendiculaire ſur deux plans* MNOP, RHTX, *ces deux plans ſont paralelles.* Je mene par le point A dans le plan MNOP la droite AC, & la droite AB venant à ſe mouvoir toujours paralellement à elle-même le long de la droite AC, eſt toujours perpendiculaire ſur le plan MNOP, & ſon extrêmité B décrit une droite BS ſur laquelle AB eſt auſſi toujours perpendiculaire; or, je dis que BS doit être dans le plan RHTX; car ſi cela n'étoit pas, ce plan couperoit la droite CS en un autre point quelconque E; ainſi menant dans ce plan la droite BE, la droite CS perpendiculaire ſur SB, ſeroit néceſſairement oblique ſur BE, & par conſéquent ſur le plan RHTX; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

470. *Si deux plans ſont paralelles entr'eux, toutes les perpendiculaires menées entre ces deux plans, ſont égales.* Ce qui eſt évident, puiſque

puiſque les deux plans ſont toujours à égale diſtance, & que les diſtances ſe meſurent par les perpendiculaires.

471. PROBLEME. *D'un point donné* A (Fig. 303.) *hors d'un plan* MNOP, *abaiſſer une perpendiculaire ſur ce plan.*

Je mene dans le plan une ligne quelconque RQ; du point donné A, j'abaiſſe ſur cette ligne une perpendiculaire AS; du point S je mene dans le plan MNOP une droite ST perpendiculaire ſur RQ, & du point A j'abaiſſe ſur ST la perpendiculaire AT qui ſera perpendiculaire ſur le plan MNOP.

Car la droite RS étant perpendiculaire ſur les deux côtés TS, SA du triangle TSA, eſt par conſéquent perpendiculaire ſur ce triangle; (*N.* 463.) ainſi menant dans le plan MNOP la droite XT perpendiculaire ſur TS; cette droite XT étant paralelle à RS, ſera auſſi perpendiculaire ſur le triangle TSA, (*N.* 467.) & par conſéquent ſur le côté TA de ce triangle; donc puiſque TA eſt perpendiculaire ſur XT, & qu'elle l'eſt auſſi ſur TS par la conſtruction, & que XT, TS ſont dans le même plan MNOP; il s'enſuit que TA eſt perpendiculaire ſur le plan (*N.* 463.).

472. PROBLEME. *D'un point donné* T *ſur un plan* MNOP, (Fig. 304.) *élever une perpendiculaire ſur ce plan.*

D'un point quelconque A pris hors du plan, j'abaiſſe une perpendiculaire AS, & enſuite du point T, menant TX paralelle à SA, cette droite TX eſt perpendiculaire ſur le plan (*N.* 467.).

473. Si une ligne droite eſt inclinée ſur un plan, le plus petit angle qu'elle fait avec ce plan, ſe nomme *Angle d'inclinaiſon* de la ligne ſur le plan.

474. PROBLEME. *Une ligne* AB (Fig. 305.) *étant inclinée ſur un plan*, MNOP, *trouver ſon angle d'inclinaiſon ſur ce plan.*

De l'extrêmité B de cette ligne, j'abaiſſe ſur le plan la perpendiculaire BC; & du point C menant la droite AC dans le plan, l'angle BAC eſt l'angle d'inclinaiſon; ce que je démontre ainſi.

Du point A pris pour centre, & avec le rayon AC, je décris dans le plan MNOP le cercle CDEHS, & du point A je conçois qu'il ſoit mené à la circonférence une infinité de rayons AD, AE, AH &c. qui formeront tous avec la droite BA différents angles BAD, BAE, &c. Je mene la droite BD, & le triangle BCD eſt rectangle; car la droite BC étant perpendiculaire ſur MNOP, eſt auſſi perpendiculaire ſur les droites AC, CD qui ſont dans ce plan, & qui paſſent par le point C; ainſi BD eſt plus grand que

BC. Or, les triangles ABC, ABD ont le côté AB commun, le côté AC égal au côté AD, parce que ces deux côtés ſont rayons d'un même cercle; mais la baſe BC de l'un, eſt moindre que la baſe BD de l'autre; donc l'angle BAC eſt moindre que l'angle BAD; (*N.* 109.) & on prouvera de même que l'angle BAE eſt plus grand que l'angle BAC, & ainſi des autres. Donc l'angle BAC étant le moindre des angles que la ligne BA fait avec les lignes menées par le point A dans le plan MNOP, eſt l'angle d'inclinaiſon de la ligne BA ſur ce plan.

475. Il ſuit delà, 1°. *Que l'angle* BAH *qui eſt l'angle de ſuite de l'angle d'inclinaiſon* BAC, *eſt le plus grand de tous les angles que la ligne* BA *fait avec le plan.* 2°. *Que de tous les autres angles qui ſont entre le plus grand* BAH *& le moindre* BAC; *ceux qui s'approchent plus du grand ſont plus grands que ceux qui s'en éloignent davantage; & enfin qu'on peut toujours trouver deux angles égaux, moindres que le plus grand* BAH, *& plus grand que le moindre* BAC; *mais qu'on n'en trouvera jamais trois d'égaux.* Je mene la droite CE dans le plan, & la droite EB au ſommet B de la perpendiculaire; ainſi le triangle EBC ſera rectangle de même que le triangle DCB; mais à cauſe que ces deux triangles ont le côté BC commun, & que le côté CD eſt moindre que le côté CE, puiſque l'arc CD eſt moindre que l'arc CE; il s'enſuit que le côté EB du triangle rectangle EBC, eſt plus grand que le côté BD du triangle rectangle BDC; or, les triangles ABE, ABD ayant le côté AB commun, le côté AE égal au côté AD, & la baſe EB plus grande que la baſe BD. Il eſt clair que l'angle BAE qui s'éloigne plus de l'angle d'inclinaiſon BAC, eſt plus grand que l'angle qui s'en éloigne moins; & continuant le même raiſonnement, on prouvera que l'angle BAH qui eſt l'angle de ſuite de l'angle d'inclinaiſon BAC, eſt le plus grand de tous ceux qui ſont faits par la ligne AB avec les rayons menés du centre ſur la demi circonférence HEC; & quant à ceux qui ſeront faits par la même ligne AB avec les rayons menés du centre ſur l'autre demi circonférence HSC; il eſt facile de démontrer qu'ils ſeront égaux chacun à chacun à ceux qui auront été faits avec les rayons de la demi circonférence HEC.

476. *Il ſuit encore delà, que l'angle* BAC *d'inclinaiſon d'une ligne* BA *ſur un plan, eſt dans un plan* BAC *perpendiculaire ſur le plan* MNOP. Car la droite BC étant perpendiculaire ſur le plan

MNOP, le triangle ABC dans lequel eſt la droite BC, eſt auſſi perpendiculaire ſur ce plan.

477. *Si deux plans* ABCD, EFGH *ſe coupent* (Fig. 306.) *leur commune ſection eſt une ligne droite.*

Le plan ABCD n'eſt autre choſe que la ſomme de ſes élémens DC, RX, RX, &c. de même que le plan EFGH n'eſt autre choſe qne la ſomme de ſes élémens FG, SZ, SZ, &c. donc quand ces plans viennent à ſe couper, les élémens de l'un coupent les éléments de l'autre; or, les éléments étant des lignes ne ſe coupent qu'en un point; donc la ſection des deux plans eſt une ſuite de points M, O, O, O &c. N, & par conſéquent une ligne; mais cette ligne en tant qu'elle appartient au plan ABCD, ne hauſſe ni ne baiſſe dans aucune de ſes parties du côté de G ni du côté de F, & en tant qu'elle appartient au plan EFGH, elle ne hauſſe ni ne baiſſe dans aucune de ſes parties du côté de C ni du côté de D; donc il faut néceſſairement qu'elle ſoit une ligne droite.

478. *Si deux plans* ABCD, EFGH *qui ſe coupent* (Fig. 307.) *ſont perpendiculaires ſur un plan* MNOP, *leur commune ſection* RS *eſt perpendiculaire ſur ce plan.* Car en tant que RS appartient au plan ABCD perpendiculaire ſur MNOP, elle n'incline pas plus ſur le plan MNOP du côté de E, que du côté de H, & par conſéquent elle eſt perpendiculaire ſur EH; de même en tant que RS appartient au plan EHGF auſſi perpendiculaire ſur MNOP, elle n'incline pas plus du côté de A que du côté de B; donc puiſque RS eſt perpendiculaire ſur les deux lignes EH, AB qui ſont dans le plan MNOP, elle eſt perpendiculaire ſur ce plan (*N.* 463.).

479. *Si les côtés* AB, BC (Fig. 308.) *d'un angle* ABC *qui eſt dans un plan* ABC, *ſont paralelles aux côtés* DE, EF *d'un autre angle* DEF *qui eſt dans un autre plan* DEF; *ces deux angles* ABC, DEF *ſont égaux.* Je joins les ſommets par la droite BE, & faiſant avancer l'angle ABC toujours paralellement à lui-même, le côté AB tombe néceſſairement ſur ſa paralelle DE, & le côté BC ſur ſa paralelle BC; d'où il ſuit que les deux angles ſont égau

480. *L'angle d'inclinaiſon de deux plans* ABED, BEFC (Fig. 309.) *qui ſe coupent eſt le même par tout.* Suppoſons que l'angle ABC ſoit l'angle d'inclinaiſon des deux plans du côté de B; je mene à l'extrêmité E de la commune ſection BE & dans le plan ABDE unedroite

ED paralelle à AB. Je mene de même dans le plan BEFC une droite EF paralelle à BC; ainſi faiſant gliſſer l'angle ABC toujours paralellement à lui-même le long de BE, il tombera enfin ſur l'angle DEC & lui ſera égal; mais le plan que la jambe AB décrira pendant ſon mouvement, ſera lemême que le plan ABED, & celui que l'autre jambe BC décrira, ſera le même que le plan BCFE; donc l'angle d'inclinaiſon de ces deux plans eſt le même partout.

481. PROBLEME. *Trouver l'angle d'inclinaiſon de deux plans* ABED, BCEF (Fig. 309.) *qui ſe coupent.*

D'un point quelconque O pris ſur la ſection commune BE; je mene dans le plan ABED la droite OR perpendiculaire ſur BE, & dans le plan BCFE la droite OH auſſi perpendiculaire ſur BE, & l'angle ROH eſt l'angle d'inclinaiſon cherché.

Car le plus ou moins d'inclinaiſon des deux plans entr'eux, conſiſte uniquement dans le plus ou moins de diſtance qu'ils conſervent entr'eux; donc les côtés RO, OH de l'angle qui meſure cette inclinaiſon, ne doivent plus ou moins s'approcher que dans le ſens des plans, & par conſéquent ils ne doivent incliner ni du côté de B ni du côté E.

482. *Si deux plans paralelles* ABCD, EHFG (Fig. 310.) *ſont coupés par un troiſiéme plan* MON, *les deux ſections* RS, PQ *ſont paralelles.* Si cela n'étoit pas, les deux ſections s'approcheroient d'un côté & s'éloigneroient de l'autre; donc les deux plans à qui elles appartiennent en feroient de même & ne ſeroient plus paralelles; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Il ſuit delà, *que ſi le plan* MON *qui coupe les deux plans paralelles, eſt un triangle, les côtés* MO, NO *de ce triangle ſont coupés proportionnellement par les ſections* RS, PQ, *ſuppoſé néanmoins que* MN *ſoient paralelles à* RS; ce qui eſt évident.

483. Si trois angles plans BAC, CAD, DAB (*Fig.* 311.) qui ſont dans trois plans différents ont le ſommet commun A, & que leurs côtés s'ajuſtent, ils forment un angle en A qui ſe nomme *Angle ſolide*; tels ſont tous les angles des corps dont les faces ſe terminent en pointe.

484. Il faut au moins trois angles plans pour former un angle ſolide; car il eſt viſible que ſi entre les deux angles plans BAD, BAC, il ne ſe trouvoit pas un troiſiéme angle CAD, les deux angles plans BAD, BAC ſeroient dans un même plan.

485, *Si un angle ſolide* A (Fig. 312.) *eſt formé par trois angles*

plans SAM, MAN, NAS *la ſomme de deux de ſes angles eſt plus grande que le troiſiéme.* Si l'on veut que l'angle SAN ſoit plus grand que les deux autres, je fais dans le plan de cet angle, l'angle SAR égal à l'angle SAM, & par conſéquent l'angle reſtant RAP, eſt plus grand que l'angle NAM. Je prens ſur la jambe AM de l'angle SAM la partie AC, & je fais AR = AC; du point C je mene la droite CB qui coupe l'autre jambe SA de l'angle SAM en un point quelconque B; du point B par le point R, je mene la droite SP qui coupe la droite AN en P, & du point P par le point C, je mene la droite CP; ce qui me donne le triangle BCP qui ſert de baſe à l'angle ſolide A.

Les triangles BAC, BAR ſont parfaitement égaux, à cauſe de BA commun, de AC = AR & de l'angle compris BAC égal à l'angle compris BAR; donc BC égal à BR. Or, les triangles RAP, PAC ont le côté AR égal au côté AC, le côté AP commun; mais l'angle RAP eſt plus grand que l'angle PAC, par la ſuppoſition; donc la baſe RP eſt plus grande que la baſe PC, & par conſéquent BR + RP ou BP eſt plus grande que BC + CP; ce qui eſt impoſſible, à cauſe que dans tout triangle BPC un côté ſeul BP eſt toujours moindre que les deux autres; donc, il eſt impoſſible auſſi que l'angle BAP ſoit plus grand que la ſomme des deux autres BAC, CAP qui forment l'angle ſolide A.

486. *La ſomme des angles plans* BAC, CAP, PAB *qui forment un angle ſolide* A (Fig. 312.) *vaut toujours moins que quatre angles droits.* Je termine l'angle ſolide A par une baſe BPC, laquelle forme avec les plans des trois angles BAC, CAP, PAB trois autres angles ſolides B, C, P. Or, dans l'angle ſolide B, les deux angles plans PBA, ABC valent plus que le troiſiéme PBC; (*N.* 485.) de même dans l'angle ſolide C, les deux angles plans BCA, ACP valent plus que le troiſiéme BCP, & dans l'angle ſolide P, les deux angles CPA, APB valent plus que le troiſiéme CPB; mais dans le triangle BPC, les trois angles PBC, BCP, CPB, valent enſemble deux droits; donc les ſix angles PBA, ABC, BCA, ACP, CPA, APB valent plus de deux droits; mais tous les angles des trois triangles BAC, CAP, PAB valent enſemble ſix droits, à cauſe que dans chaque triangle, les trois triangles valent deux droits; retranchant donc de ſix angles droits la valeur des angles ſur les baſes des trois triangles, laquelle vaut plus de deux droits; les trois angles qui forment l'angle ſolide A, vaudront enſemble moins de quatre droits; & on prouvera

facilement la même choſe ſi l'angle ſolide A étoit formé par plus de trois angles plans.

De la Meſure des Solides, & de leurs rapports.

487. On nomme *Cube* un ſolide compris ſous ſix faces, dont tous les côtés ſont égaux entr'eux, & les angles ſont droits (*Fig.* 313.); la face ABCD ſur laquelle on conçoit que le ſolide eſt appuyé, ſe nomme *Baſe inferieure*, ou ſimplement *Baſe*; la face FGHE oppoſée à la baſe, ſe nomme *Baſe ſuperieure*, & les quatre autres faces ſe nomment *faces aſcendantes*, à cauſe qu'elles ſont entre la baſe inférieure & la ſupérieure; il eſt viſible que la hauteur de ce ſolide n'eſt pas différente de l'un des côtés GB des faces aſcendantes, puiſque toutes les faces ſont perpendiculaires les unes ſur les autres.

488. Un *Paralellepipede* eſt un ſolide ABCDEFGH (*Fig.* 314.) compris ſous ſix paralellogrammes dont les oppoſés ſont égaux, on le nomme *Paralellepipede rectangle*, lorſque tous les angles des paralellogrammes ſont droits, & *Paralellepipede incliné*, quand les angles ne ſont pas droits.

489. Un *Priſme* ABCDEFGHILNM (*Fig.* 315.) eſt un ſolide compris ſous deux baſes égales & paralelles ABCDEF, HILNMG, & ſous autant de paralellogrammes, que chacune des baſes à de côtés. Ce ſolide eſt *droit* lorſque les paralellogrammes montans ſont perpendiculaires ſur les baſes, & *incliné* lorſque ces paralellogrammes ſont inclinés entre les baſes. Si la baſe du priſme eſt un triangle, on le nomme *Priſme triangulaire*, ſi la baſe eſt un pentagone, on le nomme *Priſme pentagonal*, & ainſi des autres.

490. Un *Cylindre*, eſt un ſolide compris ſous deux baſes égales & paralelles, qui ſont deux cercles AB, CD (*Fig.* 316.), & ſous une ſurface courbe qui regne entre les deux cercles.

Un cercle étant un polygone d'une infinité de côtés, on peut concevoir un cylindre comme un priſme, dont la baſe eſt compoſée d'une infinité de lignes droites ou de côtés.

491. Une *Pyramide*, eſt un ſolide compris ſous une baſe ABCD (*Fig.* 317.), & ſous autant de triangles montans AEB, BEC, CED, DEA que la baſe a de côtés, leſquels triangles ont tous leurs ſommets en un même point E; la ligne EO menée du ſommet au centre O de la baſe, ſe nomme *Axe*, & cet axe ne differe

point de la hauteur lorſqu'il eſt perpendiculaire ſur la baſe ; mais lorſqu'il eſt incliné ſur la baſe, la pyramide eſt auſſi inclinée, & la hauteur doit ſe prendre par la perpendiculaire menée du ſommet E ſur la baſe.

492. Un *Cône*, eſt une pyramide ABE (*Fig.* 318.) dont la baſe AB eſt un cercle, on le nomme *Droit*, lorſque ſon axe EO eſt perpendiculaire ſur la baſe, & incliné lorſque l'axe eſt incliné.

493. La Sphére eſt un ſolide ABCD (*Fig.* 319.) parfaitement rond, & au milieu duquel eſt un point O également éloigné de tous les points de la ſurface. Si l'on conçoit qu'un demi-cercle ACB tourne autour de ſon diamétre BA immobile, il décrira une Sphére par ſa circonvolution. Toute ligne droite BA qui paſſe par le centre O & qui aboutit de part & d'autre à la ſurface, ſe nomme *Axe* ou *Diamétre de la Sphére*, & toute ligne OB menée du centre à la ſurface, ſe nomme *Rayon.*

494. PROPOSITION CVII. *Si l'on coupe un paralellepipede, ou un priſme ou un cylindre droits ou inclinés par un plan paralelle à la baſe, ce plan ſera ſemblable & égal à la baſe.*

Soit le paralellepipede ABCDEFGH (*Fig.* 314.) coupé par le plan MNOP paralelle à ſa baſe ABCD ; le paralellogramme BCHG étant coupé par les deux plans MNOP, ABCD paralelles entr'eux, les ſections NO, BC faites ſur ce paralellogramme, ſont auſſi paralelles (*N.* 482.), & par conſéquent égales à cauſe qu'elles ſont entre les paralelles BG, CH, & on prouvera de la même façon que les trois côtés du plan MNOP ſont égaux & paralelles aux trois autres côtés de la baſe ABCD chacun à chacun ; or, les angles du plan MNOP ſont auſſi égaux aux angles de la baſe, à cauſe qu'ils ont leurs cotés paralelles à ceux de la baſe ; donc les deux plans MNOP, ABCD ſont ſemblables & égaux.

La même choſe ſe démontrera à l'égard d'un cube, car un cube n'eſt autre choſe qu'un paralellepipede rectangle, dont les côtés de la baſe & la hauteur ſont égaux.

495. PROPOSITION CVII *Tout cube, tout paralellepipede, tout priſme, & tout cylindre droit ou incliné, eſt égal à ſa baſe multipliée par ſa hauteur, c'eſt-à-dire par la perpendiculaire tirée entre les deux baſes.*

Soit le paralellepipede AB (*Fig.* 320.) ; ſi l'on conçoit qu'il ſoit coupé par une infinité de plans paralelles à la baſe, & infiniment proches, la ſomme de ces plans ſera égale au paralellepi-

pede. Or, tous ces plans ſont égaux à la baſe (*N.* 494.) ; donc leur ſomme n'eſt autre choſe que la baſe priſe autant de fois qu'il y a de plans, c'eſt-à-dire la baſe multipliée par la grandeur qui marque la multitude des plans. Mais la hauteur AC du paralellepipede ſe trouve coupée par les plans en autant de parties infiniment petites & égales, & chacune de ces parties eſt la hauteur infiniment petite de chaque plan, puiſque les hauteurs ſe prennent par les perpendiculaires ; donc la hauteur AC marque la multitude des plans qui compoſent le paralellepipede, & par conſéquent ce ſolide eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur.

On démontrera de la même façon que le paralellepipede incliné AB (*Fig.* 321.) eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur CE ; car quoique l'aréte inclinée AC ſoit coupée par les plans en autant de parties égales qu'il y a de plans qui compoſent le ſolide, cependant comme cette ligne n'eſt pas perpendiculaire entre les plans, chacune de ſes parties ſe trouve plus grande que la hauteur infiniment petite de chacun des plans, au lieu que chaque petite partie de la perpendiculaire CE eſt préciſément égale à la hauteur infiniment petite de chaque plan ; d'où il ſuit que c'eſt la perpendiculaire qui doit en exprimer la multitude, & que par conſéquent le paralellepipede eſt égal à ſa baſe multipliée par ſa hauteur.

496. COROLLAIRE Ier. *Tous les paralellepipedes, tous les priſmes, tous les cylindres qui ont même hauteur & même baſe, ou les hauteurs égales & les baſes auſſi, ſont égaux.* Cela eſt évident, puiſqu'ils ſont les produits de leurs baſes par leur hauteur.

497. COROLLAIRE II. *Les paralellepipedes, les priſmes & les cylindres qui ont les baſes égales & les hauteurs inégales, ſont entr'eux comme les hauteurs, ceux qui ont les baſes inégales & les hauteurs égales, ſont entr'eux comme leurs baſes, & ceux qui ont les baſes réciproques aux hauteurs, ſont égaux.*

Soient les deux paralellepipedes AF, MR (*Fig.* 322.), ſi l'on ſuppoſe que les deux baſes ſont égales, je nomme X l'une & l'autre baſe, ainſi le premier eſt X × HA, & le ſecond eſt X × MT ; or, à cauſe que les hauteurs HA, MT ſont multipliées par une même grandeur X, les produits X × HA, X × MT ſont entr'eux comme HA, MT, donc les paralellepipedes ſont entr'eux comme les hauteurs HA, MT.

On démontrera de la même façon que ſi les baſes ſont inéga-

les

les & les hauteurs égales, les paralellopipedes ſont entr'eux comme les baſes.

Enfin, ſi les baſes ſont réciproques aux hauteurs, c'eſt-à-dire ſi l'on a ABCD. MNOP :: MT. AH, on aura en faiſant le produit des extrêmes & des moyens ABCD × AH = MNOP × MT, c'eſt-à-dire, les deux paralellepipedes égaux.

498. COROLLAIRE III. *Les paralellepipedes, les priſmes & les cylindres, ſont entr'eux en raiſon compoſée de la raiſon de leurs hauteurs, & de celle de leurs baſes.*

Soient les deux paralellepipedes AF, MR (*Fig.* 322.), la raiſon de leurs hauteurs eſt AH, MT, celle de leurs baſes eſt ABCD, MNOP, & la compoſée des deux eſt AH × ABCD, MT × MNOP : or, les deux termes de cette raiſon ſont les deux paralellepipedes; donc ces deux ſolides ſont en raiſon compoſée, &c.

499. PROPOSITION CVIII. *Si l'on coupe une pyramide* ABCDE, *dont la hauteur eſt* EQ (Fig. 323.) *par un plan* MNOP *paralelle à la baſe* ABCD. *Je dis* 1°. *que ce plan ſera ſemblable à la baſe.* 2°. *Qu'il ſera à la baſe comme le quarré de ſa hauteur* SE *au quarré de la hauteur* QE *de la baſe, en prenant pour hauteurs les diſtances des plans au ſommet* E *de la pyramide.*

La face AEB étant coupée par les deux plans MNOP, ABCD paralelles entr'eux, les ſections MN, AB ſont paralelles entr'elles, & par la même raiſon les trois autres côtés du plan MNOP ſont paralelles aux trois autres côtés de la baſe. Or, dans la face AEB, nous avons MN. AB :: ME. AE, à cauſe des paralelles MN, AB, & par la même raiſon dans la face ADE, nous avons MP. AD :: ME. AE, donc MN. AB :: MP. AD, ce qui fait voir que les côtés MN, MD du plan MNOP ſont proportionnels aux côtés AB, AD de la baſe. Et par un ſemblable raiſonnement on trouvera que les deux autres côtés PO, ON du plan MNOP ſont auſſi proportionnels aux côtés DC, CB de la baſe. Mais les angles du plan MNOP ſont égaux aux angles de la baſe chacun à chacun, à cauſe des côtés paralelles, donc le plan MNOP eſt ſemblable à la baſe. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Les plans MNOP, ABCD étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues MN, AB, mais nous avons MN. AB :: ME. AE, donc les deux plans ſont entr'eux comme les quarrés de ME. AE. Du point Q où la perpendiculaire coupe la baſe, je mene la droite AQ, ce qui me donne

le triangle AQE, dans lequel les deux ſections MS, AQ faites par les deux plans MNOP, ABCD paralelles entr'eux, ſont paralelles. Ainſi j'ai SE. QE :: ME. AE, & par conſéquent les deux plans MNOP, ABCD étant entr'eux comme les quarrés de ME, AE, ſont auſſi comme les quarrés de SE, QE. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

On démontrera la même choſe d'une pyramide inclinée ABCE (*Fig.* 324.), car prolongeant le plan MNOP, & la baſe juſqu'à la rencontre de la perpendiculaire EQ menée du ſommet ſur la baſe, & menant dans la baſe la droite AQ, qui donnera le triangle AQE, les ſections MS, AQ faites ſur le triangle par les plans paralelles MNOP, ABCD prolongés, ſeront paralelles, ainſi l'on aura ES, EQ :: EM, EA :: MN. AB, & les plans PMNO, ABCD étant entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues MN, AB, à cauſe qu'ils ſont ſemblables, ſeront par conſéquent comme les quarrés de leurs hauteurs ES, EQ.

500. PROPOSITION CIX. *Les pyramides qui ont les baſes égales, & les hauteurs auſſi, ſont égales.*

Soient les deux pyramides ABCDE, HZVQ (*Fig.* 325.), dans leſquelles je ſuppoſe que la baſe quarrée de la premiere eſt égale à la baſe triangulaire de la ſeconde, & que la hauteur OE eſt égale à la hauteur QX. Je coupe l'une & l'autre par des plans MNLP, RYT paralelles aux baſes, & qui ſoient à égales diſtances des ſommets E, Q; ce qui me donne ES=QF; or, dans la premiere pyramide, j'ai MNLP. ABCD :: $\overline{SE}^2$. $\overline{OE}^2$ (*N.* 499.), & dans la ſeconde RYT. HZV :: $\overline{QF}^2$. $\overline{QX}^2$; donc à cauſe de $\overline{QF}^2=\overline{ES}^2$, & de $\overline{QX}^2=\overline{OE}^2$, j'ai MNLP. ABCD :: RYT. HZV; mais ABCD=HZV, donc MNLP=RYT.

Or, ſi l'on conçoit que l'une & l'autre pyramide ſoient coupées par une infinité de plans paralelles aux baſes, il n'y aura pas plus de plans dans l'une que dans l'autre, à cauſe des hauteurs égales, & chaque plan de l'une ſera égal à chaque plan de l'autre, qui ſera à égale diſtance du ſommet, ainſi qu'on vient de voir, donc la ſomme des plans de l'une ſera égale à la ſomme des plans de l'autre, & par conſéquent les deux pyramides ſeront égales.

501. COROLLAIRE. Ce que nous venons de dire dans les deux Propoſitions précédentes touchant les pyramides, doit s'enten-

dre auſſi des cônes droits ou inclinés, puiſque les cônes ſont des pyramides dont les baſes ont un infinité de côtés.

502. PROPOSITION CX. *Tout priſme triangulaire* ABCDEF, (Fig. 326.) *peut ſe diviſer en trois pyramides égales.*

Je coupe les trois paralellogrammes montans par les diagonales AF, FC, EC, & je fais paſſer un plan par les deux AF, FC, & un autre par les deux FC, EC, ce qui me donne trois pyramides ABCF, EFDC, ECAF; or, les deux premieres ont les baſes ABC, DEF égales, de même que leurs hauteurs BF, DC; & ſi l'on conçoit que la ſeconde EFDC ait pour baſe le triangle ECD, & que la baſe de la troiſiéme EACF ſoit le triangle ECA, on trouvera que ces deux pyramides ſont auſſi égales, à cauſe que leurs baſes EAC, ECD ſont égales, & qu'elles ont leurs ſommets au même point F, ce qui leur donne une même hauteur. Donc les trois pyramides ſont égales.

503. COROLLAIRE. *Donc tout priſme triangulaire* ABCDEF *eſt triple d'une pyramide* ABCF *de même hauteur & de même baſe.*

504. PROPOSITION CXI. *Toute pyramide de quelque nombre de côtés que ſoit ſa baſe, eſt le tiers d'un priſme de même hauteur & de même baſe.*

Soit la pyramide pentagonale ABCDEF (*Fig.* 327.); du point O où ſon axe coupe la baſe, je mene des droites OA, OB, OC, &c. à tous les angles, ce qui diviſe la baſe en autant de triangles qu'elle a de côtés. Je coupe la pyramide par des plans qui paſſent par le ſommet F & par les droites OA, OB, OC, &c. & la pyrade ſe trouve diviſée en cinq pyramides triangulaires, qui ont chacune pour baſe l'un des triangles de la baſe. Je conſtruis ſur ces triangles des priſmes triangulaires de même hauteur, & ces cinq priſmes pris enſemble forment un priſme total dont la baſe eſt la même que celle de la pyramide, & qui a même hauteur; or, chacun des priſmes triangulaires eſt triple de la pyramide triangulaire correſpondante; donc le priſme total eſt triple de la pyramide totale, & par conſéquent la pyramide en eſt le tiers.

Et on démontrera la même choſe à l'égard des pyramides inclinées, & des cônes droits ou inclinés.

505. COROLLAIRE. *Les pyramides qui ont les baſes égales, & les hauteurs inégales, ſont entr'elles comme leurs hauteurs, celles qui ont les hauteurs égales, & les baſes inégales ſont entr'elles comme leurs baſes, & celles qui ont les hauteurs réciproques aux baſes ſont égales.*

Les pyramides ſont le tiers des priſmes de même baſe & de

même hauteurs; or, ce qui convient aux entiers convient à leurs tiers, donc ce que nous avons dit des priſmes (*N.* 497.) doit ſe dire auſſi des pyramides.

506. PROPOSITION CXII. *Une pyramide* ABCF (Fig. 328.) *étant donnée, ſi on la coupe par un plan* OED *paralelle à la baſe, je dis que pour avoir la valeur de la partie tronquée* ABCDEO, *il faut chercher un plan moyen proportionnel Géométrique entre la baſe inférieure & la ſupérieure* DEO, *ajouter ce plan aux deux baſes, & multiplier le tout par le tiers de la hauteur* XZ *de la partie tronquée* ABCDEO.

Suppoſons que la pyramide ſoit triangulaire, je coupe deux des faces montantes ABEO, BCDE par des diagonales AE, CE, & faiſant paſſer un plan par ces deux diagonales, je retranche de la pyramide tronquée la pyramide ABCE, & il me reſte une autre pyramide AODCE; je coupe la face AODC par la diagonale OC, & je coupe AODCE par un plan qui paſſe par le ſommet E & par la diagonale OC, ce qui me donne deux autres pyramides AOCE, ODCE.

Maintenant je cherche le rapport de la premiere de ces trois pyramides ABCE à la ſeconde AOCE, & comme elles ont deux faces ABE, OEA qui ſont ſur un même plan, ſi je prens ces deux faces pour leurs baſes, elles auront l'une & l'autre le ſommet en C, & par conſéquent leur hauteur ſera la même, d'où il ſuit que ces deux pyramides ſeront entr'elles comme leurs baſes ABE, OEA; mais ces deux baſes ou triangles étant entre les deux paralelles AB, OE, ſont entr'eux comme leurs baſes AB, OE; donc les deux pyramides ſeront entr'elles comme AB, OE; ainſi nommant P la premiere ABCE, & S la ſeconde AOCE, nous aurons P. S :: AB. OE.

Je compare de même la ſeconde AOCE avec la troiſiéme ODCE, & prenant pour leurs baſes les faces AOC, ODC qui ſont ſur un même plan, elles ſe trouvent avoir le ſommet commun en E, & par conſéquent la même hauteur, d'où il ſuit que ces deux pyramides ſont entr'elles comme leurs baſes ou triangles AOC, ODC, mais ces triangles étant entre les paralelles AC, OD ſont entr'eux comme leurs baſes AC, OD, & à cauſe des triangles ſemblables ABC, OED, nous avons AC. OD :: AB. OE, donc les deux pyramides AOCE, ODCE ſont entr'elles comme AB. OE; ainſi nommant T la troiſiéme ODCE, nous avons S. T :: AB. OE, mais nous avons trouvé P. S :: AB. OE;

donc nous avons auſſi P. S :: S. T, c'eſt-à-dire les trois pyramides qui compoſent la pyramide tronquée ABCDEO ſont en proportion continue.

Je cherche un plan moyen proportionnel que je nomme V entre la baſe inférieure ABC, & la ſupérieure OED, ce qui donne ABC. V :: V. OED, & multipliant tout par la même grandeur $\frac{1}{3}$XZ, c'eſt-à-dire par le tiers de la hauteur XZ du tronquement, les trois quantités ABC×$\frac{1}{3}$XZ, V×$\frac{1}{3}$XZ, & OED×$\frac{1}{3}$XZ, ſont encore en proportion continue; or, la premiere ABC×$\frac{1}{3}$XZ eſt égale à la premiere pyramide ABCE, & la troiſiéme OED×$\frac{1}{3}$XZ eſt égale à la troiſiéme pyramide ODCE; donc la ſeconde V×$\frac{1}{3}$XZ doit être égale à la ſeconde AOCE, & par conſéquent le tronquement ABCDEO eſt égal aux trois plans ABC, V, OED multipliés par le tiers de la hauteur ZX du tronquement.

Si la pyramide n'eſt pas triangulaire (*Fig.* 329.) des centres Z, X des deux baſes, je mene des droites à leurs angles, & faiſant paſſer des plans par les lignes de diviſion de l'une & l'autre baſe, le tronquement ſe trouve diviſé en autant de tronquemens de pyramides triangulaires que la baſe a de côtés, & chacun de ces tronquemens ſera égal à ſes deux baſes triangulaires ajoutées au plan moyen proportionnel, le tout multiplié par $\frac{1}{3}$ZX. Or, ſi je prens un plan moyen proportionnel MNPQ entre la baſe totale ABCD, & la baſe totale HEFG, ce plan ſe trouvera diviſé en un même nombre de triangles que ces baſes, & chacun de ces triangles ſera moyen proportionnel entre les deux baſes de la pyramide triangulaire qu'il coupera; donc en ajoutant enſemble les plans ABCD, MNPQ, HEFG, & multipliant la ſomme par $\frac{1}{3}$XZ, j'aurai tout d'un coup la ſomme des tronquemens triangulaires qui compoſent le tronquement AF.

Il eſt aiſé d'appliquer la même choſe aux tronquemens des pyramides inclinées.

507. PROPOSITION CXIII. *Tout priſme triangulaire tronqué* (Fig. 330, 331, 332, 333.) *eſt égal au triangle* ABC *qui lui ſert de baſe multiplié par le tiers des trois arêtes que forment les plans montans, c'eſt-à-dire par le tiers de ſes trois longueurs.*

Il peut arriver que le priſme triangulaire ne ſoit tronqué que par une de ſes extrémités (*Fig.* 332, 333, 334) ou qu'il ſoit tronqué par ſes deux extrémités (*Fig.* 335.).

Si le priſme triangulaire n'eſt tronqué que par une de ſes extrémités, il peut ſe faire 1°. Que deux de ſes longueurs BE, CD

(*Fig.* 330.) ſoient égales, & la troiſiéme AH plus grande que chacune des deux autres. 2°. Que deux de ſes longueurs AH, CG (*Fig.* 331.) étant égales, la troiſiéme BE ſoit moindre que chacune d'elles. 3°. Enfin, que les trois longueurs AH, BE, CG ſoient inégales entr'elles (*Fig.* 332.). Examinons tous ces cas en particulier.

Si la longueur AH eſt plus grande que les deux égales BE, CD (*Fig.* 330.), je coupe le priſme par un plan EFD paralelle à la baſe ABC, & qui paſſe par les extrêmités E, D des longueurs égales BE, CD, ce qui coupe le priſme tronqué en deux ſolides, dont l'un eſt le priſme ABCDE, & l'autre eſt la pyramide DEFH; or, le priſme ABCDE eſt égal à ſa baſe ABC multipliée par la longueur BE, ou par le tiers de ſes trois longueurs égales AF, BE, CD, & la pyramide eſt égale à ſa baſe DEF ou ABC ſon égale multipliée par le tiers de ſa hauteur FH; ainſi le priſme tronqué ABCDEH eſt égal à ſa baſe ABC multipliée par le tiers des trois longueurs DC, BE, AF plus le tiers de la longueur FH; mais le tiers de AF, plus le tiers de FH eſt égal au tiers de AH; donc le priſme tronqué eſt égal à ſa baſe multipliée par le tiers de ſes trois longueurs CD, BE, AH.

Si les deux longueurs égales AH, CG (*Fig.* 331.) ſont plus grandes que la troiſiéme BE, je coupe le priſme par un plan DEF paralelle à ſa baſe ABC, & qui paſſe par l'extrémité E de la troiſiéme longueur BE, ce qui coupe le priſme tronqué en deux ſolides, dont l'un eſt le priſme triangulaire ABCDEF, & l'autre eſt la pyramide DGHFE. Je coupe la face DGHF de cette pyramide par la diagonale HD, & faiſant paſſer un plan par cette diagonale, & par le ſommet E, la pyramide DGHF eſt coupée en deux autres pyramides HDFE, DGHE qui ſont égales entr'elles, à cauſe du ſommet E commun, & des baſes HGD, HDF qui ſont viſiblement égales, puiſque DGHF eſt un paralellogramme dont la diagonale eſt HD. Mais prenant pour baſe de la pyramide FEDH le plan FED=ADC, la hauteur de cette pyramide eſt la droite FH; donc cette pyramide eſt égale au plan ADC multiplié par $\frac{1}{3}$FH, & par conſéquent l'autre pyramide DGHE eſt égale au même plan ADC multiplié par $\frac{1}{3}$FH ou par $\frac{1}{3}$GD, à cauſe de GD=FH, & comme le priſme ABCDEF eſt égal au même plan multiplié par le tiers des droites CD, BE, AF; il s'enſuit que le priſme tronqué compoſé de ces trois ſolides eſt égal au produit de la baſe ABC multipliée par le tiers des

droites CD, BE, AF, plus le tiers de FH, plus le tiers de DG; mais $\frac{1}{3}AF+\frac{1}{3}FH=\frac{1}{3}AH$, & $\frac{1}{3}CD+\frac{1}{3}DG=\frac{1}{3}CG$, donc le prisme tronqué est égal à sa base ABC multipliée par $\frac{1}{3}BE+\frac{1}{3}AH+\frac{1}{3}CG$.

Si les trois longueurs AH, BE, CG sont inégales (*Fig.* 332.), je fais les mêmes opérations que dans le cas précédent, & le prisme tronqué se trouve divisé en un prisme triangulaire ABCDEF, & deux pyramides DGHE, DHFE qui ont le sommet E commun, & qui sont par conséquent comme leurs bases inégales DGH, DHF; mais ces bases ou triangles étant entre les paralelles DG, FH, sont entr'eux comme leurs bases GD, FH; donc les deux pyramides sont entr'elles comme les droites GD, FH. Or, en prenant pour base de la pyramide DHFE le plan FED, la hauteur de cette pyramide est FH, donc la pyramide DGHE doit être égale à un autre pyramide qui auroit pour base le même plan FED, & pour hauteur la ligne GD, car cette nouvelle pyramide seroit à la pyramide DGHE, comme GD, FH, à cause des bases égales. Ainsi la pyramide $DEFH=FED\times\frac{1}{3}FH=ABC\times\frac{1}{3}FH$, la pyramide $DGHE=ABC\times\frac{1}{3}DG$, & le prisme $ABCDEF=ABC\times\frac{1}{3}AF+\frac{1}{3}BE+\frac{1}{3}CD$; donc le prisme tronqué $ABCGHE=ABC\times\frac{1}{3}AF+\frac{1}{3}BE+\frac{1}{3}CD+\frac{1}{3}FH+\frac{1}{3}DG$; mais $\frac{1}{3}AF+\frac{1}{3}FH=\frac{1}{3}AH$, & $\frac{1}{3}CD+\frac{1}{3}DG=\frac{1}{3}CG$; donc le prisme $ABCGHE=ABC\times\frac{1}{3}AH+\frac{1}{3}BE+\frac{1}{3}CG$.

Enfin, si le prisme triangulaire est tronqué par ses deux extrémités (*Fig.* 333.), je coupe ses trois arêtes par un plan ABC, qui leur soit perpendiculaire, ce qui coupe ce prisme en deux autres ABCDHE, ABCMON, qui ne sont tronqués chacun que par l'une de ses extrêmités. Ainsi le premier ABCDHE est égal au plan ABC multiplié par le tiers de ses trois longueurs AH, EB, CD, & le second ABCMON est égal au plan ABC multiplié par le tiers de ses trois longueurs AO, BN, CM; donc les deux ensemble, c'est-à-dire, le prisme total est égal au plan ABC multiplié par le tiers des trois longueurs OH, NE, MD.

508. *Remarque.* Quoique ce que je viens de dire ne regarde que le prisme triangulaire tronqué, on peut cependant s'en servir pour mesurer un prisme quelconque tronqué. Soit, par exemple, le prisme pentagonal tronqué ABCDEFGHIL (*Fig.* 328.); de l'un des angles E de la base, je mene aux autres angles des

droites EB, EC, ce qui diviſe cette baſe en trois triangles. Je conçois que ſur ces droites EB, EC, ſoient élevés des plans perpendiculaires à la baſe qui diviſeront le priſme tronqué en trois priſmes triangulaires tronqués. Ainſi meſurant chacun de ces priſmes en particulier, leur ſomme me donnera le priſme total. Au reſte, on trouve beaucoup plus aiſément la valeur des priſmes tronqués par le moyen du centre de gravité de la baſe, ainſi qu'on verra dans le troiſiéme Livre. Et je n'ai parlé ici du priſme triangulaire tronqué, que pour faciliter le Problême ſuivant, qui concerne la meſure des Révêtemens ou Murailles des Places de Guerre.

509. PROBLEME. *Meſurer le Révêtement d'une Place de Guerre.*

Tout le monde ſçait que les Murailles des Places de guerre ont un talud, c'eſt-à-dire, qu'elles ont plus d'épaiſſeur en bas qu'en haut, & c'eſt préciſément en cela que conſiſte la difficulté de les meſurer. Or, entre toutes les méthodes qu'on a donné pour y parvenir, voici celle qui me paroît la plus ſimple & la plus commode, quoiqu'elle ſoit la moins uſitée, peut-être parce qu'elle eſt la moins connue, ou parce qu'on a de la peine à ſe détacher des routes ordinaires : on en jugera aiſément, ſi on veut bien, la comparer aux pratiques qu'on ſuit communément.

Soit donc le ſolide de la Figure 335 qui repréſente un demi-Baſtion & une partie de la Courtine. Je meſure d'abord la longueur & la largeur de la muraille au ſommet, & comme ces deux dimenſions forment les trapezoïdes ABCD, DCEF, FEHI qui ont tous la hauteur commune RT, j'ajoute enſemble leurs longueurs moyennes SV, VX, XZ, & multipliant la ſomme par la hauteur RT, le produit eſt la valeur des trois trapezoïdes; je multiplie ce produit par la hauteur A*a* de la muraille, & j'ai la valeur d'une muraille ſans talud, dont la baſe eſt compoſée de trois trapezoïdes *a*MN*b*, *b*NO*c*, O*cd*L égaux chacun à chacun aux trois trapezoïdes ſupérieurs.

Maintenant pour meſurer le talud, je conſidére qu'il eſt compoſé de trois priſmes triangulaires tronqués M*e*BDN*f*, DN*fg*OF, *g*OFI*h*L; c'eſt pourquoi, je coupe l'un d'eux par un plan *rsi* perpendiculaire ſur ſes trois longueurs, & comme cette coupe eſt la même dans les trois priſmes, j'ajoute enſemble leurs trois longueurs BDFI, MNOL, *efgh*, & prenant le tiers de cette ſomme, je le multiplie par le plan *rsi*, ce qui me donne tout d'un coup

coup le talud, lequel étant ajouté à la muraille ſans talud, me donne le révêtement entier.

Il eſt aiſé de voir qu'on pourroit faire les mêmes opérations quand même le flanc ſeroit rond & qu'il ſeroit couvert d'une orillon.

510. PROPOSITION CXIV. *La ſphere eſt égale au deux tiers d'un cylindre de même hauteur, & qui auroit pour baſe le cercle du diamétre de la ſphere, c'eſt-à-dire le plus grand cercle de la ſphere.*

Soit le quart de cercle ABC (*Fig.* 337.) qui en tournant au tour de ſon rayon fixe BC décrit une demi-ſphere ABL; je décris le quarré ACBM du rayon BM; & je coupe ce quarré par la diagonale MC qui forme le triangle rectangle iſoſcele MBC; je conçois que le rayon BC ſoit coupé en une infinité de petites parties égales entr'elles, & que des points de diviſion O, T, &c. ſoient menées des perpendiculaires OQ, TX ſur ce rayon, & qui ſe terminent ſur AM, ces droites ſeront élémens du quarré AMBC, leurs parties OR, TZ, &c. qui ſe terminent ſur la circonférence du quart de cercle, ſeront les élémens de ce quart de cercle, & les parties OS, TV, &c. qui ſe terminent ſur la diagonale MC, ſeront les élémens du triangle rectangle iſoſcele MBC; de façon que chaque élément OS, &c. de ce triangle ſera égal à ſa diſtance OC, &c. du centre C; car les triangles ſemblables MBC, SOC donnent MB. BC :: SO. OC; mais MB = BC; donc SO = OC. & il eſt aiſé de voir que chaque élément OQ, TX, &c. du quarré ACBM ſera égal au rayon BC : cela poſé.

Si l'on conçoit que le quarré ACBM, le quart de cercle ABC & le triangle MBC tournent au tour du rayon immobile BC; les élémens du quarré ACBM décriront des cercles tous égaux qui formeront un cylindre AMHL; les élémens du quart de cercle décriront des cercles qui formeront une demi-ſphere ABL, & dont le plus grand ſera celui que le rayon AC décrira, lequel à cauſe de cela, ſe nomme le grand cercle de la ſphere, & les élémens du triangle MBC décriront les cercles qui formeront un cône MCH. Or, ces cercles étant entr'eux comme les quarrés de leurs rayons : mettons pour un moment les quarrés au lieu des cercles, & à cauſe de la propriété du cercle nous aurons $\overline{OR}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2$; (*N.* 284.) mais BC = OQ & OC = OS; donc $\overline{OR}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OS}^2$; par la même raiſon, nous aurons $\overline{TZ}^2 = \overline{TX}^2 - \overline{TV}^2$, & ainſi des autres; c'eſt-à-dire que les quarrés des élémens

du quart de cercle ſont égaux aux quartés des élémens du quarré ACBM, moins les quarrés des élémens du triangle MBC; donc en remettant les cercles au lieu des quarrés, nous aurons les cercles décrits par les élémens du quart de cercle ou la demi-ſphere ABL, eſt égale aux cercles décrits par les élémens du quarré ACBM, ou au cylindre AMHL moins les cercles décrits par les élémens du triangle MBC ou moins le cône MBC; mais le cône MBC étant une pyramide d'une infinité de côtés, eſt le tiers du cylindre AMHL qui eſt un priſme d'une infinité de côtés de même hauteur & de même baſe que le cône, donc la demi-ſphere ABC eſt égale aux deux tiers du cylindre AMHL.

On prouvera de la même façon que la demi-ſphere AKL eſt égale aux deux tiers du cylyndre APEL, & que par conſéquent la ſphere entiere eſt égale aux deux tiers du cylindre MPEH.

511. COROLLAIRE. Ier. *Tous les cercles élémentaires qui compoſent une ſphere* ABCD, (Fig. 336.) *ſont au plus grand cercle* AC *multiplié par le nombre qui exprime leur multitude, c'eſt-à-dire par le diamètre* BD, *comme* 2 *eſt à* 3. Le grand cercle AC multiplié par BD forme le cylindre MNOP; or, la ſphere ou la ſomme de ces cercles élémentaires, eſt les deux tiers du cylindre; donc la ſomme des cercles élémentaires eſt au plus grand AC multiplié par BD, comme 2 eſt à 3.

512. COROLLAIRE II. *Un ſegment* ABC *de ſphere* (Fig. 338.) *eſt égal à la portion* MPSR *du cylindre circonſcrit, laquelle a même hauteur que le ſegment, moins le cône tronqué* MHLP *de même hauteur; la zone* QEFY *qui a pour baſe le grand cercle, eſt égale à la portion cylindrique* QTVY *de même hauteur, moins le cône* XOZ *de même hauteur; la zone* EACF *eſt égale à la portion cylindrique* TRSV *de même hauteur, moins le cône tronqué* HXZL *de même hauteur; la zone* aEFb *eſt égale à la portion cylindrique* mTVn *de même hauteur, moins le cône* XZO, *moins encore le cône* cOd; *le ſecteur* ABCO *eſt égal au ſegment* ABC, *plus le cône* AOC. Tout cela eſt évident par la Propoſition précédente; mais on verra dans la ſuite que toutes ces portions de ſphere peuvent ſe meſurer par le moyen de leurs ſurfaces, beaucoup plus aiſément.

513. *DEFINITION.* Si l'on coupe un cylindre ABCD (*Fig.* 339.) par un plan incliné MXN qui coupe ſa baſe en dedans, la portion cylindrique MXNA coupé par ce plan ſe nomme *Onglet cylindrique*, ſi le plan coupant MXN paſſe par le centre O de la baſe, l'onglet MXNA ſe nommera *Onglet cylindrique de la premiere eſpece.* Si

le plan coupant PZQ ou RTS ne paſſe pas par le centre O de la baſe, l'onglet PZQA ou RTSA ſe nommera *Onglet cylindrique de la ſeconde eſpece.*

PROPOSITION CXV. *Tout onglet cylindrique de la premiere eſpece, eſt compoſé d'une infinité de triangles rectangles qui ſont entr'eux comme les cercles élémentaires d'une ſphere.*

Soit l'onglet de la premiere eſpece ABCD, (*Fig.* 340.) ſa baſe ADC eſt donc un demi cercle puiſque le plan incliné ABC paſſe par le centre O de la baſe du cylindre dans lequel cet onglet eſt coupé, & que par conſéquent la commune ſection AC du plan incliné & de la baſe eſt un diamétre : cela poſé.

Concevons que dans la baſe ou demi cercle ADC ſoient menées des lignes droites LP, RS, OD &c. infiniment proches & perpendiculaires ſur le diamétre AC, & que ſur chacune de ces lignes ſoient élevés des plans LQP, RTS, &c. perpendiculaires ſur la baſe ADC de l'onglet, & qui coupent l'onglet. 1°. Tous ces plans coupans, ſeront des triangles rectangles LPQ, RST, &c. la commune ſection de chacun d'eux & de la baſe ADC ſera une ligne droite, (*N.* 477.) de même que la commune ſection de chacun d'eux & du plan ABC; & comme la ſurface d'un onglet ABCD, ou du cylindre dans lequel il eſt coupé, n'eſt autre choſe qu'une ſuite de lignes droites élevées perpendiculairement ſur tous les points de la circonférence ADC de la baſe, il eſt clair que chaque plan coupant tel que LPQ perpendiculaire ſur la baſe ADC, ne peut couper la ſurface de l'onglet que par une de ſes perpendiculaires PQ, & que par conſéquent ce plan LPQ doit être un triangle rectangle à cauſe que QPétant perpendiculaire ſur la baſe ADC doit l'être auſſi ſur LP qui eſt dans cette baſe & qui paſſe par le point P, (*N.* 463.) 2°. Les plans coupans ou triangles rectangles LPQ, RST &c. qui couperont l'onglet ſeront ſemblables, car à cauſe qu'ils ſont paralelles entr'eux, les droites QL, TR &c. dans leſquelles ils couperont le plan incliné ABC, ſeront paralelles, (*N.* 482.) de même que les droites LP, RS, dans leſquelles ces mêmes triangles coupent la baſe ADC de l'onglet; ainſi les angles aigus QLP, TRS, &c. de ces triangles, ayant leurs côtés paralelles chacun à chacun ſeront égaux, (*N.* 479.) & par conſéquent tous les triangles rectangles QLP, TRS, &c. ſeront ſemblables entr'eux. Or, les triangles ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; donc tous les triangles rectangles QLP, TRP, &c. qui couperont l'onglet

ſont entr'eux comme les quarrés de leurs baſes LP, RS, &c. ou comme les cercles que ces baſes décriroient en tournant au tour du diamétre AC : or, tous ces cercles compoſeroient une ſphere ; donc, &c.

514. COROLLAIRE Ier. *De tous les triangles rectangles qui compoſent un onglet, le plus grand eſt le triangle* ODB *qui paſſe par le centre* O *de la baſe du cylindre, & les autres ſont égaux deux à deux.*

Les triangles qui compoſent l'onglet ſont entr'eux comme les quarrés de leurs baſes LP, RS, &c. or, ces baſes étant les élémens du demi cercle ADC; la plus grande eſt le rayon OD; donc le plus grand triangle eſt le triangle ODB; de même les baſes RS, MN également éloignées de la baſe OD, ſont égales à cauſe qu'elles ſont les moitiés des cordes SV, NE également éloignées du centre O; donc les triangles RST, MNZ ſont égaux; & ainſi des autres.

515. COROLLAIRE II. *Tout onglet de la premiere eſpece eſt égal au produit de ſon plus grand triangle* OBD *multiplié par les deux tiers du diametre* AC *de ſa baſe.* Tous les triangles qui compoſent un onglet de la premiere eſpece ſont entr'eux comme les cercles que décriroient leurs baſes en tournant au tour du diametre AC de la baſe ; or, ces cercles compoſeroient une ſphere, & ſeroient par conſéquent égaux au plus grand muliplié par les deux tiers du diametre AC; donc tous les triangles qui compoſent l'onglet ſont égaux au plus grand triangle ABD multiplié par les deux tiers du diametre AC.

516. COROLLAIRE III. *La hauteur d'un onglet de la premiere eſpece, eſt égale à la hauteur du plus grand triangle.* Tous les triangles LPQ, RST, ODB, &c. qui compoſent l'onglet étant ſemblables, leurs baſes LP, RS, OD, &c. ſont entre-elles comme leurs hauteurs PQ, ST, DB, &c. or, la baſe OD du plus grand triangle ODB eſt la plus grande ; donc ſa hauteur DB eſt la plus grande auſſi, & par conſéquent elle eſt la hauteur de l'onglet.

517. COROLLAIRE IV. *Les onglets de la premiere eſpece qui ont leurs hauteurs égales & les baſes auſſi, ſont égaux ; ceux qui ont les hauteurs inégales & les baſes égales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs ; ceux qui ont les baſes inégales & les hauteurs égales, ſont entr'eux comme leurs baſes, & ceux qui ont les baſes réciproques aux hauteurs, ſont égaux.* Soient les deux onglets ABCD, AECF (*Fig.* 341.) dont les baſes ſont égales & les hauteurs auſſi ; les grands

triangles BDO, EOF de ces deux onglets ſont égaux ; car la baſe DO eſt égale à la baſe OF, l'une & l'autre étant rayons de cercles égaux & la hauteur DB égale à la hauteur FE, par la ſuppoſition ; or, l'un & l'autre onglet eſt le produit de ſon grand triangle multiplié par les deux tiers du diametre AC qui eſt ici le même ; donc les deux onglets ſont égaux.

Maintenant, ſuppoſons que les deux onglets ABCD, *abcd* (*Fig.* 342.) ayent leurs baſes ADC, *adc* égales, & leurs hauteurs DB, *db* inégales, leurs grands triangles ODB, *odb* ayant leurs baſes OD, *od* égales, à cauſe qu'elles ſont rayons de cercles égaux, ſont entr'eux comme leurs hauteurs BD, *bd* ; ainſi les onglets étant entr'eux comme leurs grands triangles multipliés par les deux tiers des diamétres AC, *ac* de leurs baſes qui ſont égaux, ſeront entr'eux comme les droites ou les hauteurs BD, *bd*.

De même ſi les baſes ADC, *adc* ſont inégales, & les hauteurs BD, *bd* égales, les grands triangles OBD, *obd* ſont entr'eux comme leurs baſes OD, *od* ; ainſi les onglets étant entr'eux comme les grands triangles multipliés par les deux tiers des diametres AC, *ac* ſont entr'eux comme $OD \times \frac{1}{3} AC$, $od \times \frac{1}{3} ac$; mais les deux produits $OD \times AC$, $od \times ac$ ſont les moitiés des quarrés des diametres AC, *ac*, leſquelles moitiés ſont entr'elles comme les quarrés de ces diametres, de même que les tiers de ces moités, & les baſes ADC, *adc* ſont auſſi entr'elles comme les quarrés de ces diametres ; donc les onglets ſont entr'eux comme leur baſes ADC, *adc*.

Enfin ſi les baſes ADC, *adc* ſont réciproques aux hauteurs DB, *db*, les onglets ſeront entr'eux comme $\frac{1}{2} OD \times DB \times \frac{2}{3} AC$, $\frac{1}{2} od \times db \times \frac{2}{3} ac$, ou comme $OD \times DB \times AC$, $od \times db \times ac$; or, les baſes ADC, *adc* ſont entr'elles comme $OD \times AC$, $od \times ac$ qui ſont les moitiés de quarrés de leur diametres ; donc les onglets ſeront entre eux comme $ADC \times DB$, $adc \times db$; mais par la ſuppoſition, nous avons ADC. *adc* :: *db*. DB ; donc en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous aurons $ADC \times CB = adc \times db$, & par conſéquent les deux onglets égaux.

518. COROLLAIRE V. *Tout onglet cylindrique de la premiere eſpece, eſt à la ſphere que ſa baſe décriroit en tournant au tour de ſon diametre* AC, (Fig. 340.) *comme ſa hauteur eſt à la circonférence du grand cercle.* Si la hauteur DB du plus grand triangle OBD eſt égale à la circonférence du grand cercle de la ſphere, ce triangle eſt égal au cercle ; (*N.* 378.) ainſi l'onglet étant le produit de

ce triangle par les deux tiers du diametre, & la ſphere étant le produit du grand cercle égal au grand triangle, par les deux tiers du même diametre, l'onglet & la ſphere ſeront égaux; mais ſi la hauteur DB du plus grand triangle OBD eſt plus ou moins grande que la circonférence du grand cercle de la ſphere; ce grand triangle ne differera du triangle égal au grand cercle que par la hauteur, & par conſéquent il ſera au grand cercle comme la hauteur DB à la circonférence; ainſi l'onglet & la ſphere ſeront entr'eux comme la hauteur DB multipliée par les deux tiers de AC, eſt à la circonférence du grand cercle multipliée auſſi par les deux tiers de AC, & par conſéquent, comme la hauteur DB à la circonférence du grand cercle.

519. COROLLAIRE VI. *Si un onglet de la premiere eſpece eſt coupé par un plan perpendiculaire* RST (Fig. 342.) *perpendiculaire ſur la baſe* APC *& ſur le plan incliné* ABC, *les parties coupées* ATSR, RSTBC, *ſeront entr'elles comme les ſegments correſpondants de la ſphere* VAS, VCS. C'eſt une ſuite évidente du Corollaire précédent.

520. PROBLEME. *Un onglet cylindrique de la premiere eſpece étant coupé par un ou pluſieurs plans perpendiculaires ſur la baſe; mais qui ne ſont pas perpendiculaires ſur le plan incliné, trouver la ſolidité des différentes portions de cet onglet.*

Soit l'onglet ABCD (*Fig.* 342.) coupé par le plan HMNR perpendiculaire ſur la baſe ADC & paralelle au diametre AC; ce plan coupe ſur la baſe ADC une baſe ANRC, & je dis que la portion d'onglet ANHMRC coupée par ce plan, eſt à l'onglet comme le ſolide décrit par la bande ANRC en tournant autour du diametre AC, eſt à la ſphere décrite par la baſe ADC, en tournant au tour de AC; ce que je prouve ainſi.

Le plan HMNR étant perpendiculaire ſur la baſe ADC, eſt paralelle à toutes les hauteurs des triangles qui compoſent l'onglet à cauſe que ces hauteurs ſont auſſi perpendiculaires ſur la même baſe ADC; d'où il ſuit que ce plan coupe les triangles par des lignes paralelles à leurs hauteurs, & que les triangles qui compoſent la portion ANHMRC ſont ſemblables entr'eux & aux triangles qui compoſent l'onglet, & ſont par conſéquent comme les quarrés de leur baſes OZ *ab*, &c. c'eſt-à-dire comme les quarrés des élémens de la bande ANCR de la baſe ADC, ou comme les cercles que ces élémens décrivent en tournant au tour de AC; ainſi puiſque chaque triangle OXZ de la portion

ANHMRC, eſt à chaque triangle OBD de l'onglet, comme le cercle décrit par la baſe OZ, eſt au cercle décrit par la baſe OD, il eſt facile de conclure que tous les triangles qui compoſent la portion ANHMRC, c'eſt-à-dire la portion ANHMRC, eſt à tous les triangles qui compoſent l'onglet ou à l'onglet, comme tous les cercles des Elémens de la bande ANRC ou le ſolide que cette bande décrit en tournant autour de AC, eſt à tous les cercles des Elémens de la baſe ADR de l'onglet ou à la Sphére.

On prouvera de la même façon que la portion ANHMRC (*Fig.* 343.) coupée par un plan HNRM perpendiculaire à la baſe ADC de l'onglet, mais non paralelle au diamétre AC eſt à l'onglet comme le ſolide décrit par la portion ANRC de la baſe qui tourneroit autour de AC eſt à la Sphére que la baſe ADC décriroit.

La portion ANHMRC étant connue, il eſt clair que ſi on la retranche de l'onglet, le reſte ſera l'autre portion NHBMRD.

521. COROLLAIRE. *Toute portion* ANHMRC *d'un onglet de la premiere eſpéce* ABCD (*Fig.* 342, 343.) *coupée par un plan* HNRM *perpendiculaire ſur la baſe* ADC *eſt au ſolide, décrit par la portion* NRC *qui tourneroit autour du diamétre* AC, *comme la hauteur* B *de l'onglet eſt à la circonférence du grand cercle de la Sphére.*

L'onglet eſt à la Sphére que ſa baſe décrit comme la hauteur B de ſon grand triangle eſt à la circonférence du grand cercle la Sphére (*N.* 518.), mais l'onglet eſt à la Sphére, comme la portion ANHMRC eſt au ſolide décrit par la portion ANRC de baſe ADC qui tourneroit autour du diamétre AC (*N.* 520.), par conſéquent la portion ANHMRC eſt à ce ſolide comme hauteur AB de l'onglet eſt à la circonférence du grand cercle.

522. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un onglet de la ſeconde eſpéce.*

Soit l'onglet ABCD (*Fig.* 344.), dont la baſe ADC eſt moindre qu'un demi-cercle; il eſt certain que cet ongler ſera encore compoſé d'une infinité de triangles rectangles ſemblables paralleles entr'eux, & perpendiculaires ſur la baſe ADC, & ſur le plan diviſé ABC, ainſi ces triangles ſeront encore entr'eux comme les quarrés de leurs baſes ou comme les cercles que ces baſes décriroient, & par conſéquent l'onglet eſt au ſolide que ſa baſe ADC décrit en tournant autour de AC, comme la hauteur BD de ſon grand triangle eſt à la circonférence du grand cercle du

ſolide, décrit par la baſe DO de ce triangle; mais comme nous ne connoiſſons pas le ſolide que décrit la baſe ADC en tournant autour de AC, nous ne pouvons pas non plus connoître l'onglet, à moins que nous n'ayions recours à la méthode des Centres de Gravité, dont nous parlerons dans la ſuite. Or, en attendant, voici comme on peut faire:

Je prolonge le plan incliné ABC juſqu'à ce qu'il coupe l'axe LM du cylindre en un point R. Je coupe le cylindre & le plan incliné par un plan XSVT qui paſſe par le point R, & qui ſoit paralelle à la baſe du cylindre, & ce plan eſt un cercle qui eſt coupé au centre par le plan incliné SBT, ainſi l'onglet SBTX eſt un onglet de la premiere eſpéce, & par conſéquent retranchant de cet onglet la partie SXTCDA, le reſte ſera l'onglet de la ſeconde eſpéce ABCD.

Je coupe l'onglet SBTX par un plan ACZQ perpendiculaire ſur la baſe SXT, & la portion ACZQST eſt au ſolide que ſa baſe ZQST décriroit en tournant autour de ST, comme l'onglet SBTX eſt à la Sphére que ſa baſe décriroit (*N.* 520.); ainſi je puis connoître la partie ACZQST, & la retrancher de l'onglet SBTX, ce qui me donnera un reſte QXZCBA; retranchant donc de ce reſte la portion cylindrique QXZCAD qui eſt égale au produit de ſa baſe QXZ par ſa hauteur XD, le reſte ſera la ſolidité de l'onglet ABCD.

Soit l'onglet ABCD de la ſeconde eſpéce (*Fig.* 345.), dont la baſe ADC eſt plus grande qu'un demi-cercle. Par le point O où ſon plan incliné ABC coupe l'axe, je fais paſſer un plan GEHF paralelle à la baſe du cylindre, & par conſéquent j'ai un onglet EBFG de la premiere eſpéce que je puis aiſément connoître, & il faut ajouter à cet onglet la portion EGFCARDS; or, la partie RDSFGE de cette portion eſt facile à connoître, puiſqu'elle eſt le produit de ſa baſe RDS multipliée par ſa hauteur DG, il ne me reſte donc plus qu'à trouver l'autre partie REFSCA. Pour cela, je prolonge le plan incliné juſqu'à ce qu'il coupe le côté oppoſé du cylindre en N, ce qui me donne un onglet renverſé de la premiere eſpéce ENFH qui eſt égal à l'onglet EBFG, à cauſe que les baſes de ces onglets ſont égales, & que l'inclinaiſon de leurs plans eſt la même; je coupe l'onglet ENFH par un plan AVTC perpendiculaire ſur la baſe, & ſa portion AVTCFE peut ſe connoître aiſément (*N.* 520.); or, la portion cylindrique RACSFEVT étant le produit de ſa baſe RSCA

par

par ſa hauteur RE eſt connue ; retranchant donc de cette portion la partie AVTCFE, le reſte ſera la ſolidité de l'autre partie AREFSC, ainſi la ſolidité de l'onglet ABCD ſera connue.

523. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un cylindre* ABPDH (Fig. 346.) *tronqué par un plan incliné* DPHB *qui paſſe par l'extrêmité* B *de la baſe.*

Je multiplie la baſe AB du cylindre tronqué par la moitié de ſa hauteur, & le produit eſt la ſolidité demandée.

Car ſi par le point O où le plan incliné coupe l'axe RS, je fais paſſer un plan MDNH paralelle à la baſe du cylindre, ce plan ſera un cercle coupé en deux parties égales par le plan incliné qui paſſe par ſon centre ; ainſi nous aurons deux onglets de la premiere eſpéce PDHM, DBHN, qui ſeront égaux entr'eux, à cauſe qu'ils ont les baſes égales, & que les plans inclinés faiſant des angles égaux ſur les baſes, forment des hauteurs égales MP, NB ; c'eſt pourquoi ajoutant à chacun de ces onglets la portion cylindrique ABDHM, nous aurons le cylindre AMNB égal au cylindre tronqué ABDPH ; or, le cylindre AMNP a pour hauteur la droite AM qui eſt la moitié de la droite AP. Donc, &c.

524. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un cylindre* ABCD (Fig. 347.) *tronqué par un plan incliné* DC *qui coupe les deux côtés* DA, CB *du cylindre.*

Je prens la moitié MX de la différence DX de la plus grande hauteur DA du cylindre tronqué à la moindre hauteur CB ; j'ajoute cette différence à la moindre hauteur CB ou AX, ce qui donne la droite AM, & multipliant la baſe AB du cylindre par AM, le produit eſt la ſolidité demandée.

Car ſi par le point O où le plan incliné coupe l'axe, je fais paſſer le cercle MN qui ſera coupé en deux également par ce plan, j'aurai deux onglets de la premiere eſpéce égaux PDHM, PCHN, & ajoutant à chacun d'eux la partie commune ABCHMP, j'aurai le cylindre ABNM égal au cylindre tronqué ABCD ; or, le cylindre ABNM a pour hauteur la droite AM. Donc, &c.

525. PROPOSITION CXVI. *Si un cercle* ABCD (Fig. 348.) *tourne autour d'une tangente* HP *paralelle à l'un de ſes diamétres* BD, *le ſolide qu'il aura décrit après ſa révolution entiere, ſera égal à un cylindre qui a pour baſe le cercle* ABCD, *& pour hauteur une ligne droite égale à ſa circonférence.*

Suppoſons que le cercle ABCD (*Fig.* 349.) ſoit égal au cercle ABCD de la Figure 348 ; je conçois que le diamétre DB

paralelle à la tangente PH ſoit coupé en une infinité de parties égales, & que de tous les points ſoient menées des perpendiculaires à la tangente PH, leſquelles aillent aboutir à la circonférence en A, S, &c. Quand le cercle tournera autour de PH, le diamétre AC perpendiculaire à la tangente PH décrira un cercle ; mais les autres Elemens SV, &c. du cercle ABCD décriront des couronnes ; car ST décrira un cercle, & ſa partie VT en décrira un autre : ainſi ce que SV décrira ſera le cercle décrit par ST, moins le cercle décrit par VT, c'eſt-à-dire une couronne, & ainſi des autres Elemens ; enfin les extrémités D, B du diamétre DB paralelle à la tangente PH décriront des circonférences, & il eſt clair que le ſolide décrit par le cercle ABCD autour de cette tangente, ne ſera pas différent de la ſomme du cercle décrit par le diamétre, des couronnes décrites par les autres Elémens, & des circonférences décrites par les points D, B.

Maintenant ſur l'extrémité A du diamétre AC, j'éleve une droite AR perpendiculaire ſur le plan du cercle ABCD, & faiſant cette droite égale à la circonférence que le diamétre AC décriroit en tournant autour de PH ; je mene la droite RC, ce qui me donne un triangle CAR égal au cercle que le diamétre AC décriroit autour de PH (*N.* 378.) ; de même ſi ſur l'extrêmité de la droite ST, j'éleve une droite SZ perpendiculaire au cercle, & par conſéquent paralelle à AR, & que je faſſe SZ égale à la circonférence que ST décriroit autour de PH, le triangle TSZ que je formerai en menant ZT ſera égal au cercle décrit par ST autour de PH, & menant dans ce triangle la droite VX paralelle à la droite SZ, le triangle TVX ſemblable au triangle TSZ ſera égal au cercle que TV décriroit autour de PH ; car nous aurons ST. SZ :: TV. VX ; mais SZ eſt la circonférence du rayon ST ; donc VX ſera la circonférence du rayon TV, & par conſéquent TVX ſera égal au cercle du rayon TV ; ainſi le trapezoïde SZXV ſera égal à la couronne que décriroit SV en tournant autour de PH. Faiſant donc la même choſe à l'égard des autres Elémens du cercle, ainſi que la Figure le fait voir, & élevant ſur les points D, B, des perpendiculaires égales aux circonférences que ces points décriroient autour de PH, le triangle ARC joint aux trapezoïdes faits ſur les Elémens du cercle, & aux deux perpendiculaires élevées ſur les points D, B, ſera égal au cercle que décriroit AC, joint aux couronnes que les Elémens décri-

roient, & aux circonférences que décriroient les points D, B.

Or, le ſolide compoſé par le triangle ARC, & par les trapezoïdes faits ſur les Elémens du cercle joints aux droites ſur les points D, B forment un cylindre tronqué qui a pour baſe le cercle ABCD, & pour hauteur la droite AR égale à la circonférence que décriroit le diamétre AC autour de PH; car les triangles CAR, TSZ, TVX, &c. étant tous rectangles & ſemblables, les angles qu'ils forment ſur PH ſont égaux, & par conſéquent leurs hypothenuſes étant paralelles entr'elles forment un plan incliné, & leurs hauteurs AR, SZ, VX, &c. forment la ſurface d'un cylindre tronqué par ce plan; donc le ſolide compris ſous toutes ces lignes, eſt un cylindre tronqué par un plan incliné qui paſſe par l'extrémité de ſa baſe. Suppoſant donc que ce cylindre ſoit repréſenté par la Figure 350, ſa ſolidité eſt égale à ſa baſe multipliée par la moitié AM de ſa hauteur AR (*N.* 523.); mais AR étant la circonférence du diamétre, ſa moitié AM eſt la circonférence du rayon CO moitié du diamétre, c'eſt-à-dire la circonférence de la baſe; donc le cylindre tronqué ACR, & par conſéquent le ſolide que décriroit la baſe AC autour de PH, eſt égal à la baſe AC multipliée par ſa circonférence.

526. Lorſqu'un cercle ABCD (*Fig.* 348.) tourne autour d'une tangente PH, le ſolide qu'il décrit, ſe nomme *Anneau fermé*, parce que le vuide BHCSD qui ſe trouve au milieu n'eſt point percé à jour. La partie de ce ſolide décrite par le demi-cercle BCD ſe nomme *Partie intérieure*, & la partie décrite par le demi-cercle BAD, ſe nomme *Partie extérieure*, le cercle ABCD ſe nomme *Cercle générateur* de l'anneau.

527. COROLLAIRE. Ier. *La partie extérieure d'un anneau eſt égale à la moitié du cylindre qui a pour baſe le cercle générateur de l'anneau, & pour hauteur la circonférence, plus une Sphére qui auroit pour grand cercle le cercle générateur.*

Le cercle AC (*Fig.* 350.) en tournant autour de PH produit un anneau fermé égal au cylindre tronqué ACR; or, tous les points du diamétre DB du demi-cercle DCB étant également éloignés de PH, produiſent en tournant autour de PH des circonférences toutes égales à la circonférence du rayon CO, & par conſéquent à la droite AM ou DS; élevant donc ſur tous les points de ce diamétre des droites égales à DS, & perpendiculaires ſur le cercle AC, elles formeront un rectangle DSNB, & la ſolide DSNBC ſera égal à la partie intérieure de l'anneau;

donc le ſolide DABRNS ſera égal à la partie extérieure de l'anneau. Mais ce ſolide eſt compoſé de la partie DABNMS égale à la moitié du cylindre AT, qui a pour baſe le cercle générateur, & pour hauteur la circonférence de cette baſe, & d'un onglet SMNR qui a pour baſe le demi-cercle SMN égal au demi-cercle de la baſe AC, & pour hauteur la droite MR, lequel onglet eſt égal à la Sphére que décriroit ſa baſe en tournant autour de ſon diamétre (*N.* 518.). Donc, &c.

528. COROLLAIRE II. *La partie intérieure d'un anneau fermé eſt égale à la moitié du cylindre qui auroit pour baſe le cercle générateur, & pour hauteur la circonférence, moins une Sphére dont le grand cercle ſeroit le cercle générateur.*

La partie intérieure eſt égale au ſolide DSNBC (*Fig.* 350.), c'eſt-à-dire au demi-cylindre DCBNTS, moins l'onglet renverſé SNTC égal à l'onglet SMNR. Donc, &c.

529. PROBLEME. *Trouver le vuide* BRCSD (Fig. 348.) *que laiſſe le cercle* ABCD *en tournant autour de ſa tangente* PH.

Des extrémités B, D du diamétre BD, je mene les droites BO, DX perpendiculaires ſur la tangente PH, ce qui forme un rectangle BOXD, lequel en tournant autour de PH, produit un cylindre BRSD, tandis que le demi-cercle inſcrit dans ce rectangle produit la partie intérieure de l'anneau; retranchant donc du cylindre BRSD la partie intérieure de l'anneau, le reſte ſera le vuide demandé BRCSD.

Nota. Que la moitié de ce vuide, c'eſt-à-dire la partie DCS, eſt un cône curviligne dont le côté DC eſt un quart de circonférence de cercle, & que par conſéquent on peut meſurer ces ſortes de cônes, de même que les pyramides curvilignes dont les arêtes ſont des quarts de circonférences qui tournent leur convexité vers l'axe, ainſi qu'on va voir dans le Problême ſuivant.

530. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'une pyramide* ABCDE (Fig. 351.) *dont les arêtes* AE, BE, &c. *ſont des quarts de circonférence de cercle qui tournent leur convexité vers l'axe* QE.

Je circonſcris à la baſe un cercle DABC, ce que je puis toujours faire, parce qu'il faut que les lignes AO, DO, OB, OC menées des angles de la baſe au centre O ſoient toujours égales entr'elles, & à la hauteur OE, ſi l'on veut que les arêtes AE, BE ſoient des quarts de circonférence, & je conçois un cône qui auroit pour baſe le cercle ABCD, & dont le côté ſeroit l'arête AE, & ce cône m'eſt connu par le Problême précédent. Je

conçois auſſi que le cône & la pyramide ſoient coupés par une infinité de plans paralelles à leurs baſes, leſquels plans feront dans le cône des cercles, tels que le cercle LFGH, & dans la pyramide des plans LFGH ſemblables à la baſe, à cauſe que leurs côtés & leurs diagonales ſont paralelles à celles de la baſe, ce qui fait que ces plans LFGH, &c. ſont ſemblablement inſcrits dans les cercles LFGH, &c. ainſi chaque plan LFGH de la pyramide ſera au cercle correſpondant LFGH du cône, comme la baſe ABCD de la pyramide eſt au cercle ABCD, qui eſt la baſe du cône, & par conſéquent la pyramide eſt au cône, comme la baſe ABCD eſt au cercle ABCD. Je dis donc par Régle de trois: comme le cercle ABCD eſt à la baſe ABCD, ainſi le cône eſt à un quatriéme terme qui ſera la pyramide cherchée.

Definition. Si un cercle ABCD (*Fig.* 352.) tourne autour d'une droite PH perpendiculaire ſur le diamétre AC prolongé en O, & paralelle au diamétre BD, le ſolide décrit après la circonvolution, ſe nomme *Anneau ouvert*, parce qu'il laiſſe autour de PH un creux BCDSQR percé à jour. La partie de ce ſolide décrite par le demi-cercle BCD, ſe nomme *Partie intérieure de l'anneau*, & la partie décrite par le demi-cercle BAD, ſe nomme *Partie exterieure*; le cercle ABCD eſt le cercle générateur.

531. Proposition CXVII. *La ſolidité d'un anneau ouvert, eſt égale à un cylindre qui auroit pour baſe le cercle générateur* ABCD, *& pour hauteur une ligne égale à la circonference que décrit ſon centre* X *autour de* PH.

Je conçois que le cercle ſoit diviſé en ſes Elémens paralelles au diamétre, leſquels ſoient prolongés juſqu'à PH. (*Fig.* 353.) Quand le cercle tournera, la ligne AO décrira un cercle autour de PH, & ſa partie OC en décrira un autre, & par conſéquent le diamétre AC décrira une couronne, c'eſt-à-dire le cercle du rayon AO, moins le cercle du rayon CO. Par la même raiſon les autres Elémens tels que SV décriront auſſi des couronnes, & les extrémités D, B décriront des circonférences, leſquelles jointes aux couronnes des Elemens, formeront enſemble l'anneau.

Je conçois que ſur l'extrémité A ſoit élevée une droite AR perpendiculaire ſur le plan du cercle ABCD, & égale à la circonférence que ce point décriroit autour de PH, & menant la droite RO, le triangle ARO eſt égal au cercle que la droite AO dé-

criroit autour de PH ; de même élevant ſur le point C une droite CL perpendiculaire ſur le cercle, & égale à la circonférence que décriroit la droite CO, le triangle COL eſt égal au cercle que décriroit CO, & comme ce triangle eſt ſemblable au triangle AOR, ſon hypothenuſe LO eſt une portion de l'hypothenuſe OR ; ainſi le trapezoïde RACL eſt égal à la couronne que décriroit AC ; & faiſant la même choſe ſur les autres Élémens SV, &c. on aura autant de trapezoïdes SZKV, &c. égaux aux couronnes de l'anneau chacun à chacune ; enfin, élevant ſur les extrémités D, B du diamétre des droites égales aux circonférences qu'elles décriroient ; ces deux droites, jointes aux trapezoïdes, ſeront égales à l'anneau.

Or, toutes les hauteurs de ces trapezoïdes forment la ſurface d'un cylindre, & les hypothenuſes RO, ZT, &c. forment un plan incliné qui coupe cette ſurface, & qui ne paſſe pas l'extrémité de la baſe ABCD ; donc toutes ces lignes renferment un cylindre tronqué par un plan incliné qui coupe ſes côtés oppoſés. Suppoſant donc que ce cylindre ſoit repreſenté par la Figure 354, ſa ſolidité eſt égale à ſa baſe AC multipliée par la hauteur AM égale à la moindre hauteur AF, plus la moitié MF de la différence RF des hauteurs RA, LC (*N.* 524.) ; mais AM=XQ, & à cauſe des triangles ſemblables RAO, QXO ; nous avons OA. AR :: OX. XQ ; donc AR étant égal à la circonférence de AX, nous aurons XQ égal à la circonférence de OX, & par conſéquent l'anneau eſt égal au cylindre qui a pour baſe le cercle générateur, & pour hauteur une droite égale à la circonférence que ſon centre X décriroit autour de PH.

532. COROLLAIRE Ier. *La partie intérieure de l'anneau eſt égale à la moitié du cylindre* AMNEC (Fig. 354.) *égal à l'anneau, moins un onglet* SNLE, *égal à la Sphére dont le grand cercle ſeroit le cercle générateur.*

Tandis que le demi-cercle BCD tourneroit autour de PH, tous les points du diamétre DB étant également éloignés de PH décriroient des circonférences égales à la droite XQ. Elevant donc ſur tous ces points des perpendiculaires égales à XQ ; nous aurons le paralellogramme DSNB, & par conſéquent le ſolide DCBNLS eſt égal à la partie intérieure de l'anneau ; or, il manque à ce ſolide pour être égal au demi-cylindre DCBNES un onglet NSLE qui a pour baſe le demi-cercle NES égal au demi-cercle générateur, & pour hauteur la droite EL égale à la

moitié de la différence RF des hauteurs RA, LC; mais RA étant égal à la circonférence du rayon AO, & CL égal à la circonférence du rayon CO; la différence RF doit être égale à la circonférence que décriroit le diamétre AC qui eſt la différence des rayons AO, CO; donc la moitié MF eſt égal à la circonférence de la moitié CX du diamétre, c'eſt-à-dire à la circonférence ABCD, & par conſéquent l'onglet SNEL, eſt égal à la Sphére qui auroit pour grand cercle, le cercle générateur (*N.* 518.). Donc, &c.

533. Corollaire II. *La partie extérieure de l'anneau ouvert eſt égale à la moitié du cylindre* AMNEC (Fig. 354.) *qui auroit pour baſe le cercle générateur* AC, *plus un onglet* SMNR *égal à la Sphére dont le grand cercle ſeroit le cercle générateur.* Par le Corollaire précedent la partie intérieure de l'anneau eſt égale à la partie cylindrique DBCNSL; donc puiſque l'anneau entier eſt égal au cylindre tronqué ACLR, la partie extérieure doit être égale au reſte DABNSR; mais ce reſte eſt compoſé du demi-cylindre DABNSM, plus de l'onglet SMNR égal à l'onglet SENL. Donc, &c.

534. Probleme. *Trouver la ſolidité du vuide* BCDSQR (Fig. 352.) *d'un anneau ouvert.*

Des extrémités D, B, du diamétre DB paralelle à la droite HP, je mene les droites BF, DZ perpendiculaires ſur HP, ce qui forme un rectangle BFZD. Or, tandis que le cercle ABCD tourne autour de HP, ce rectangle décrit un cylindre BRSD, & le demi-cercle BCD décrit la partie intérieure de l'anneau; retranchant donc du cylindre BRSD la partie intérieure, le reſte eſt la ſolidité du vuide BCDSQR.

Nota. Que la moitié de ce vuide, c'eſt-à-dire CDSQ forme un cône tronqué paralellement à ſa baſe par le cercle que CO décrit, & dont le côté eſt un quart de circonférence de cercle CD qui tourne ſa convexité vers l'axe OP; & que par conſéquent on peut meſurer ces ſortes de cônes, de même que les pyramides tronquées par un plan paralelle à leurs baſes, & qui ont pour arêtes des quarts de circonférences de cercle, comme on va voir dans le Problême ſuivant.

535. Probleme. *Trouver la ſolidité d'une pyramide* ABCDEFHG (Fig. 355.) *tronquée par un plan* EFHG *paralelle à ſa baſe* ABCD, *& dont les arêtes* AF, BH, &c. *ſont des quarts de circonférence de cercles convexes du côté de l'axe.*

Je circonſcris un cercle autour de la baſe ABCD ; & je conçois un cône tronqué qui ait pour côté le quart de circonférence de cercle AF ; je conçois encore que le cône & la pyramide ſoient coupés par une infinité de plans paralelles à leurs baſes qui ſeront des cercles dans le cône, & des plans ſemblables à la baſe ABCD dans la pyramide. Ainſi tous les cercles du cône ſeront entr'eux comme tous les plans de la pyramide, ou comme le cercle de la baſe du cône eſt au plan de la baſe de la pyramide : or, le cône m'eſt connu, ainſi qu'on vient de voir dans la Remarque du Corollaire précédent. Donc je n'ai qu'à dire : la baſe du cône eſt au cône, comme la baſe de la pyramide eſt à un quatriéme terme qui ſera la pyramide.

536. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un ſolide à calotte, c'eſt-à-dire d'une pyramide dont les arêtes ſont des quarts de circonférences concaves du côté de l'axe.*

Soit le ſolide ABCDE (*Fig.* 356.) qui a pour baſe le paralellogramme ABCD, & dont les arêtes AE, BE, &c. ſont des quarts de circonférences dont la concavité eſt en dedans du ſolide; je mene les diagonales AC, BD de la baſe, & du point O où elles ſe coupent, j'éleve perpendiculairement ſur la baſe la droite OE, qui ſera l'axe du ſolide, car les droites AO, OE, étant perpendiculaires entr'elles, doivent embraſſer un quart de circonférence AE, & par la même raiſon les droites DO, OE doivent embraſſer un quart de circonférence, & ainſi des autres. Je conçois que le ſolide ſoit coupé par une infinité de plans paralelles à la baſe, tels que FGHL ; tous ces plans ſeront ſemblables entr'eux & à la baſe, à cauſe que leurs côtés ſont paralelles chacun à chacun, & leurs diagonales auſſi, ce qui rend les angles égaux chacun à chacun (*N.* 479.), & par conſéquent les triangles formés par les diagonales, ſont ſemblables. Ainſi ces plans ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs diagonales FH, AC ou de leurs demi-diagonales FR, AO, mais ces demi-diagonales ſont les Elémens du quart de cercle AEO, donc tous les plans ſont entr'eux comme les quarrés, ou comme les cercles décrits par les Elémens FR, &c. qui tourneroient autour du rayon fixe EO; or, ces cercles compoſeroient une demi-ſphére, & pour avoir la valeur de leur ſomme, il faut multiplier le plus grand par les deux tiers de la hauteur OE; donc pour avoir le ſolide ABCD, il faut multiplier le plus grand plan ABCD par les deux tiers de la hauteur OE.

Nota.

Nota. Ce que nous disons ici doit s'entendre de toutes les calottes qui auroient pour base des polygones réguliers ; de même que ce que nous avons dit ci-dessus (*N.* 530, 535.), touchant les pyramides qui ont pour arêtes des quarts de circonférence convexes vers l'axe, doit s'entendre de toutes les pyramides de cette nature qui auroient des polygones réguliers pour base.

537. *Definition.* Les Solides qui sont composés d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, sont dits *Solides semblables.*

538. Proposition CXVIII. *Les paralellepipedes, ou les prismes, ou les cylindres semblables, sont entr'eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou des côtés homologues de leurs bases, ou des circuits de ces bases, ou enfin de quelques lignes semblablement posées.*

Soient les deux paralellepipedes semblables AE, *ae* (*Fig.* 357.); le premier est égal au produit de sa base ABCD par sa hauteur AH, & le second est égal au produit de sa base *abcd* par sa hauteur *ah*; donc les deux solides sont entr'eux comme ces produits : mais les bases ABCD, *abcd* étant semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues AB, *ab*; donc le premier solide est au second, comme le quarré $\overline{AB}^2$ multiplié par la hauteur AH, est au quarré $\overline{ab}^2$, multiplié par la hauteur *ah*; mais à cause que les faces HABN, *habn* sont semblables, les hauteurs AH, *ah* sont entr'elles comme les côtés AB, *ab*; donc le premier solide est au second, comme le quarré $\overline{AB}^2$ multiplié par AB est au quarré $\overline{ab}^2$ multiplié par *ab*, c'est-à-dire comme le cube $\overline{AB}^3$ du côté AB est au cube $\overline{ab}^3$ du côté homologue *ab*.

Mais les cubes $\overline{AB}^3$, $\overline{ab}^3$ des côtés homologues AB, *ab* sont entr'eux comme les cubes des côtés homologues AH, *ah*; donc les solides semblables AE, *ae* sont aussi comme les cubes de leur hauteur, & on prouvera de la même façon qu'ils sont comme les cubes des circuits de leurs bases, &c. à cause que les circuits des bases semblables sont entr'eux comme leurs côtés homologues; & la démonstration est la même pour les prismes semblables, & pour les cylindres semblables, puisque les bases des cylindres sont des polygones d'une infinité de côtés.

539. Corollaire Ier. *Les pyramides semblables & les cônes semblables, sont entr'eux comme les cubes de leurs hauteurs ou de leur côtés*

homologues. Les pyramides ſont les tiers des priſmes de même hauteur; donc ſi les pyramides ſont ſemblables, leurs priſmes le ſont auſſi, puiſque les hauteurs doivent être entr'elles comme les côtés homologues des baſes; mais les priſmes ſemblables ſont comme les cubes de leurs côtés homologues; donc les pyramides ſemblables qui ſont le tiers des priſmes, ſont auſſi comme les cubes de leurs côtés homologues; & la même choſe doit ſe dire des cônes ſemblables qui ne ſont autre choſe que des pyramides; donc les baſes ont une infinité de côtés.

540. COROLLAIRE II. *Toutes les ſpheres ſont ſemblables, & par conſéquent entr'elles comme les cubes de leurs diametres.* La ſphere ABCD (*Fig.* 358.) eſt égale à ſon grand cercle AC multiplié par les deux tiers du diametre BD, (*N.* 510.) & la ſphere *abcd* eſt égale au produit de ſon grand cercle *ac* par les deux tiers du diametre *bd*; mais les deux cercles AC, *ac* étant ſemblables, ſont comme les quarrés de leurs diametres, ou des diamétres BD, *bd*; donc la ſphere ABCD eſt à la ſphere *abcd* comme $\overline{AC}^2 \times \frac{2}{3}$ AC $\overline{ac}^2 \times \frac{2}{3}$ *ac* ou comme $\overline{AC}^3$ eſt à $\overline{ac}^3$.

541. COROLLAIRE III. *Les onglets ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou des diametres de leurs baſes* &c.

Si les onglets ſemblables ABCE, *abce* (*Fig.* 359.) ſont de la premiere eſpece, le premier eſt égal à ſon grand triangle BED multiplié par $\frac{2}{3}$ AC, (*N.* 515.) & le ſecond eſt égal à ſon grand triangle *bed* multiplié par $\frac{2}{3}$ *ac*; mais par la ſuppoſition, les deux grands triangles étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés $\overline{BD}^2$, $\overline{bd}^2$ de leurs baſes BD, *bd*; donc les onglets ſont entr'eux comme $\overline{BD}^2 \times \frac{2}{3}$ AC, $\overline{bd}^2 \times \frac{2}{3}$ *ac*, ou comme $\overline{BD}^2 \times$ AC, $\overline{bd}^2 \times$ *ac*; or, BD, *bd* :: AC. *ac*; donc les deux onglets ſont entr'eux comme $\overline{BD}^2 \times$ BD, $\overline{bd}^2 \times$ *bd*, ou comme $\overline{BD}^3$. $\overline{bd}^3$.

Si les onglets ſemblables ABCE, *abce* (*Fig.* 360.) ſont de la ſeconde eſpece, en ſorte que leurs baſes ABC, *abc* ſoient moindres chacune qu'un demi cercle, on pourra toujours les regarder comme faiſant partie d'autres onglets ſemblables de la premiere eſpece NMRE, *nmre* qui auront pour baſes des demi-cercles, & alors les deux onglets ABCE, *abce*, ſeront entr'eux comme les onglets NMRE, *nmre*; car les baſes ou ſegments ſemblables ABC, *abc*, ſeront entr'eux comme les baſes ou demi-cercles

NMR, *nmr*, & les hauteurs BE, *be* comme les hauteurs ME, *me*; donc les onglets ABCE, *abce* ſeront entr'eux comme $\overline{ME}^3$. $\overline{me}^3$ ou comme $\overline{BE}^3$. $\overline{be}^3$.

Et par un ſemblable raiſonnement on prouvera que les onglets ſemblables de la ſeconde eſpece qui ont pour baſes des ſegmens plus grands que le demi-cercle, ſont entr'eux comme les cubes de leurs hauteurs.

542. COROLLAIRE. *En général tous les ſolides ſemblables de quelque façon qu'ils ſoient compoſés, ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.* Car ſi l'on prend dans ces ſolides des points ſemblablement poſés, & que de tous les angles de leurs faces on mene des droites à ces points, on décompoſera les ſolides en autant de pyramides ſemblables entr'elles, qui ſeront comme les cubes de leurs côtés homologues, & par conſéquent les ſolides compoſés de ces pyramides ſeront dans la même raiſon.

Du changement des Solides.

543. De tout ce que nous venons de dire, il eſt aiſé de voir qu'on peut changer une pyramide en un paralellepipede ou un priſme qui auroit même baſe, & pour hauteur le tiers de la hauteur de la pyramide, qu'un priſme ou paralellepipede ſe peut changer en pyramide; qu'une ſphere peut être transformée en un cylindre ou en un onglet, &c. c'eſt pourquoi je me contenterai de donner ici quelques regles générales, pour changer un ſolide en un autre, ou pour faire un ſolide égal à pluſieurs autres; ou enfin pour rendre un ſolide ſemblable à un autre.

544. PROBLEME. *Un paralellepipede* AB (Fig. 361.) *étant donné, trouver un autre paralellepipede qui lui ſoit égal, & qui ait pour hauteur une droite donnée* ae.

Puiſque le paralellepipede que je cherche doit être égal au paralellepide AB, ſa hauteur *ae* doit être à la hauteur AE réciproquement comme la baſe ACHD, eſt à la baſe *achd* que je cherche; (*N.* 497.) je donne à la baſe que je cherche la dimenſion *ad* égale à la dimenſion AD de la baſe ADCH, & alors la baſe ABCD ſera à la baſe *abcd* cherchée comme l'autre dimenſion AC, eſt à la dimenſion cherchée *ac*; c'eſt pourquoi je dirai la hauteur *ae* eſt à la hauteur AE, réciproquement comme AC eſt à un quatriéme terme, lequel étant trouvé par les régles ordinaires, ſera

la droite *ac*. Faiſant donc un paralellepipede ſur la baſe *dach* avec la hauteur *ae*, le paralellepipede *ab* ſera égal au paralellepipede AB.

545. PROBLEME. *Un paralellepipe* AB (*Fig.* 361.) *étant donné, trouver un autre paralellepipede qui lui ſoit égal & qui ait une baſe donnée.*

Si la baſe donnée *achd* a une dimenſion *da* égale à la dimenſion DA de la baſe DACH, alors les deux baſes ſont entr'elles comme les dimenſions *ac*, AC; c'eſt pourquoi je dis la baſe *dach* eſt à la baſe DACH, c'eſt-à-dire la dimenſion *ac* eſt à la dimenſion AC réciproquement, comme la hauteur AE, eſt à un quatriéme terme, lequel étant trouvé par les régles ordinaires, donne la hauteur *ae* que je dois donner au paralellepipede *ab*, qui ſera égal au paralellepipede AB.

Mais ſi la baſe donnée *dpqr* n'a pas une dimenſion commune avec la baſe DACH, je la change en un autre *dach* qui ſoit égale à *dpqr*, & qui ait la dimenſion *da* égale à la dimenſion DA, en diſant *da* eſt à *dp*, réciproquement comme *dr* eſt à *dh*, après quoi j'acheve le reſte comme auparavant.

Nota. Que par le mot de dimenſion on doit toujours entendre une ligne perpendiculaire ſur l'autre dimenſion; car on ſçait bien que les dimenſions des plans ſont longueur & largeur, & que ces quantités doivent être perpendiculaires entr'elles.

546. PROBLEME. *Deux paralellepipedes* AC, ac (Fig. 362.) *étant donnés, trouver un paralellepipede qui leur ſoit égal.*

Je cherche à donner au paralellepipede *ac* une hauteur égale à la hauteur AM du paralellepipede AC, & pour cela je change d'abord ſa baſe *an* en un autre *pq* qui ait la dimenſion *dp* égale à la dimenſion DA, & le paralellepipede *ph* fait ſur la baſe *pq* avec la hauteur *am* eſt égal au paralellepipede *ac*. Maintenant, je dis; la hauteur AM que je veux donner au paralellepipede *ph*, eſt à la hauteur *am* qu'il a réciproquement, comme *pr* eſt à un quatriéme terme RF, & faiſant avec RF une baſe RT qui ait la dimenſion RN = *dp*, le paralellepipede RS fait ſur la baſe RT, & avec la hauteur RQ = AM ſera égal au paralellepipede *ph* ou *ac*, & par conſéquent le paralellepipede AS ſera égal aux deux paralellepipedes donnés.

547. COROLLAIRE Ier. On peut de la même façon faire un paralellepipede égal à pluſieurs autres, ou à pluſieurs cubes.

548. COROLLAIRE II. Pour faire un paralellepipede égal à la

ſomme d'un paralellepipede & d'un priſme, qui auroit, par exemple, pour baſe, un pentagone, je changerois la baſe du priſme en triangle, & le triangle en rectangle, & par conſéquent le paralellepipede qui auroit pour baſe ce rectangle, & pour hauteur la hauteur du priſme ſeroit égal au priſme; c'eſt pourquoi je n'aurois plus qu'à faire un ſeul paralellepipede égal aux deux, comme ci-deſſus.

On peut de la même façon faire un paralellepipede égal à deux ou pluſieurs pyramides, en changeant auparavant les pyramides en paralellepipedes.

De même encore, on peut faire une pyramide égale à pluſieurs pyramides, en changeant d'abord toutes les pyramides en paralellepipedes, enſuite faiſant un paralellepipede égal à la ſomme des paralellepipedes; puis en faiſant une pyramide égale au paralellepipede total, c'eſt-à-dire triplant la hauteur de ce paralellepipede; car une pyramide de même baſe qu'un paralellepipede & qui a le triple de la hauteur, eſt égale au paralellepipede.

Je laiſſe aux Commançans le plaiſir de trouver une infinité d'autres changemens qu'on peu faire ſur les ſolides, en ſuivant ce qui vient d'être dit.

549. PROBLEME. *Exprimer en lignes, la raiſon de pluſieurs ſolides.*

Je change les ſolides donnés en autant de paralellepipedes, dont les baſes ayent une dimenſion commune & qui ayent la même hauteur, & alors tous ces paralellepipedes ſeront entr'eux comme les dimenſions inégales de leurs baſes; c'eſt pourquoi ces dimenſions exprimeront le rapport des ſolides donnés.

550. PROBLEME. *Faire un cube qui ſoit à un autre cube dans telle raiſon que l'on voudra.*

Suppoſé qu'on demande un cube double du cube AB, (*Fig.* 363.) je prens une droite AH double du côté de AC, & enſuite deux moyennes proportionnelles entre AH & AC; ce qui ſe fait par le moyen du compas de proportion, comme on verra ſur la fin de ce Chapitre, & le cube fait ſur la premiere des deux moyennes proportionnelles eſt double du cube AB.

Car nommant *b* la premiere des deux moyennes, & *c* la ſeconde, nous avons :: AC. *b*. *c*. AH; donc $\overline{AC}^3$. b^3 :: AC. AH; (*Livre I^r. N.* 327.) mais AC eſt la moitié de AH par la conſ-

truction ; donc le cube $\overline{AC}^3$ ou AB eſt la moitié du cube fait ſur *b*.

Si l'on demande un cube qui ne ſoit que le tiers du cube AB ; je prens le tiers AD du côté AC, enſuite deux moyennes proportionnelles *m*, *n* entre AC & AD ; ce qui me donne :: AC. *m*. *n*. AD. donc $\overline{AC}^3$. m^3 :: AC. AD ; mais AC eſt triple de AD ; donc le cube $\overline{AC}^3$ ou AB eſt triple du cube fait ſur la premiere moyenne proportionnelle *m*.

Enfin ſi l'on demande un cube qui ſoit au cube AB comme une ligne donnée *a* eſt à une ligne donnée *b*, je cherche une quatriéme proportionnelle *x* aux deux lignes données *b*, *a* & au côté AC ; donne ce qui me *b*. *a* :: AC. *x* ou *x*. AC :: *a*. *b* ou AC. *x* :: *b*. *a*. Je cherche deux moyennes proportionnelles entre AC & *x*, & j'ai :: AC. *m*. *n*. *x* ; donc $\overline{AC}^3$. m^3 :: AC. *x* :: *b*. *a*, & par conſéquent le cube fait ſur AC, c'eſt-à-dire le cube AB eſt au cube fait ſur la premiere moyenne portionnelle *m*, comme *b* eſt à *a*.

551. PROBLEME. *Faire un cube égal à un paralellepide donné* AB (Fig. 364.).

Je change la baſe AC du paralellepipede en un quarré MP qui lui ſoit égal, & multipliant MP par la hauteur MQ égale à la hauteur AE du paralellepipede donné, j'ai le paralellepipede MN égal au paralellepipede AB. Je cherche deux moyennes proportionnelle *m*, *n* entre le côté MR du quarré MP & la hauteur MQ ou AE, & le cube fait ſur la premiere proportionnelle *m*, eſt égal au paralellepipede MN, & par conſéquent au paralellepipede AB.

Car par la conſtruction, nous avons :: MR. *m*. *n*. MQ ; donc $\overline{MR}^3$. m^3 :: MR. MQ, & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous avons $\overline{MR}^2 \times MQ = m^3 \times MR$, & diviſant tout par MR, nous aurons $\overline{MR}^3 \times MQ = m^3$; mais $\overline{MR}^2 \times MQ$ eſt le paralellepipede MN ou AB ; donc ce paralellepipede eſt égal au cube de m^3.

552. COROLLAIRE. On peut par ce moyen faire un cube égal à pluſieurs cubes ou à pluſieurs paralellepipedes, ou à pluſieurs pyramides ou à pluſieurs figures de différente eſpece, en réduiſant d'abord toutes les figures en un paralellepipede égal à toutes les figures, & enſuite un cube égal à ce paralellepipede.

553. PROBLEME. *Deux ſolides ſemblables* AC, ac (Fig. 365.) *étant donnés, trouver un autre ſolide* PX *qui ſoit égal à la ſomme des deux, & qui leur ſoit ſemblable.*

Je cherche un cube égal aux deux ſolides donnés, & je ſuppoſe que la ligne *s* ſoit le côté de ce cube; je cherche auſſi un cube égal à l'un des ſolides donnés; par exemple, au ſolide *ac*, & je ſuppoſe que le côté de ce cube ſoit la droite *r*; enſuite je dis le côté *r* eſt au côté *ad* du ſolide *ac*, comme la droite *s* eſt à un quatriéme terme que je nomme PQ, & qui ſera le côté homologue du ſolide que je cherche. Je dis de même le côté *r* eſt au côté *am*, comme le côté *s* à un quatriéme terme que je nomme PR, & qui ſera un autre côté homologue du ſolide que je cherche; enfin je dis le côté *r* eſt à la hauteur *ae*, comme le côté *s* eſt à un quatriéme terme que je nomme PT, & qui ſera la hauteur du ſolide cherché; faiſant donc avec les trois dimenſions PQ, PR, PT, le ſolide PX, ce ſolide ſera égal aux deux donnés, & leur ſera ſemblable.

Car, par la conſtruction, nous avons $r.\ ad :: s$ PQ, puis $r.\ am :: s$ PR; enfin $r.\ ae :: s.$ PT, & multipliant ces trois proportions les unes par les autres, c'eſt-à-dire les antécédents par les antécédents, les conſéquents par les conſéquents; nous aurons $r^3.\ ad \times am \times ae :: s^3.$ PQ × PR × PT; mais $r^3 = ad \times am \times ae$; donc $s^3 =$ PQ × PR × PT. Or, s^3 eſt le cube égal aux deux ſolides donnés; donc PQ × PR × PT ou le ſolide PX eſt auſſi égal à ces deux ſolides; & de plus, il leur eſt ſemblable puiſque ſes dimenſions PQ, PR, PT ſont ſemblables aux dimenſions du petit ſolide *ac*.

Nota. Je laiſſe grand nombre d'autres Problêmes ſur cette matiere, qui peuvent ſe reſoudre aiſément en ſuivant les principes que je viens d'établir.

Des Surfaces des Solides.

554. Dans les ſolides qui ont une ou deux baſes, tels que ſont les pyramides, les cônes, les demi-ſphéres, les paralellepipedes, les priſmes, les cylindres, &c. on entend par le mot de *Surface*, la valeur des plans montans ou des côtés courbes qui montent ſans y comprendre les baſes, & quand on veut que les baſes ſoient compriſes on ſe ſert du mot de *Surface totale*.

555. PROPOSITION CXIX. *La ſurface d'un paralellepipede droit,*

d'un priſme droit ou d'un cylindre droit eſt égale au circuit de ſa baſe multiplié par la hauteur du ſolide.

Soit le paralellepipede AB (*Fig.* 361.) ; ſa ſurface n'eſt autre choſe que la ſomme des quatre rectangles montans compris entre ſes deux baſes ; or, ces rectangles ſont chacun le produit de ſa baſe par ſa hauteur, & la hauteur eſt la même dans chacun d'eux ; donc ces quatre rectangles ſont le produit de leurs quatre baſes AC, CH, HD, DA par la hauteur AE, c'eſt-à-dire le produit du circuit ou contour ACHD par la hauteur AE.

On démontreta la même choſe pour les priſmes droits, & pour les cylindres droits, car les baſes des cylindres étant des polygones d'une infinité de côtés, leurs ſurfaces, lorſqu'ils ſont droits, ne ſont autre choſe qu'une infinité de rectangles qui ont tous pour hauteur la hauteur du cylindre.

556. Corollaire Ier. Pour meſurer la ſurface d'un paralellepipede incliné AC (*Fig.* 366.), il faut néceſſairement meſurer à part les plans montans, car quoiqu'il puiſſe arriver que les deux faces AEFD, & ſa paralelle BHCO ſoient encore des rectangles ; cependant la face ABHE, & ſa paralelle DOCF ſeront toujours des paralellogrammes, dont les côtés ſeront inclinés ; de façon que la face ABHE ne ſera pas le produit de ſa baſe AC par la longueur AE, au lieu que la face AEFD ſera égale à ſa baſe AD multipliée par la longueur AE.

La même choſe doit ſe dire de tous les priſmes inclinés.

557. Corollaire II. La même difficulté ſubſiſte pour les cylindres inclinés ; il ſemble cependant qu'on puiſſe aiſément les meſurer en cette façon : ſoit le cylindre incliné ABCD (*Fig.* 367.), je le coupe par un plan EB perpendiculaire entre les côtés AD, BC, & qui paſſe par l'extrémité B de la baſe inférieure AB ; je conçois que le cylindre ſoit prolongé du côté de D, & je le coupe par un autre plan FC paralelle au plan EB, ce qui me donne un cylindre droit EBCF égal au cylindre incliné ABDC, car la partie cylindrique ABE étant égale à la partie cylindrique DCF, ſi l'on ajoute de part & d'autre la partie commune EBCD, on aura ABCD = EBCF, multipliant donc la circonférence de la baſe EB du cylindre droit EBCF par le côté BC, le produit ſera la ſurface du cylindre droit EBCF, & par conſéquent du cylindre incliné ABCD ; mais la queſtion conſiſte à trouver le circuit de la baſe EB, car cette baſe n'eſt plus un cercle comme la baſe AB, mais un ellipſe, comme nous ferons voir dans la ſuite.

ſuite. C'eſt pourquoi le plus court eſt de meſurer avec un fil le contour de la baſe EB.

558. PROPOSITION CXIX. *La ſurface de toute pyramide droite & dont la baſe eſt un polygone régulier, eſt égale au contour de ſa baſe multipliée par la moitié d'une droite menée du ſommet* E *perpendiculairement ſur le côté ou baſe de l'une des faces.*

Soit la pyramide quarrée & droite ABCD (*Fig.* 368.); ſa ſurface eſt compoſée de quatre triangles ſemblables & égaux, & par conſéquent elle eſt égale à quatre fois le triangle AEB; or, ce triangle eſt égal à ſa baſe AB multipliée par la moitié de la hauteur FE; donc la ſurface de la pyramide eſt égale à quatre fois la baſe AB ou au circuit ABCD, multiplié par la moitié de AE.

569. *REMARQUE.* Si on coupoit la pyramide par un plan MNOQ paralelle à la baſe, & qui coupât les quatre arêtes chacune en deux également, le contour MNOQ ſeroit égal à la moitié du contour ABCD de la baſe; car les triangles ſemblables EAB, EMN, donnent EA. EM :: AB. MN; mais par la conſtruction nous avons $EM = \frac{1}{2}EA$, donc $MN = \frac{1}{2}AB$, & ainſi des autres faces. Or, comme le produit du contour ABCD par la moitié de EF eſt la même choſe que le produit de la moitié du contour ABCD par la droite EF toute entiere; il s'enſuit que la ſurface de toute pyramide droite & réguliere, eſt égale au produit du contour moyen pris entre le ſommet & la baſe à égale diſtance, multiplié par la droite EF.

570. COROLLAIRE Ier. *La ſurface de tout cône droit* ABC (Fig. 369.) *eſt égale au produit de la circonférence* AB *de ſa baſe multipliée par la moitié du côté* CB, *ou à la circonférence moyenne* MN *multipliée par le côté* CB. Car tout cône régulier eſt une pyramide réguliere d'une infinité de côtés, & la droite menée du ſommet C ſur la baſe infiniment petite de l'un des triangles qui compoſent les faces n'eſt pas différente du côté CB. Donc, &c.

571. COROLLAIRE II. Pour meſurer les ſurfaces des pyramides droites qui ne ſont pas régulieres, & des pyramides inclinées dont les baſes ſont régulieres ou irrégulieres; il faut néceſſairement meſurer chaque face des triangles à part, à cauſe qu'ils n'ont pas tous la même hauteur. De-là vient qu'on n'a pas encore trouvé la maniere de meſurer la ſurface d'un cône incliné ABC (*Fig.* 370.). Quelques Auteurs donnent pour régle de multiplier la circonférence de la baſe AB par la moitié du côté CD moyen

entre le plus grand côté AC, & la moindre BC, ce qui n'eſt fondé ſur aucune preuve Géométrique, & ne peut faire tout au plus qu'une approximation.

572. PROPOSITION CXX. *La ſurface d'une pyramide droite & réguliere tronquée paralellement à ſa baſe eſt égale à la ſomme des circuits* ABCD, HGFE *de ſes baſes* (Fig. 371.) *multipliée par la moitié de la ligne droite* RS *perpendiculaire entre les deux côtés paralelles* AB, HG *de l'une de ſes faces* ABGH, *ou bien cette ſurface eſt égale au circuit* MNOQ *qui coupe les arêtes* AH, GB; &c. *chacune en deux également, multiplié par la droite* RS.

La pyramide étant droite & réguliere, ſa ſurface tronquée eſt compoſée d'autant de trapezoïdes égaux que la baſe a de côtés; or, le trapezoïde ABGH eſt égal à la ſomme de ſes deux côtés paralelles AB, HG multipliée par la moitié de ſa hauteur RS; ou à la droite MN qui coupe ſes deux côtés non-paralelles en deux également multipliée par la hauteur RS (*N.* 386.); donc la ſurface de la pyramide tronquée eſt égale à autant de fois l'un ou l'autre de ces produits que la baſe a de côtés, c'eſt-à-dire dans cette figure à quatre fois l'un ou l'autre produit; or, 4 fois les côtés AB, HG forment les deux circuits ABCD, HGFE, & quatre fois MN forment le circuit MNOQ. Donc, &c.

573. COROLLAIRE. *La ſurface d'un cône droit tronqué paralellement à ſa baſe eſt égale aux circonférences de ſes deux baſes* AB, DC (Fig. 372.), *multipliées par la moitié du côté* CB, *ou à la circonférence moyenne* EF *qui coupe les côtés* DA, CB *chacun en deux également multipliée par le côté* CB. Cela eſt évident à cauſe qu'un cône droit tronqué paralellement à ſa baſe eſt une pyramide droite, réguliere d'une infinité de côtés, & tronquée paralellement à ſa baſe.

574. COROLLAIRE II. La ſurface d'une pyramide droite irréguliére tronquée paralellement à ſa baſe, ne peut ſe meſurer qu'en prenant chaque face à part, & il faut dire la même choſe des pyramides inclinées tronquées, à cauſe que leurs faces ſont toutes différentes.

575. PROPOSITION CXXI. *Si l'on inſcrit dans un demi-cercle* ACDF *un polygone régulier* ABCDEF (Fig. 373.) *dont deux de ſes côtés* AB, EF *ſe terminent ſur les extrêmités* A, F *du diamétre* AF, *& que l'on faſſe tourner ce polygone autour du diamétre fixe* AF, *la ſurface que les côtés* AB, BC, CD, &c. *de ce polygone décriront, ſera*

égale à la circonférence qui auroit pour rayon l'apothême OR *multipliée par le diamétre* AF.

Il eſt viſible que les côtés AB, EF décriront des ſurfaces de cônes, que les côtés BC, DE qui ne ſont pas paralelles à l'axe, & qui ne le touchent point, décriront des ſurfaces de cônes tronqués paralellement à leurs baſes, & que s'il ſe trouve un côté CD paralelle au diamétre, ce côté décrira une ſurface de cylindre. Je mene de tous les angles des droites BH, CM, DT, EV perpendiculaires ſur le diamétre; & ſi je démontre que la ſurface de cône que décrit AB eſt égale à la droite AH compriſe entre le point A & la perpendiculaire BH, multipliée par la circonférence dont le rayon eſt l'apothême OR, que la ſurface tronquée que décrit BC eſt égale à la droite HM compriſe entre les deux perpendiculaires BH, CM, multipliée par la même circonférence, & ainſi de ſuite; j'aurai démontré auſſi que la ſomme de toutes les ſurfaces eſt égale à la ſomme des parties AH, HM, MT, &c. du diamétre AF, c'eſt-à-dire au diamétre AF multiplié par la circonférence dont le rayon ſeroit l'apothême OR, & que par conſéquent la ſurface totale décrite par les côtés du polygone eſt égale à la ſurface d'un cylindre qui auroit pour baſe le cercle; donc le rayon ſeroit OR, & pour hauteur le diamétre AF; pour en venir donc à la démonſtration.

La ſurface de cône décrite par le côté AB eſt égale à la circonférence de ſa baſe ou à la circonférence que la perpendiculaire BH décriroit autour du diamétre AF multipliée par la moitié du côté AB (*N.* 570.), ou bien en coupant AB en deux également en R, la ſurface du cône eſt égale à la circonférence que décriroit la droite RS perpendiculaire ſur AF multipliée par le côté AB; or, l'apothême OR étant perpendiculaire ſur AB, les triangles rectangles SOR, RAS ſont ſemblables, & à cauſe des paralelles RS, BH, les triangles rectangles RAS, BAH ſont auſſi ſemblables; donc le triangle SOR eſt ſemblable au triangle BAH, & par conſéquent BA. AH :: RO. RS, & au lieu des deux derniers termes RO, RS, mettant les circonférences dont ils ſeroient les rayons; leſquelles circonférences ſont entr'elles comme leurs rayons, & nommant ces circonférences (RO, (RS, nous aurons BA. AH :: (RO. (RS, & faiſant le produit des extrêmes, & celui des moyens, nous aurons BA × (RS = AH × (RO, c'eſt-à-dire la droite AH multipliée par la circonférence de l'apothême RO égale à la droite AB multipliée par la circon-

férence du rayon RS ou à la ſurface conique que décriroit AB.

Pour démontrer la même choſe à l'égard des ſurfaces de cône tronqué que décriroient les droites BC, DE, &c. qui ne ſont point paralelles au diamétre AF, & qui n'y aboutiſſent point. Je diviſe DE en deux également en P, & menant au centre la droite PO, cette droite eſt encore l'apothême du polygone; du point E, je mene EL paralelle au diamétre, & du point P la droite PX perpendiculaire ſur le même diamétre; le triangle rectangle OPX, eſt ſemblable au triangle *m*P*n*, lequel eſt ſemblable au triangle *n*PE, & celui-ci eſt ſemblable au triangle LED; donc les triangles OPX, LDE étant ſemblables, nous avons DE, LE ou TV :: OP. PX, & au lieu de OP, PX, mettant les circonférences dont elles ſeroient rayons, & que nous nommerons (OP, (PX, nous aurons DE. TV :: (OP. (PX, d'où l'on tire DE × (PX = TV × (OP, mais DE × (PX, eſt la ſurface de cône tronqué que décriroit DE, en tournant autour de AF (*N.* 573.); donc cette ſurface eſt égale à la partie TV du diamétre multipliée par la circonférence dont le rayon ſeroit égal à l'apothême OP ou OR, & ainſi des autres.

Quant à la ſurface que décriroit le côté CD paralelle au diamétre, il eſt clair qu'elle ſeroit égale à la droite CD ou MT multipliée par la circonférence dont le rayon ſeroit l'apothême OZ, ou OR. Donc, &c.

576. COROLLAIRE. Si l'on fait donc un cylindre *abmn*, dont la baſe *ab* ſoit le cercle qui auroit pour rayon l'apothême RO, & dont la hauteur *bm* ſoit égale au diamétre AF, la ſurface de ce cylindre ſera égale à la ſurface que décriroit le polygone en tournant autour de AF. De plus, chaque ſurface particuliere décrite par l'un des côtés tel que BC ſera égale à la ſurface de la portion du cylindre qui auroit pour hauteur la partie HM du diamétre correſpondante au côté BC, & ainſi des autres.

577. PROPOSITION CXXII. *La ſurface d'une Sphére* ABCD (Fig. 374.) *eſt égale à la ſurface du cylindre circonſcrit* EFGH.

La Sphére ABCD eſt décrite par la circonvolution du demi-cercle DAB autour du diamétre BD; or, ce demi-cercle pouvant être regardé comme un polygone d'une infinité de côtés, la ſurface de la Sphére ne différe point de la ſomme des ſurfaces que les côtés infiniment petits du polygone, décrivent en tournant autour de BD, & comme la ſomme de ces ſurfaces eſt égale à la circonférence qui auroit pour rayon l'apothême du polygone

multipliée par le diamétre BD (*N.* 575.), il s'enſuit que la ſurface de la Sphére eſt égale à ce produit; mais l'apothême d'un polygone d'une infinité de côtés, ne différe pas du rayon OA du demi-cercle; donc la ſurface de la Sphére eſt égale à la circonférence du rayon OA multipliée par le diamétre ED, & par conſéquent elle eſt égale à la ſurface du cylindre circonſcrit EFGH.

578. COROLLAIRE Ier. *La ſurface d'un ſegment* MBN *de Sphére eſt égale à la ſurface de la portion* TVGH *du cylindre circonſcrit, laquelle à la hauteur* TH *égale à la hauteur* XB *du ſegment.* Car les côtés infiniment petits du polygone compris entre le point B & la perpendiculaire MX décrivent des ſurfaces égales aux ſurfaces des portions cylindriques qui ont pour hauteurs les parties du diamétre correſpondantes à ces côtés (*N.* 575.); donc toutes ces ſurfaces ſont enſemble égales à la ſurface cylindrique qui a pour hauteur la partie BX du diamétre correſpondante à la ſomme des côtés.

579. COROLLAIRE II. *La ſurface d'une zone* AMNC *eſt égale à la ſurface* ACVT *de la portion cylindrique qui a pour hauteur la hauteur* OX *de la zone.* Ce qui ſe démontre de la même façon, & ainſi des autres parties de la ſurface de la Sphére.

580. COROLLAIRE IV. *La ſurface d'une Sphére eſt quadruple de ſon grand cercle* AC. La ſurface de la Sphére eſt égale à celle du cylindre circonſcrit EFGH, & celle-ci eſt égale à la circonférence EF ou AC du grand cercle multipliée par le diamétre. Or, le grand cercle AC eſt égal à ſa circonférence multipliée par la moitié du rayon ou le quart du diamétre (*N.* 378.); donc la ſurface de la Sphére eſt à ſon grand cercle, comme la circonférence du grand cercle multipliée par le diamétre, eſt à la même circonférence multipliée par le quart du diamétre, & par conſéquent comme le diamétre eſt à ſon quart ou comme 4 eſt à 1.

581. *REMARQUE.* Une Sphére peut être conſiderée comme étant compoſée d'une infinité de pyramides dont les baſes infiniment petites, ſont ſur la ſurface de la Sphére, & dont les ſommers ſont au centre de la Sphére, d'où il ſuit que toutes ces pyramides ayant la même hauteur, c'eſt-à-dire le rayon de la Sphére, leur ſomme ſera égale à la ſomme de leurs baſes ou à la ſurface de la Sphére multipliée par le tiers du rayon. Cela poſé, il eſt facile de meſurer telle partie que l'on voudra de la Sphére.

Par exemple, pour meſurer le ſecteur MBNO (*Fig.* 374.), je

multiplie la ſurface MBN qui eſt la baſe de toutes les pyramides que ce ſecteur contient par le tiers du rayon BO, & le produit eſt la ſolidité cherchée.

De même, pour meſurer le ſegment ſphérique MBN, je meſure le ſecteur, & j'en retranche le cône MON.

De même encore, pour meſurer la zone ſphérique AMNC, j'en retranche le cône MON, & le reſte eſt la ſomme des pyramides qui auroient leurs ſommets en O, & dont les baſes ſeroient ſur la ſurface de la zone; je multiplie donc la ſurface de la zone par le tiers du rayon, & j'ajoute au produit le cône MON, ce qui me donne la ſolidité de la zone, & ainſi des autres.

582. PROPOSITION CXXIII. *La ſurface d'un onglet* ABCE (Fig. 375.) *eſt à la ſurface de la Sphére que ſa baſe* ABC *décriroit en tournant autour du diamétre* AC, *comme la plus grande hauteur* EB *de l'onglet, eſt à la circonférence du grand cercle de la Sphére.*

Suppoſons que l'onglet ſoit égal à la ſphére, la plus grande hauteur EB ſera donc égale à la circonférence du grand cercle; (*N.* 518.) or, la ſurface de cet onglet eſt compoſée d'une infinité de droites élevées perpendiculairement ſur tous les points de la circonférence ABC de la baſe, & égales chacune à chacune aux circonférences que tous les points de ABC décriroient en tournant autour de AC, car partout où on voudra couper l'onglet par un plan HPL paralelle au grand triangle EBO, on aura HP. PL :: EB. BO; mais EB eſt la circonférence du rayon BO; donc HP ſera auſſi la circonférence du rayon PL, & ainſi des autres. Or, toutes les circonférences décrites par tous les points de la circonférence CBA qui tourneroient autour de CA, forment la ſurface de la Sphére; donc la ſurface de l'onglet eſt égale à celle de la Sphére.

Que ſi l'onglet eſt moindre ou plus grand que la Sphére, la plus grande hauteur EB ſera auſſi moindre ou plus grande que la circonférence du grand cercle, & par conſéquent HP ſera auſſi moindre ou plus grande que la circonférence du rayon PL, & ainſi des autres; d'où il ſuit que la ſurface de l'onglet ſera moindre ou plus grande que la ſurface de la Sphére, ſelon que EB ſera moindre ou plus grande que la circonférence du grand cercle, & que par conſéquent la ſurface de l'onglet ſera à celle de la Sphére, comme la hauteur EB eſt à la circonférence du grand cercle.

583. COROLLAIRE Ier. *Si l'on coupe un onglet de la premiere eſpece*

par un plan HPL *paralelle à ſon grand triangle, la ſurface de la portion* HPLC *coupée par ce plan eſt à la ſurface que ſa baſe* PCL *décriroit en tournant autour du diamétre, comme la hauteur* EB *de l'onglet eſt à la circonférence du grand cercle.* C'eſt une ſuite évidente de cette Propoſition.

584. COROLLAIRE II. *La ſurface d'un onglet de la premiere eſpece* ABCD *eſt égale à un rectangle qui auroit pour baſe le diamétre* AC, *& pour hauteur une droite égale à la plus grande hauteur* EB *de l'onglet.*

Si l'onglet eſt égal à la Sphére, ſa ſurface eſt auſſi égale à celle de la Sphére; or, la ſurface de la Sphére eſt égale à celle du cylindre circonſcrit, & celle-ci eſt égale à la circonférence du grand cercle multipliée par le diamétre CA; ſi l'on prend donc une ligne droite CT égale à la circonférence du grand cercle ou égale à la hauteur EB de l'onglet, le rectangle fait ſous CT, & le diametre AC ſera égal à la ſurface du cylindre ou de la Sphére ou de l'onglet.

Que ſi l'onglet eſt moindre ou plus grand que la Sphére, ſa ſurface ſera à celle de la Sphére ou au rectangle AT comme la hauteur EB eſt à la circonférence du grand cercle ou à la droite CT; prenant donc une ligne moindre ou plus grande que CT, & faiſant avec cette ligne & avec le diametre AC un rectangle AX, ce rectangle ſera égal à la ſurface de l'onglet, puiſque le rectangle AX ſera au rectangle AT, comme la hauteur BE eſt à la circonférence du grand cercle égale à AT.

585. COROLLAIRE III. La ſurface des onglets de la ſeconde eſpece ſe trouvera aiſément, en obſervant ce que nous avons dit touchant leur ſolidité.

Par exemple, pour trouver la ſurface de l'onglet ADCB de la ſeconde eſpece (*Fig.* 344.) qui fait partie de l'onglet SXTB de la premiere eſpéce. Je vois qu'il faut retrancher de la ſurface de l'onglet SXTB. 1°. La ſurface de l'eſpéce de priſme triangulaire QSACZT. 2°. La ſurface de la portion cylindrique QXZCAD; or, en ſuppoſant que l'onglet ſoit égal à la Sphére que ſa baſe décriroit, ſa ſurface ſera égale à la ſurface de cette Sphére, & la ſurface de l'eſpece de priſme QSACZT eſt égale à la ſurface des deux ſegmens ſphériques QSz, ZTy; enfin, la ſurface de la portion cylindrique QXZCAD eſt égale à la circonférence QXZ multipliée par la hauteur XD. Or, tout cela eſt facile à connoître; donc il eſt facile auſſi de connoître la ſurface de l'onglet DACB.

Que ſi l'onglet SXTB n'eſt pas égal à la Sphére, ſa ſurface ſera toujours à celle de la Sphére comme la hauteur BX à la circonférence du grand cercle, & la ſurface de l'eſpéce de priſme QSACTZ ſera à la ſurface de deux ſegmens ſphériques QSz, ZTy, auſſi comme la hauteur BX à la circonférence du grand cercle; ainſi la ſurface de l'onglet ADCB ſera facile à connoître.

Il eſt aiſé de connoître auſſi la ſurface de l'onglet ADCB (*Fig.* 345.) dont la baſe eſt plus grande qu'un demi-cercle, en obſervant ce qui a été dit touchant ſa ſolidité.

586. *Remarque.* C'eſt auſſi en faiſant attention à ce qui a été dit touchant la ſolidité des anneaux ouverts ou fermés, qu'on trouvera 1°. que la ſurface d'un anneau fermé (*Fig.* 348.) fait par la circonvolution d'un cercle ABCD qui tourne autour d'une tangente immobile HP eſt égale à la ſurface d'un cylindre AMTC (*Fig.* 350.) qui auroit pour baſe le cercle générateur de l'anneau, & pour hauteur DS la circonférence de ce cercle. 2°. Que la ſurface de la partie extérieure de l'anneau fermé eſt égale à la ſurface du demi-cylindre DABMNS (*Fig.* 350.), plus la ſurface de l'onglet SMNR égale à la ſurface de la Sphére qui auroit pour grand cercle le cercle générateur. 3°. Que la ſurface de la partie intérieure du même anneau eſt égale à la ſurface du demi-cylindre DCBNTS, moins la ſurface de l'onglet NTSC égal à l'onglet SMNR. 4°. Enfin, que la ſurface du vuide BRCSD (*Fig.* 348.) eſt la même que celle de la partie intérieure de l'anneau, & que par conſéquent la moitié de cette ſurface eſt égale à la ſurface du cône DCS qui a pour côté le quart de circonférence DC du cercle générateur.

On trouvera de même 1°. que la ſurface d'un anneau ouvert (*Fig.* 352.) fait par la circonvolution d'un cercle ABCD qui tourne autour d'une ligne extérieure immobile HP eſt égale à la ſurface d'un cylindre ACEM (*Fig.* 354.) qui a pour baſe le cercle générateur, & pour hauteur la droite XQ égale à la circonférence que le centre X du cercle générateur décrit autour de HP. 2°. Que la ſurface de la partie extérieure du même anneau eſt égale à la ſurface du demi-cylindre DABNS, plus la ſurface d'un onglet SMNR égal à une Sphére qui auroit pour grand cercle le cercle générateur. 3°. Que la ſurface de la partie intérieure eſt égale à la ſurface du demi-cylindre DCBNES, moins la ſurface de l'onglet NESL égal à l'onglet SMNR. 4°. Enfin, que la ſurface

face du vuide BCDSQR (*Fig.* 352.) eſt égale à la ſurface de la partie intérieure de l'anneau, & que par conſéquent la moitié de cette ſurface eſt égale à celle d'un cône tronqué CDSQ qui auroit pour arête le quart CD de la circonférence du cercle générateur.

587. PROBLEME. *Trouver la ſurface d'une pyramide* ABCDE (Fig. 351.) *dont les arêtes ſont des quarts de cercles convexes du côté de l'axe.*

Je circonſcris autour de la baſe une circonférence de cercle ABCD, & je conçois un cône qui ait ce cercle pour baſe, & pour côté l'arête AE; la ſurface de ce cône ne ſera autre choſe que la ſomme des circonférences que tous les points du quart de cercle AE, décriroient en tournant autour de l'axe EO, & la ſurface de la pyramide n'eſt auſſi autre choſe qu'une ſomme de circuits, tels que FFHL ſemblables au circuit de la baſe ABCD, & qui ſeroient inſcrits ſemblablement dans les circonférences correſpondantes, ainſi chaque circuit FGHL eſt à la circonférence correſpondante comme le circuit ABCD de la baſe de la pyramide eſt à la circonférence ABCD de la baſe du cône. Donc je dois dire: comme la circonférence ABCD de la baſe du cône, eſt au circuit ABCD de la baſe de la pyramide; ainſi la ſomme des circonférences qui compoſent la ſurface, c'eſt-à-dire la ſurface du cône eſt à la ſomme des circuits qui compoſent la ſurface de la pyramide ou à la ſurface de la pyramide. Or, la circonférence ABCD, & le circuit ABCD ſont connus, & la ſurface du cône eſt connue par la Remarque précédente; donc on connoîtra aiſément la ſurface de la pyramide.

588. *REMARQUE.* On connoîtra de la même façon la ſurface de la pyramide tronquée (*Fig.* 355.) dont les arêtes FA, QB, &c. ſont des quarts de cercle convexes vers l'axe.

Quant à la calotte (*Fig.* 356.), laquelle peut être regardée comme une pyramide dont les arêtes EA, EB ſont des quarts de cercles concaves vers l'axe, il eſt viſible qu'en faiſant tourner le quart de cercle EOA autour de EO, il décriroit une demi-Sphére, dans laquelle la calotte ſeroit inſcrite. Or, la ſurface de cette demi-Sphére ne ſeroit autre choſe que la ſomme des circonférences que tous les points de EA décriroient autour de EO, & la ſurface de la calotte ne ſeroit auſſi autre choſe qu'une ſomme de circuits, tels que LFGH ſemblables au circuit ABCD de la baſe, & ſemblablement inſcrits dans les circonférences correſ-

pondantes. Donc on dira comme la circonférence de la baſe de la demi-Sphére eſt au circuit ABCD de la baſe de la calotte; ainſi la ſurface de la demi-Sphére eſt à un quatriéme terme qui ſera la ſurface de la calotte.

De quelques uſages du Compas de Proportion néceſſaire pour l'intelligence de ce qui a été dit dans le cours de ce Livre.

589. Tout le monde ſçait que le Compas de proportion eſt compoſé de deux lames de cuivre ou d'argent qui rournent au tour d'une charniere qui eſt à leur extrêmité, & que du centre de cette charniere on a mené de part & d'autre des lignes ſur les deux lames qui ont différents noms. Je n'entreprens pas d'expliquer ici tous les uſages de ces différentes lignes; cela a été fait par M^r. Ozanam dans un petit Traité intitulé. *Uſage du Compas de proportion*, qui ſe vend à Paris chez Jombert Libraire. Ainſi je me contenterai de parler de la maniere de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, & de la façon d'inſcrire dans un cercle, un polygone qui n'excéde pas douze côtés.

La ligne *des parties égales* eſt ainſi nommée, parce qu'elle eſt diviſée en un certain nombre de petites parties toutes égales, & par conſéquent elle peut ſervir d'Echelle.

La ligne des ſolides a été formée de cette ſorte. On a fait 64 ſolides ſemblables, ou 64 cubes qui étoient entr'eux comme les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. &c. juſqu'à 64, & l'on a porté les côtés de ces cubes ſur la ligne des ſolides de part & d'autre, en commençant toujours depuis le centre de la charniere; de ſorte, par exemple, qu'en prenant la longueur depuis le centre de la charniere juſqu'au nombre 15, & la longueur depuis le charniere juſqu'au nombre marqué 20; ces deux longueurs expriment les côtés de deux ſolides ſemblables, ou de deux cubes qui ſeroient entr'eux comme 15 à 20.

La ligne des polygones a été formée ainſi. On a décrit un cercle dans lequel on a inſcrit les polygones réguliers depuis le triangle juſqu'au dodécagone, & l'on a porté les côtés de ces polygones ſur la ligne des polygones, à commencer toujours depuis le centre de la charniere; de façon que la longueur, priſe, par exemple depuis le centre juſqu'au nombre marqué 5, & la longueur priſe depuis le centre juſqu'au nombre marqué 7, expri-

ment les côtés du pentagone & de l'eptagone inſcrits dans le même cercle : cela poſé.

590. PROBLEME. *Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes droites données* a, b (Fig. 376.).

Je prens avec le compas ordinaire la grandeut de la ligne *a*, & je la porte ſur l'une des lignes des parties égales, mettant l'une des pointes ſur le centre de la charniere, & laiſſant tomber l'autre ſur cette ligne, pour ſçavoir combien la ligne *a* contient de parties égales. Je fais la même choſe à l'égard de la ligne *b*; & trouvant, par exmple que la ligne *a* contient 30 parties égales & que la ligne *b* en contient 17; ces deux lignes ſont donc entr'elles comme 30 eſt à 17. Je prens encore la grandeur de la ligne *a* avec le compas ordinaire, & j'ouvre le Compas de proportion repréſenté ici par l'angle BAC, juſqu'à ce que l'une des pointes du Compas ordinaire étant miſe ſur l'un des points 30 de la ligne des ſolides, l'autre pointe tombe ſur l'autre point 30; cela fait, & le Compas de proportion reſtant ainſi ouvert, je prens la diſtance des points 17, 17 de la ligne des ſolides, & cette diſtance eſt la premiere des deux moyennes proportionnelles *m*, *n* cherchées. Or, celle-ci étant trouvée, il n'y a plus qu'à prendre une moyenne proportionnelle *n*, entre *m* & *b*, pour avoir la ſeconde.

On comprendra la raiſon de ceci, ſi l'on fait attention que les quatre lignes *a*, *m*, *n*, *b* étant en proportion continuë, on doit avoir a^3, m^3 :: *a*. *b* :: 30. 17; ainſi les lignes *a*, *m* doivent être entr'elles comme les côtés de deux cubes ou de deux ſolides ſemblables qui ſeroient entr'eux comme 30 & à 17. Or, les lignes *a*, *m* ſont égales par la conſtruction, aux diſtances 30, 30, & 17, 17, & à cauſe des triangles ſemblables 30 A 30, & 17 A 17, nous avons 30,30 . 17,17 :: 30,A . 17,A; donc *a*. *m* :: 30, A; 17,A, mais 30,A. & 17,A ſont les côtés de deux ſolides ſemblables ou de deux cubes qui ſont entr'eux comme 30 a 17; donc les cubes de *a*, *m* ſont auſſi comme 30 eſt à 17, & par conſéquent *m* eſt la premiere des deux moyennes proportionnelles chetchées.

591. PROBLEME. *Un cercle* ABCD *étant donné* (Fig. 377.), *trouver le côté d'un polygone régulier qu'on veut lui inſcrire.*

Je prens avec le compas ordinaire la grandeur OH du rayon du cercle donné; j'ouvre le compas de proportion, juſqu'à ce que la pointe du compas ordinaire étant miſe ſur l'un des points 6 de la ligne des polygones, l'autre pointe tombe ſur l'autre point 6; cela fait, & le compas de proportion reſtant ainſi ouvert, ſi l'on de-

mande le côté du pentagone qu'il faut inſcrire dans le cercle donné, je prens avec le compas ordinaire la diſtance 5, 5 des points 5, 5 de la ligne des polygones, & cette diſtance eſt le côté demandé AB; car, par la conſtruction, le rayon OH & la ligne AB ſont entr'eux comme les diſtances 6, 6 & 5, 5; or, à cauſe des triangles ſemblables 6R6, 5R5, on a 6,6. 5,5 :: 6R. 5R. donc OH. AB :: 6R. 5R, c'eſt-à-dire le rayon OH du cercle donné eſt à la corde AB, comme le côté 6R de l'exagone inſcrit dans le cercle qui a ſervi à la diviſion de la ligne des polygones, eſt au côté 5R du pentagone inſcrit dans le même cercle; mais le côté 6R de l'exagone eſt égal au rayon du cercle dans lequel l'exagone eſt inſcrit; donc nous avons le rayon OH du cercle donné, eſt à ſa corde AB, comme le rayon du cercle qui a ſervi pour la conſtruction de la ligne des polygones eſt à la corde R5 de ce cercle; mais la corde R5 eſt le côté du pentagone inſcrit dans le cercle qui a ſervi à conſtruire la ligne des polygone; donc le côté AB doit être le côté du pentagone inſcrit dans le cercle donné.

592. *Remarque.* Tout ce que nous avons dit dans ce Chapitre touchant les ſolides & leur ſurfaces fait aſſez entrevoir que nous aurions encore beaucoup de choſe à dire ſur cette matiere; mais comme les méthodes particulieres dont il faudroit ſe ſervir, ſeroient trop longues & embaraſſantes; je renvoye ce ſujet au Livre ſuivant où je donnerai des méthodes générales & faciles pour trouver la ſolidité & la ſurface d'une infinité de ſolides.

CHAPITRE XII.

Du Toiſé de la Maçonnerie, & du Toiſé des bois.

593. LA meſure dont on ſe ſert pour meſurer les longueurs, eſt une longueur nommée *Toiſe* ou *Toiſe courante*, que l'on diviſe en ſix parties égales nommées *Pieds*; chaque pied ſe diviſe en 12 parties égales nommées *Pouces*; chaque pouce contient 12 parties égales nommées *Lignes*, & chaque ligne ſe diviſe encore en 12 parties égales nommées *Points*, qui ſont des grandeurs extrêmement petites qu'on néglige ordinairement dans la pratique. Ainſi la toiſe courante, contenant 6 pieds, &

chaque pied 12 pouces ; il eſt clair que chaque toiſe courante contient 6 fois 12 ou 72 pouces ; de même chaque pouce contient 12 lignes ; la toiſe courante doit contenir 72 fois 12 ou 864 lign.

594. La toiſe quarrée eſt un quarré ABCD (*Fig.* 378.) dont la baſe AB & la hauteur AD valent chacun une toiſe. Or, comme chaque côté contient 6 pieds ; il eſt viſible qu'en multipliant l'un par l'autre, le produit 36 marque que la toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés ou 36 petits quarrés qui ont un pied de baſe & un pied de hauteur, comme la figure le fait voir ; de même chaque pied quarré ayant 12 pouces de baſe & 12 de hauteur, contient 12 fois 12 ou 144 pouces quarrés ; & par conſéquent la toiſe quarrée doit contenir 36 fois 144 ou 5184 pouces quarrés ; enfin chaque pouce quarré ayant 12 lignes de baſe & 12 de hauteur, contient 12 fois 12 ou 144 lignes quarrées ; d'où il ſuit que la toiſe quarrée contient 5184 fois 144 ou 746496 lignes quarrées.

La toiſe quarrée ſert pour meſurer les ſurfaces ; car, ſi une ſurface a 3 toiſes de longueur & 2 toiſes de largeur, multipliant l'un par l'autre, on aura 6 toiſes quartées ; c'eſt-à-dire que cette ſurface contiendra ſix fois un quarré dont la baſe & la hauteur ſont chacune une toiſe courante.

595. La toiſe cube eſt un cube AB (*Fig.* 379.) dont les dimenſions AC, AD de la baſe & la hauteur AE, valent chacune une toiſe courante. Or, la baſe de ce cube étant une toiſe quarrée, contient 36 pieds quarrés, leſquels étant multipliés par la hauteur AE qui vaut 6 pied, donnent 216 pieds cubes pour la valeur de la toiſe cubique ; ainſi la toiſe cubique contient 216 petits cubes tels qu'on les voit dans la figure, & dont les trois dimenſions ont chacune un pied de longueur ; de même les deux dimenſions de la baſe de chaque pieds, étant chacune de 12 pouces, leur produit donne 144 pouces quarrés de baſe, leſquels étant multipliés par la hauteur, 1 pied ou 12 pouces donnent 1728 pouces cubiques pour la valeur du pied cube ; d'où il ſuit que la toiſe cube contient 216 fois 1728 ou 373248 pouces cubiques. Enfin les dimenſions de la baſe d'un pouce cubique, étant chacune de 12 lignes de longueur, leur produit leur donne 144 lignes quarrées, leſquelles, multiplié par la hauteur 12 lignes, donnent 1728 lignes cubiques pour la valeur d'un pouce cubique ; d'où il ſuit que la toiſe cubique contient 373248 fois 1728 ou 644972544 lignes.

La toiſe cube ſert à meſurer les ſolides; car ſi les deux dimenſions de la baſe d'un ſolide ſont 4, 3, & la hauteur du ſolide 5; la baſe ſera 4 fois 3 ou 12 toiſes quarrées leſquelles multipliées par les 5 toiſes de la hauteur donneront 60 toiſes cubes.

596. La diviſion de la toiſe quarrée en pieds pouces & lignes quarrées, étant trop embaraſſante pour le calcul, de même que la diviſion de la toiſe cube en pieds, pouces & lignes cubiques, on a trouvé le moyen de faire que les diviſions de ces deux ſortes de toiſes fuſſent les mêmes que celles de la toiſe courante qui facilitent davantage le Calcul. Et voici comme on a fait.

597. Soit la toiſe quarrée AC, (*Fig.* 380.) je diviſe le côté AB en ſix parties égales qui valent par conſéquent chacune un pied, & des points de diviſion, je mene des paralelles à l'autre côté BC; ce qui diviſe la toiſe en ſix rectangles égaux qu'on nomme *pieds de toiſe quarrée*, par ce qu'ils ont chacun un pied de hauteur & une toiſe de baſe. Je diviſe de même la hauteur de chaque pied de toiſe quarrée en 12 parties égales, à cauſe que chaque pied contient 12 pouces, & des points de diviſion, menant des paralelles à la baſe, chaque pied de toiſe quarrée ſe trouve diviſé en 12 rectangles qu'on nomme *pouces de toiſes quarrée*, parce qu'ils ont un pouce de hauteur & une toiſe de baſe; enfin, diviſant la hauteur de chaque pouce de toiſe quarrée en 12 parties égales, & menant des points de diviſion des paralelles à la baſe; chaque pouce de toiſe quarrée ſe trouve diviſé en 12 petits rectangles qui ont une ligne de hauteur, & une toiſe de baſe, & qui à cauſe de cela, ſont nommés *lignes de toiſe quarrée*. De façon que la toiſe quarrée contient 6 pieds de toiſes quarrée, ou 72 pouces de toiſe quarrée, ou enfin 864 lignes de toiſe quarrée; & cette maniere de diviſer la toiſe quarrée convient très-bien non-ſeulement au Calcul, mais encore à la nature des choſes; car il eſt viſible que lorſqu'on multiplie, par exemple, une toiſe par un pied, le produit n'eſt ni un pied ni une toiſe, mais une toiſe de baſe & un pied de hauteur; & ainſi des autres.

598. Soit de même, la toiſe cubique BE, (*Fig.* 381.) je diviſe ſa hauteur AB en 6 parties égales, & par les points de diviſion, je fais paſſer des plans paralelles à la baſe; ce qui diviſe la toiſe cubique en 6 paralellepipedes égaux, nommés *pieds de toiſe cubique*, à cauſe qu'ils ont chacun un pied de hauteur, & une toiſe quarrée de baſe. Je diviſe de même la hauteur de chaque pied de toiſe cubique en douze parties égales, & par les points de

diviſion, faiſant paſſer des plans paralelles à la baſe, chaque pied de toiſe cubique ſe trouve diviſée en 12 paralellepipedes nommés *pouces de toiſes cubiques*, parce qu'ils ont un pouce de hauteur & une toiſe quarrée de baſe. Enfin diviſant la hauteur de chaque pouce de toiſe cubique en 12 parties égales, & par les points de diviſion, faiſant paſſer des plans paralelles à la baſe, chaque pouce de toiſe cubique ſe trouve diviſé en 12 paralellepipedes égaux, nommés *Lignes de toiſe cubique*, à cauſe qu'ils ont une ligne de hauteur, & une toiſe quarrée de baſe, de façon que la toiſe cubique contient 6 pieds de toiſe cubique, ou 72 pouces de toiſe cubique ou 864 lignes de toiſe cubique.

On va voir dans les Exemples ſuivans, de qu'elle maniere le calcul ſe ſert des diviſions dont nous venons de parler.

599. Ier EXEMPLE. *Un Mur a 23 toiſes 3 pieds 6 pouces 6 lignes de longueur, & 2 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, 9 lignes de hauteur, combien contient-il de toiſes quarrées?*

J'écris le nombre à multiplier, & le multiplicateur à la façon ordinaire, les toiſes ſous les toiſes, les pieds ſous les pieds, &c. & comme le nombre 2 des toiſes du multiplicateur, n'a qu'un caractére; je multiplie les toiſes, pieds, pouces & lignes du nombre à multiplier par 2, en diſant: 2 fois 6 lignes font 12 lignes de toiſe quarrée, ou un pouce. J'écris zero ſous les lignes, & je retiens 1; 2 fois 6 pouces font 12 & 1 de retenu font 13, ou 1 pied de toiſe quarrée & un pouce; j'écris un pouce, & je retiens 1; 2 fois 3 pieds font 6 & 1 de retenu, font 7 ou une toiſe quarrée, & 1 pied que j'écris en retenant une toiſe, & achevant le reſte à l'ordinaire, j'ai 47 toiſes 1 pied 1 pouce 0 lignes pour le produit de 2 toiſes.

23 toiſ. 3 pieds 6 pouc. 6 lign.

2	3	6	9	
47	1	1	0	
11	4	9	3	
1	5	9	6	$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$
	1	5	8	$\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$
61 toiſ.	1 pied	1 pouce	5 lign.	$\frac{11}{12}$

Pour multiplier par 3 pieds. Je dis: ſi j'avois à multiplier par une toiſe, le produit ſeroit 23 toiſes quarrées 3 pieds, 6 pouces 6 lignes de toiſe quarrée; donc 3 pieds qui ne ſont que la moitié d'une toiſe ne doivent donner que la moitié de ce produit, & cette moitié eſt 11 toiſes, 4 pieds, 9 pouces, 3 lignes.

Six pouces ſont le ſixiéme de 3 pieds ou 36 pouces; or, trois

pieds ont produit 11 toiſes, 4 pieds, 9 pouces, 3 lignes; donc 6 pouces ne doivent donner que le ſixiéme de ce produit, & ce ſixiéme eſt 1 toiſe, 5 pieds, 9 pouces, 6 lignes $\frac{1}{2}$.

Enfin, 9 lignes ſont le huitiéme de 6 pouces ou de 72 lignes; donc 9 lignes ne doivent produire que la huitiéme partie du produit que 6 pouces ont donné; ainſi prenant la huitiéme de 1 toiſe, 5 pieds, 9 pouces, 6 lignes $\frac{1}{2}$; j'ai 1 pieds, 5 pouces, 8 lignes $\frac{3}{16}$.

J'ajoute enſemble tous les produits que je viens de trouver; & le produit total 61 toiſes 1 pied, 1 pouce, 5 lignes $\frac{11}{16}$ eſt la ſurface du mur propoſé.

600. IIe. EXEMPLE. *Trouver le contenu d'une ſurface plane qui a 34 toiſes 2 pieds, 9 pouces, 8 lignes de largeur, & 23 toiſes 4 pieds 6 pouces, 8 lignes de hauteur.*

Je néglige les 2 pieds 9 pouces, 8 lignes de la largeur à cauſe qu'il ſeroit trop embarraſſant de les multiplier par les 23 toiſes de la hauteur. Multipliant donc 34 par 23, j'ai les deux produits 102 & 68 rangés comme on voit içi.

Quatre pieds ſont les deux tiers d'une toiſe. Or, ſi je multipliois 34 par une toiſe, le produit ſeroit 34; donc en multipliant par 4 pieds, le produit doit être les deux tiers de 34; mais le tiers de 34 eſt 11 toiſes 2 pieds, c'eſt pourquoi j'écris deux fois ce produit 11 toiſes 2 pieds.

34 toiſ.	2 pieds	9 pouc.	8 lign.	
23	4	6	8	
102				
68				
11	2			
11	2			
2	5			
0	1	10	8	
7	5	6	2	$\frac{2}{3}$
1	5	10	6	$\frac{2}{3}$
0	5	11	3	$\frac{1}{3}$
0	0	11	10	$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
0	0	3	11	$\frac{14}{27}$
818 toiſ.	5 pieds	6 pouc.	8 lign.	$\frac{20}{27}$

Six pouces ſont le quart de 2 pieds ou de 24 pouces, prenant donc le quart de ce que deux pieds m'ont rendu, c'eſt-à-dire de 11 toiſes 2 pieds j'ai 2 toiſes 5 pieds.

Huit lignes ſont la neuviéme partie de 6 pouces ou de 72 lignes; ainſi prenant le neuviéme de ce que m'ont produit 6 pouces, c'eſt-à-dire de 2 toiſes 5 pieds; j'ai 0 toiſes 1 pied 10 pouces 8 lignes.

Je

Je reviens maintenant aux 2 pieds 9 pouces, 8 lignes que j'avois d'abord négligé ; & je dis, ſi j'avois à multiplier 1 toiſe par 23 toiſes 4 pieds, 6 pouces, 8 lignes, le produit ſeroit 23 toiſes 4 pieds 6 pouces 8 lignes ; mais je n'ai à multiplier que par 2 pieds, qui eſt le tiers d'une toiſe ; donc je ne dois avoir que le tiers de ce produit, & ce tiers eſt 7 toiſes 5 pieds 6 pouces 2 lignes $\frac{2}{3}$.

Neuf pouces ne ſont pas exactement contenus dans deux pieds ; c'eſt pourquoi, je partage 9 en 2 parties 6 & 3 ; dont l'une 6 eſt le quart de deux pieds ou 24 pouces, & l'autre 3 eſt la moitié de 6. Or, puiſque 6 pouces eſt le quart de 2 pieds ; prenant le quart de ce que 2 pieds ont produit, c'eſt-à-dire de 7 toiſes 5 pieds, 6 pouces, 2 lignes $\frac{2}{3}$, j'ai 1 toiſe 5 pieds, 10 pouces 6 lignes $\frac{2}{3}$.

Pour 3 pouces, je prens la moitié de ce dernier produit, ce qui donne 5 pieds 11 pouces 3 lignes $\frac{1}{3}$.

Huit lignes n'étant pas exactement contenues dans 3 pouces ou 36 lignes, je partage 8 en deux parties 6 & 2, dont la premiere 6 eſt le ſixiéme de 3 pouces, & l'autre 2 eſt le tiers de 6. Ainſi prenant le ſixiéme de ce que 3 pouces ont produit, j'ai 11 pouces 10 lignes $\frac{4}{9}$, & prenant le tiers de ce dernier produit, j'ai 3 pieds 11 lignes $\frac{14}{27}$.

Enfin, ajoutant tous les produits enſemble, le produit total 818 toiſes 5 pieds 6 pouces, 6 lignes $\frac{20}{27}$ eſt le contenu de la ſurface propoſée.

601. Pour faciliter le calcul, il eſt quelquefois néceſſaire de faire des fauſſes ſuppoſitions, ainſi qu'on va voir dans l'Exemple ſuivant.

602. IIIe EXEMPLE. *Trouver la valeur d'une ſurface qui a 32 toiſes de largeur, & 25 toiſes, 9 pouces de hauteur.*

Je multiplie d'abord 32 par 25, ce qui donne les deux produits 160 & 64, diſpoſés comme on les voit ici.

Maintenant comme il ſeroit trop embarraſſant de chercher ce que 9 pouces eſt à l'égard d'une toiſe ; je ſuppoſe que j'aye à multiplier 32 toiſes par un pied qui eſt le ſixiéme d'une toiſe ; or, ſi j'avois à multi-

32 toiſes	
25 toiſes 0 pieds 9 pouces	
160 toiſes	
64	
8	2 pieds
2	4
1	2
804 toiſes 0 pieds	

plier par une toiſe, le produit ſeroit 32 toiſes ; donc en multipliant par un pied, je dois avoir le ſixiéme de 32, c'eſt-à-dire, 5 toiſes 2 pieds que j'écris, mais que j'effacerai enſuite, parce qu'il n'y a point de pieds dans le nombre à multiplier.

9 pouces n'étant pas exactement contenus dans un pied ou 12 pouces, je diviſe 9 en 2 parties 6 & 3, dont la premiere 6 eſt la moitié d'un pied, & l'autre 3 eſt la moitié de 6, après quoi je prens pour 6 pouces la moitié de 5 toiſes 2 pieds, ce qui donne 2 toiſes 4 pieds, & pour 3 pouces je prens la moitié de 2 toiſes 4 pieds, ce qui donne 1 toiſe 2 pieds.

J'efface le produit 5 toiſes 2 pieds qui vient d'une fauſſe ſuppoſition, & ajoutant enſemble les autres produits, j'ai 804 toiſes pour la valeur de la ſurface propoſée.

603. *Remarque.* Il eſt bon d'obſerver que ſi l'on demandoit d'extraire la racine quarrée d'un produit ou d'une ſurface plane compoſée de toiſes quarrées, de pieds, pouces & lignes de toiſe quarrée, il ne ſuffiroit pas de réduire tout en lignes de toiſe quarrée, mais qu'il faudroit outre cela réduire ces lignes en lignes quarrées, c'eſt-à-dire, multiplier les lignes de toiſe quarrée par le nombre de lignes quarrées qu'elles contiennent.

Soit le produit 6 toiſes 4 pieds, 0 pouces, 6 lignes de toiſe quarrée dont on demande d'extraire la racine quarrée. Je réduis tout en lignes, ce qui donne 5766 lignes de toiſe quarrée. Or comme chacune de ces lignes eſt le produit d'une toiſe de longueur par une ligne de hauteur, & qu'une toiſe contient 864 lignes, il s'enſuit que chaque ligne de toiſe quarrée contient 864 lignes quarrées, multipliant donc 5766 par 864 le produit eſt 4981824 lignes quarrées, dont la racine eſt 2232 lignes qui ſont 2 toiſes 3 pieds 6 pouces ; & en effet ſi l'on multiplie 2 toiſes 3 pieds 6 pouces par 2 toiſes 3 pieds pouces, le produit ſera 6 toiſes 4 pieds, 0 pouces 6 lignes comme il étoit propoſé.

La raiſon de ceci eſt, que les lignes de toiſe quarrée étant compoſées de deux quantités de différente eſpece, c'eſt-à-dire, d'une toiſe de longueur & d'une ligne de hauteur, l'extraction de leur racine ne peut donner ni des lignes ni des toiſes, & que par conſéquent ſi l'on veut faire cette extraction, il faut néceſſairement réduire les lignes de toiſe quarrées en lignes quarrées, dont la hauteur & la longueur ſont de même eſpece.

Et il faut faire la même remarque à l'égard des pieds de toiſe quarrée.

604. IVe EXEMPLE. *Trouver le contenu d'un ſolide qui a* 12 *toiſes* 3 *pieds* 4 *pouces de longueur*, 6 *toiſes* 2 *pieds* 6 *pouces de largeur*, *&* 13 *toiſes* 4 *pieds de hauteur.*

Je multiplie la longueur par la largeur, ce qui donne 80 toiſes quarrées 3 pieds 9 pouces 11 lignes de toiſe quarrée & $\frac{1}{3}$ de ligne. Je multiplie ce produit par la hauteur 13 toiſes 4 pieds, ce qui donne 1102 toiſes cubiques 0 pieds 3 pouces 11 lignes de toiſe cubique, & $\frac{1}{6}$ de ligne pour la ſolidité demandée.

12 toiſ.	3 pieds	4 pouc.		
6	2	6	6 lig.	
75	2	0		
4	1	1	4	
1	0	3	4	
0	0	6	3	$\frac{1}{3}$
80 toiſ.	3 pieds	9 pouc.	11 lig.	$\frac{1}{3}$
13	4			
240				
80				
26	4			
26	4			
6	5			
1	4	3		
0	2	2	8	
0	0	6	10	
0	0	3	5	
0	0	2	3	$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
0	0	0	4	$\frac{10}{11} = \frac{5}{6}$
1102 toiſ.	0 pieds	0 pouc.	11 lig.	$\frac{6}{6}$

605. Il faut encore remarquer ici, que ſi l'on demandoit d'extraire la racine cubique d'un produit compoſé de toiſes cubiques, de pieds pouces & lignes de toiſe cubique, il faudroit non ſeulement tout réduire en lignes de toiſe cubique, mais encore multiplier ces lignes par le nombre de lignes cubiques qu'elles contiennent, ou par 746496; car la ligne cubique ayant une toiſe quarrée de baſe, laquelle vaut 746496 lignes quarrées (*N.* 594.) & une ligne de hauteur vaut par conſéquent 746496 lignes cubiques. Après quoi, on feroit l'extraction de la racine cubique à l'ordinaire.

Que ſi outre les lignes de toiſe cubique, il ſe trouvoit une fraction de ligne par exemple $\frac{1}{6}$ on prendroit le ſixiéme de 746496 lignes quarrées qui eſt la valeur d'une ligne de toiſe cubique, & on l'ajouteroit aux lignes cubiques qu'on auroit trouvé en faiſant la réduction; & ſi en faiſant cette addition il ſe trouvoit une fraction de ligne cubique, on réduiroit tout en cette fraction &c.

Du toisé des Bois de Charpente, de Menuiserie, de Charronnage &c.

606. Le bois qui a encore toute son écorce se nomme *bois en grume*, celui dont on a ôté l'écorce avec la hache, & qu'on a équarré en forme de paralellepipede assez défectueux, se nomme *bois de brin*, enfin celui qu'on équarre avec la scie, se nomme *bois de sciage.*

Tout bois équarré avec la hache ou avec la scie étant fait en forme de parallepipede, a pour base une figure de quatre côtés dont les deux dimensions qui sont la largeur & la hauteur du bois, se nomment *dimensions de l'équarrissage*, & quand ces deux dimensions sont inégales, le bois se nomme mi-plat ou à deux faces.

Le *bois en grume*, c'est-à-dire, le tronc d'un arbre, ou ses branches, étant toujours fait comme une espece de colonne qui va en diminuant, a par conséquent deux bases circulaires, l'une inférieure & l'autre supérieure, laquelle est moindre que l'inférieure. C'est pourquoi on prend ordinairement son diamétre vers le milieu de la longueur, pour faire une juste compensation. Mais comme l'écorce est inutile pour les ouvrages qu'on veut faire avec ces sortes de bois, on retranche trois pouces du diamétre & l'on quarre le reste, ce qui donne à la vérité un équarrissage plus grand qu'il ne faut, puisque le quarré du diamétre est plus grand que son cercle, mais ce défaut se trouve compensé d'un autre côté par les trois pouces que l'on ôte pour l'écorce, n'y ayant guéres d'arbre qui en ait un pouce & demi. Après-tout, dans ces sortes de marchés, il vaut mieux suivre l'usage établi parmi les Marchands, que de vouloir les assujettir à une exactitude géometrique à laquelle ils n'entendroient rien, & qui par-là les mettroit sans cesse dans la crainte qu'on ne voulût les tromper.

607. La mesure dont on se sert pour les bois se nomme *solive.* C'est un solide AB (Fig. 382.) dont la longueur AC est d'une toise ou 6 pieds, la largeur AD de 12 pouces ou 1 pied, & la hauteur AH de 6 pouces, ainsi ce solide est de 3 pieds cubiques, car multipliant la longueur 6 pieds par la largeur 1 pied, le produit est six pieds quarrés, lesquels multipliés par la hauteur 6 pouces ou un demi pied, donne trois pieds cubiques.

Si l'on coupe la hauteur AH en six parties égales, & que par les points de division on coupe la solive paralellement à sa base

ou dans toute ſa longueur, la ſolive ſe trouvera partagée en 6 parties égales qu'on nomme *pieds de ſolive ;* de même diviſant la hauteur d'un pied de ſolive en 12 parties égales, & coupant le pied dans toute ſa longueur ſelon ces diviſions, le pied de ſolive ſera diviſé en 12 parties égales qu'on nomme *pouces de ſolive*, enfin diviſant la hauteur d'un pouce de ſolive en 12 parties égales, & coupant le pouce dans toute ſa longueur ſelon ces diviſions, on aura 12 *lignes de ſolive.* Les dimenſions de l'équarriſſage dans la ſolive, ſont la largeur AD, & la hauteur AH.

608. La toiſe cube, comme nous avons dit ci-deſſus, (*N.* 595.) contient 216 pieds cubes, & la ſolive en contient 3; diviſant donc 216 par 3, le quotient 72 fait voir que la toiſe cube contient 72 ſolives, ou qu'elle eſt 72 fois plus grande que la ſolive. Or, comme la toiſe cubique contient 6 pieds de toiſe cubique, le pied 12 pouces de toiſe cubique, & le pouce 12 lignes de toiſe cubique, de même que la ſolive contient 6 pieds de ſolive, le pied 12 pouces de ſolive, & le pouce 12 lignes, il s'enſuit que les pieds, pouces & lignes de toiſe cubique ſont auſſi 72 fois plus grands que les pieds, pouces & lignes de ſolive.

609. Après ce qui vient d'être dit, il eſt aiſé de voir que ſi l'on toiſe une piéce de bois à la façon ordinaire, pour avoir ſa ſolidité en toiſes, pieds, pouces, & lignes de toiſe cubique, & qu'on multiplie enſuite cette ſolidité par 72, le produit fera voir combien cette piece de bois contient de ſolive: en voici un exemple.

610. EXEMPLE. *Trouver le nombre de ſolives qu'on peut tirer d'un tronc d'arbre dont la longueur eſt de 4 toiſes 3 pieds, & le diamétre pris dans le milieu de la longueur eſt de 3 pieds 9 pouces, 6 lignes.*

Je retranche du diamétre 3 pouces, pour la raiſon que j'en ai apportée ci-deſſus & j'ai: 0 toiſes, 3 pieds, 6 pouces 6 lignes dont je fais le quarré en diſant: s'il falloit multiplier par une toiſe, le produit ſeroit 0 toiſes 3 pieds 6 pouces 6 lignes, donc en multipliant par 3 pieds qui eſt la moitié d'une toiſe, je dois avoir la moitié de ce produit, & cette moitié eſt 1 pied, 9 pouces 3 lignes.

Six pouces ſont le ſixiéme de trois pieds, c'eſt pourquoi je prens le ſixiéme de ce que 3 pieds ont produit, & ce ſixiéme eſt 3 pouces 6 lignes & $\frac{1}{2}$.

Pour 6 lignes qui ſont le douziéme de 6 pouces, je prens le douziéme de ce que 6 pouces ont produit, ce qui donne 3 lignes

& $\frac{11}{24}$. J'ajoute tous ces produits enſemble & le produit total 0 toi. 2 pieds de toiſe quarrée 1 pouce 1 ligne, & $\frac{1}{24}$ eſt le quarré du diamétre.

Je multiplie ce quarré par la longueur 4 toiſes 3 pieds à la façon ordinaire, & le produit 1 toiſe cubique 3 pieds 4 pouces 10 lignes de toiſe cubique, & $\frac{11}{48}$ eſt la ſolidité du tronc.

0 toiſes	3 pieds	6 pouc.	6 lig.	
0	3	6	6	
0	1	9	3	
	0	3	6	$\frac{1}{2}$
		0	3	$\frac{11}{24}$
0	2	1	1	$\frac{1}{24}$
4	3			
1	2	4	4	$\frac{1}{2}$
	1	0	6	$\frac{23}{48}$
1	3	4	10	$\frac{11}{48}$
72				

72 ſoliv.
36
4
0 ſoliv. 4 pieds
1
6 pouc.
4 1 $\frac{1}{2}$

112 ſoliv. 5 pieds 4 pouc. 1 lig. $\frac{1}{2}$

Pour ſçavoir combien ce produit contient de ſolive, je le multiplie par 72, à cauſe que la toiſe cubique contient 72 ſolives, en diſant une fois 72 fait 72 ſolives ; pour trois pieds je prens 36 qui eſt la moitié de 72 ; pour 4 pouces qui ſont le neuviéme de 3 pieds, je prens le neuviéme de 36 qui eſt 4 ; je partage 10 lignes en deux parties 8 & 2, dont la premiere 8 eſt le ſixiéme de 4 pouces, & la ſeconde 2 eſt le quart de 8 ; ainſi je prens le ſixiéme de 4 ſolives, ce qui donne 4 pieds de ſolive, & prenant enſuite le quart de 4 pieds, j'ai un pied de ſolive. Pour $\frac{11}{48}$ je dis, deux lignes m'ont rendu un pied de ſolive, donc une ligne doit rendre un demi pied ou 6 pouces, & ceci n'eſt qu'une fauſſe ſuppoſition que j'effacerai, parce quelle ne doit pas entrer en ligne de compte ; or, 6 pouces ſont 72 lignes dont la quarante & huitiéme partie eſt 1 ligne $\frac{1}{2}$; multipliant donc 1 ligne & $\frac{1}{2}$ par 33, le produit 49 lignes $\frac{1}{2}$ ou 4 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ eſt ce que doit produire la fraction $\frac{11}{48}$. J'ajoute tous ces produits enſemble, & j'ai 112 ſolives 5 pieds 4 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ contenues dans le tronc propoſé.

611. Si la piece de bois à meſurer étoit équarrée avec la hache ou la ſcie, & que ſes trois dimenſions fuſſent inégales, on multiplieroit ſes trois dimenſions les unes par les autres pour avoir ſa ſolidité, & l'on multiplieroit ſa ſolidité par 72, ce qui donne-

roit le nombre de ſolives contenues dans la piece.

612. Il eſt indifférent de multiplier d'abord les trois dimenſions les unes par les autres, & enſuite la ſolidité par 72, ou de multiplier l'une des dimenſions de l'équarriſſage par 72, & enſuite par les autres dimenſions; car le produit total ſera toujours le même, puiſque les multiplicateurs ſeront toujours les mêmes; or, de-là on a tiré une autre méthode qui abrege beaucoup le calcul, ainſi qu'on va voir.

613. Suppoſons le même tronc d'arbre de l'Exemple précédent, ſon diamétre eſt 0 toiſes 3 pieds, 6 pouces, 6 lignes. Or, avant de le multiplier par lui-même, je réduis les pieds en pouces, & les ajoutant aux 6 pouces, j'ai 42 pouces 6 lignes. Je mets les 42 pouces au rang des toiſes, & par-là je fais la même choſe que ſi je multipliois 42 pouces par 72, à cauſe que la toiſe eſt 72 fois plus grande que le pouce. Quant aux 6 lignes je vois que ſi je les mets au rang des pieds elles deviendroient 144 fois plus grandes, à cauſe que le pied contient 144 lignes, & par conſéquent ces lignes, au lieu d'être multipliées par 72, ſe trouveroient multipliées par 144 ou 2 fois 72, ce qui eſt la moitié trop; c'eſt pourquoi au lieu de 6, je ne mets au rang des pieds que la moitié de 6, c'eſt-à-dire 3. J'ai donc 42 toiſes 3 pieds, qui ſont la même choſe que 42 pouces 6 lignes, multipliées par 72.

Je multiplie 42 toiſes 3 pieds par 0 toiſes 3 pieds 6 pouces 6 lignes, & le produit 25 toiſes 0 pieds 6 pouces 3 lignes eſt 72 fois plus grand qu'il ne faut pour être le quarré du diamétre, & par conſéquent ce produit eſt le quarré du diamétre multiplié par 72.

42 toiſes	3 pieds	6 pouc.	6 lig.	
0	3			
21	1	6		
3	6	3		
0	1	19	3	
25	0	6	3	
4	3			
100	2	1	0	
12	3	3	3	$\frac{1}{2}$
112 toiſes	5 pieds	4 pouc.	1 lig.	$\frac{1}{2}$

Je multiplie ce produit par la longueur 4 toiſes 3 pieds, & le produit 112 toiſes, 5 pieds, 4 pouces, 1 ligne $\frac{1}{2}$, eſt 72 fois plus grand qu'il ne faut pour être la ſolidité du tronc; donc ce produit eſt le nombre de ſolives contenus dans ce tronc.

Des Fractions Décimales.

614. Si au lieu de diviſer la toiſe en pieds, pouces & lignes; on la diviſe d'abord en dix parties, chacune deſquelles ſera $\frac{1}{10}$; puis chaque dixiéme en dix parties qui ſeront des dixiémes de dixiémes ou des centiémes; puis chaque centiéme en dix parties qui ſeront des dixiémes de centiémes ou des milliémes, & ainſi de ſuite, les fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, &c. ſeront ce qu'on appelle *Fraction décimales*.

615. Les dixiémes ſe nomment *Primes*, les centiémes ſe nomment *Secondes*, les milliémes *Tierces*, les dix milliémes *Quartes*, &c.

616. Pour n'avoir pas l'embarras des dénominateurs & des numerateurs, on écrit $1'$, $2'$, $3'$, &c. au lieu de $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, &c. de même au lieu de $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{10}$, &c. on écrit $1''$, $2''$, $3''$, &c. au lieu de $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, &c. on écrit $1'''$, $2'''$, $3'''$, &c. & ainſi de ſuite, de façon que pour dire un dix milliéme ou une quarte, on écrit 1^{IV}; pour dire une quinte on marque 1^{V}, &c. & enfin, pour marquer un entier, ou deux, ou 3, on écrit 1^{0}, 2^{0}, 3^{0}, &c.

617. Au moyen de ceci, il eſt aiſé d'éviter les difficultés & l'ennui que l'on éprouve ſouvent dans le calcul ordinaire des fractions, ainſi qu'on va voir.

618. Pour reduire 3^{0}, $5'$ à la derniere eſpéce, c'eſt-à-dire en priſmes; il n'y a qu'à écrire $35'$; car 3^{0} $5'$ ſont la même choſe que $3\frac{5}{10}$; mais pour reduire $3,\frac{5}{10}$ en dixiémes, il faut multiplier l'entier 3 par 10, ce qui fait 30, & y ajouter 5, ce qui fait 35, puis écrire $\frac{35}{10}$, & $\frac{35}{10}$ ſont la même choſe que $35'$. Donc, &c.

Par la même raiſon, ſi l'on veut reduire 2^{0}. $3'$. $4''$ en ſa derniere eſpéce, c'eſt à-dire en ſecondes, on écrit $234''$; car pour reduire les priſmes ou dixiémes $3'$ en centiémes, il faut les multiplier par 10, ce qui ſe fait en écrivant $34''$, à cauſe que le nombre 3 devient par-là dix fois plus grand que s'il étoit ſeul; & pour reduire l'entier 2^{0}. en ſecondes ou centiémes; il faut le multiplier par 100, ce qui ſe fait encore en écrivant $234''$, à cauſe que le nombre 2 devient par-là 100 fois plus grand qu'il ne faut. Donc, &c.

619. Pour reduire $35'$ en entier, on écrit 3^{0}. $5'$, car 35 ſont la même choſe que $\frac{35}{10}$. Or, pour reduire $\frac{35}{10}$ en entier, il faut diviſer

ſer 35 par 10, & le quotient 3 marque trois entiers avec un reſte $\frac{5}{10}$. Donc, &c. De même pour réduire 234″ en entier, on écrit 2°. 3′. 4″; car par-là le nombre 3 devient dix fois plus petit, puiſqu'il eſt ſeul, & le nombre 2 devient 100 fois plus petit. Ainſi c'eſt la même choſe que ſi on avoit diviſé 234 par 100, ce qui donne 2 entiers, & qu'on eût diviſé les 34 reſtans par 10, ce qui auroit donné 3 dixiémes, & 4 centiémes.

620. Pour ajouter 2°. 3′. 4″ avec 3°. 2′. 3″; on réduit l'un & l'autre nombre à ſa derniere eſpéce, ce qui donne 234″ & 323″; puis ajoutant l'un à l'autre on a la ſomme 557″ ou 5°. 5′. 7″; & pour ajouter 2°. 3′. 4″. 5‴, avec 3°. 2′. 3″, on réduit l'un & l'autre à ſa derniere eſpéce, ce qui donne 2345‴ & 323″; mais comme ces deux nombres ne ſont pas de la même eſpéce, on ajoute un zero au dernier, ce qui fait 3230‴ qui eſt encore le même que 325″, à cauſe que 325″ eſt la même choſe que $\frac{325}{100}$ & 3230‴ eſt la même que $\frac{3250}{1000}$, & que les deux fractions $\frac{325}{100}$ & $\frac{3250}{1000}$, ne ſont pas différentes; c'eſt pourquoi ajoutant enſemble 2345‴ & 3250‴, la ſomme ſera 5595‴ ou 5°. 5′. 9″. 5‴.

621. Pour ſouſtraire 2°. 3′. 4″ de 4°. 5′. 3″, on réduit tout aux dernieres eſpéces, ce qui donne 234″ & 453″; puis en faiſant la ſouſtraction, le reſte eſt 219″ ou 2°. 1′. 9″, & pour ſouſtraire 2345‴ de 654″, on ajoute un zero à ce dernier, ce qui donne 6540‴, puis faiſant la ſouſtraction le reſte eſt 4195‴, ou 4°. 1′. 9′. 5‴.

622. Pour multiplier 235″ par 32′, on multiplie à l'ordinaire, ce qui donne 7520, & ajoutant le caractére du prime avec celui des ſecondes, on écrit 7520‴; car 235″ ſont la même choſe que $\frac{235}{100}$, & 32′ ſont la même choſe que $\frac{32}{10}$; or, pour multiplier des centiémes par des dixiémes ou 100 par 10, il n'y a qu'à ajouter un zero, ce qui donne des $\frac{1}{1000}$, & pour exprimer des milliémes; par exemple 3, on écrit 3‴; donc, &c. De même pour multiplier 235″ par 2351‴, on multiplie à l'ordinaire, ce qui donne 552481, & ajoutant enſemble le caractére des ſecondes avec celui des tierces, on écrit 552481ᵛ, & ainſi des autres; car des ſecondes ou des $\frac{1}{100}$, multipliés par des tierces ou des $\frac{1}{1000}$, donnent $\frac{1}{100000}$ ou des quintes.

623. Pour diviſer 2784‴ par 232″ on fait la diviſion à l'ordinaire, & le quotient eſt 12, puis retranchant du caractére des tierces le caractére des ſecondes, on écrit 12′ ou 1°. 2′; car des

tierces ou des $\frac{1}{1000}$ divisés par des secondes ou des $\frac{1}{100}$, donnent des dixiémes ou des primes, &c.

624. Ce calcul seroit aussi beau qu'il paroît brillant, s'il pouvoit se faire qu'on réduisît toutes les mesures en dixiémes, puis en dixiémes de dixiémes, &c. mais tant que les divisions ou soudivisions ordinaires subsisteront, on n'y gagnera rien par la raison qu'on sera toujours obligé d'évaluer les primes, secondes, ou tierces qu'on trouvera.

625. Par exemple, supposons qu'une surface ait 2°. 3'. 3" de largeur, & 3°. 2'. 3" de hauteur. Si je veux trouver la valeur de cette surface, il faut que je multiplie 232" par 323", ce qui donne 74936^{iv}, ou 7°. 4936^{iv}, ou 7 toises quarrées $\frac{4936}{10000}$. Maintenant si je veux sçavoir combien cette fraction vaut de pieds de toise quarrée; il faut que je dise par Régle de trois; la toise étant divisée en 10000 parties, j'en ai 4936, la même toise étant divisée en 6 pieds, combien aurai-je? Et la Régle faite, je trouve 2 pieds & une fraction $\frac{9616}{10000}$; & pour évaluer cette seconde fraction, il faut que je multiplie le numerateur 9616 par 12, & que je divise le produit par 10000; ce qui donne 11 pouces, & une fraction $\frac{5391}{10000}$, qu'il faut que j'évalue encore, & ainsi de suite; or, il est visible que ces évaluations sont plus pénibles que celles que j'aurois faites, si je m'étois servi du calcul des divisions & soudivisions ordinaires, à cause que les numérateurs & dénominateurs sont beaucoup plus grands; donc il est clair aussi qu'on ne gagne rien par le calcul des décimales, & que si l'on paroît éviter d'abord quelques difficultés, on se jette nécessairement dans des plus grandes sur la fin du calcul.

CHAPITRE XII.

DES SECTIONS CONIQUES.

Definitions & Principes.

626. UN espace ABC (*Fig.* 383.) terminé par une courbe ABC toujours concave du même côté, étant donné avec plusieurs lignes droites MN, OP, QR, &c. paralelles entr'elles, & qui se terminent de part & d'autre à la courbe; s'ils se

trouve une ligne droite XZ qui coupe les paralelles chacune en deux également, cette droite XZ ſe nomme *Diamétre* de la courbe quand elle n'eſt pas perpendiculaire ſur les paralelles, & *Axe* quand elle eſt perpendiculaire. Le point B ou la ligne XZ coupe la courbe, ſe nomme *Sommet* du diamétre ou de l'axe; les paralelles MN, OP, &c. ſe nomment *Doubles ordonnées*, leurs moitiés HN, VP, ſont les *Ordonnées*, & les parties BH, BV, &c. du diamétre ou de l'axe compriſes entre le ſommet B, & chaque ordonnée ſont les *Abſciſſes*. Ainſi l'abſciſſe de l'ordonnée HN eſt la droite BH, celle de l'ordonnée VP eſt la droite BV, &c.

Si d'un point quelconque M pris ſur la courbe on mene une ordonnée MH, & une tangente MX qui coupe le diamétre ou l'axe prolongé en X, la partie XH de cet axe ou diamétre compriſe entre la tangente MX, & l'ordonnée MH, ſe nomme la *Soutangente*, & ſi au même point M on élevé ſur la tangente MX une perpendiculaire MY qui coupe l'axe en Y, la partie HY de cet axe compriſe entre l'ordonnée MH, & la perpendiculaire MY, ſe nomme la *Souperpendiculaire*. C'eſt par la connoiſſance de ces lignes & de leurs rapports entr'elles qu'on connoît les proprietés des courbes.

627. Si l'on fait tourner un triangle rectangle ABC (*Fig.* 384.) autour du côté fixe AB, on concevra aiſément qu'il décrira un cône droit ACH, & que ſes élemens DE, FG, &c. paralelles à la baſe CB, décriront des cercles qui auront tous leurs centres ſur la droite AB qui ſera par conſéquent l'axe du cône. Or, delà il ſuit 1°. que ſi d'un point quelconque Q de la circonférence de la baſe du cône, on mene une droite QA au ſommet A, cette droite ſera toute entiere ſur la ſurface du cône, puiſqu'elle ne ſera autre choſe que la droite CA du triangle générateur ABC, lorſqu'en tournant il ſera parvenu à la poſition ABQ. 2°. Qu'en quelque point D qu'on coupe le cône par un plan paralelle à ſa baſe, ce plan ſera un cercle, puiſqu'il ne différera pas du cercle décrit par l'élement DE. 3°. Enfin, que ſi l'on coupe un cône par un plan perpendiculaire ſur la baſe, & qui paſſe par le centre B, la ſection ſera un triangle; car l'axe BA étant perpendiculaire ſur la baſe ſera dans le plan coupant, lequel par conſéquent paſſera par le ſommet A, & la commune ſection du plan coupant, & de la baſe, ſera un diamétre CH de la baſe; ainſi par les points C & H, menant au ſommet les droites CA, CH qui ſeront ſur la ſurface du cône, comme il vient d'être dit, ces droites ſeront avec

le diamétre CH un triangle qui ſera le même que le plan coupant.

628. Si l'on conçoit dans un cône BAC (*Fig.* 385) la ſection triangulaire BAC, dans laquelle ſoit une ligne DE paralelle à l'un des côtés AB, & que l'on vienne à couper le cône par un plan perpendiculaire au triangle & qui paſſe par la ligne DE, la ſection ſera une ſurface plane QDO terminée par une courbe QDO, qu'on nomme *parabole*.

629. *La droite* DE *eſt l'axe de la parabole*. Car ſi l'on coupe le cône & la parabole par une infinité de plans MN, &c. paralelles à la baſe BC du cône, tous ces plans ou cercles ſeront perpendiculaires ſur le triangle BAC, à cauſe que ce triangle eſt perpendiculaire ſur la baſe BC; & comme la parabole eſt auſſi perpendiculaire ſur le même triangle, il s'enſuit que les droites RT, &c. OQ qui ſont les communes ſections des cercles MN, &c. BC, & de la parabole, ſeront perpendiculaires ſur le triangle (*N.* 478), & par conſéquent ſur les droites MN, BC, DE qui ſont dans le plan de ce triangle, & qui ſe coupent aux points S, E par où les perpendiculaires RT, OQ paſſent (*N.* 463); or, MN, &c. BC, ſont les diamétres des cercles, & RT, &c. OQ ſont leurs cordes: donc, puiſque ces cordes ſont perpendiculaires ſur leurs diamétres, elles ſont coupées en deux également en S, &c. E; & par conſéquent la droite DE qui paſſe par tous ces points coupe les droites RT, OQ en deux également, & à cauſe qu'elle leur eſt perpendiculaire, elle eſt leur axe (*N.* 626).

630. *La principale propriété de la parabole eſt, que les quarrés des ordonnées* ST, EQ *ſont entr'eux comme leurs abſciſſes* DS, DE.

Dans les cercles MN, BC, nous avons $\overline{ST}^2 = MS \times SN$ & $\overline{EQ}^2 = BE \times EC$, donc $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$. Mais à cauſe des paralelles AB, DE les paralelles MS, BE ſont égales; donc les rectangles $MS \times SN$ & $BE \times EC$ ayant une dimenſion égale, ſont entr'eux comme les dimenſions inégales SN, EC ainſi nous avons $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: SN . EC$. Mais les triangles ſemblables DSN, DEC donnent SN. EC :: DS. DE. donc $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 ::$ DS. DE

631. Si l'on conçoit dans un cône droit BAC (*Fig.* 386.) la ſection triangulaire BAC avec une droite DE qui coupe les côtés non paralellement à la baſe BC, & qu'on coupe le cône par un

plan perpendiculaire sur le triangle, & qui passe par la droite DE, la section sera une surface plane terminée par une courbe DTPEQR, qu'on nomme *Ellipse*.

Si l'on coupe le cône & l'ellipse par des plans FG, HI &c. paralelles à la base BC, on démontrera comme dans la parabole que les communes sections TR, PQ, &c. de ces plans ou cercles & de l'ellipse, sont perpendiculaires sur la droite DSE qui les coupe en deux également, & qui par conséquent est leur axe. (*N.* 626).

632. *La principale proprieté de l'ellipse est que les quarrés des ordonnées* TS, PO *sont entr'eux comme les rectangles* DS × SE, DO × OE *des parties de l'axe qu'elles coupent.*

A cause des cercles FG, HI nous avons $\overline{TS}^2 = FS \times SG$, & $\overline{PO}^2 = HO \times OI$; donc $\overline{TS}^2 . \overline{PO}^2 :: FS \times SG . HO \times OI$; or, les triangles semblables FSD, HOD donnent FS. HO :: DS. DO, & à cause des triangles semblables GSE, IOE nous avons GS. IO :: SE. OE ; multipliant donc les termes de ces deux proportions les unes par les autres, nous aurons FS × GS. HO × IO :: DS × SE. DO × OE, mais nous venons de trouver $\overline{TS}^2 . \overline{PO}^2 :: FS \times GS :: HO \times IO$, donc $\overline{TS}^2 . \overline{PO}^2 :: DS \times SE . DO \times OE$.

633. Si l'on conçoit dans un cône droit BAC (*Fig.* 387.) la section triangulaire BAC avec une droite DE perpendiculaire à la base BC, & qui soit différente de l'axe, & qu'on coupe le cône par un plan perpendiculaire au triangle & qui passe par la droite DE, la section sera une surface plane terminée par une courbe DQO, qu'on nomme *Hyperbole*.

Si l'on coupe l'hyperbole & le cône par des plans MN, &c. paralelles à la base BC, on démontrera comme dans la parabole que les droites RT, OQ sont perpendiculaires sur DE qui les coupe en deux également, & qui par conséquent est leur axe. (*N.* 626).

Si l'on conçoit un cône XAZ opposé au sommet BAC, & qu'ayant prolongé le côté BA du triangle BAC en Z, on prolonge la droite DE jusqu'à la rencontre de AZ en Z, la partie DZ de cette droite compriſe entre les deux cônes, se nomme *premier Axe de l'hyperbole ;* nous parlerons du second axe dans la suite.

634. *La principale proprieté de l'hyperbole est que les quarrés des ordonnées* ST, EQ *&c. sont entr'eux comme les rectangles* SD × SZ,

ED × EZ *faits ſous les abſciſſes* SD, ED *& les droites* SZ, EZ *qui ſont l'axe* ZD, *prolongé juſqu'aux ordonnées.*

A cauſe des cercles MN, BC nous avons $\overline{TS}^2 = MS \times SN$, & $\overline{QE}^2 = BE \times EC$; donc $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$; mais les triangles ſemblables MSZ, BEZ donnent MS. BE :: SZ. EZ, & à cauſe des triangles ſemblables DSN, DEC, nous avons SN. EC :: DS. DE; multipliant donc les termes de ces deux dernieres proportions les uns par les autres, nous aurons MS × SN. BE × EC :: SZ × DS :: EZ × DE; or, nous venons de trouver $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$; donc $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2 :: SZ \times DS . EZ \times DE$.

Comme il ſeroit trop embarraſſant de déduire les autres propriétés des ſections coniques dans le cône même, nous allons les conſidérer dans un plan.

De la Parabole conſiderée dans un Plan hors du cône.

635. PROBLEME. *Décrire une parabole ſur un plan* (Fig. 388). Je prens une ligne indéfinie AB que je nomme la *Directrice*, ſur le point du milieu C, j'éleve une perpendiculaire indéfinie CS, ſur laquelle je prens à diſcrétion deux parties égales CD, DO & je nomme le point O, *Foyer;* je conçois que ſur tous les points de DS ſoient élevées des perpendiculaires indéfinies MN, PQ, RT, VX &c. je prens avec le compas la diſtance HC de la perpendiculaire PQ à la directrice, & portant l'une des pointes du compas ſur le foyer O, je décris avec cette ouverture un arc qui coupe PQ en deux points P & Q; je prens de même la diſtance LC de la perpendiculaire VX à la directrice, & portant l'une des pointes du compas au foyer O, je décris avec cette ouverture un arc qui coupe la perpendiculaire en deux points V, X; je fais la même choſe à l'égard des autres perpendiculaires, qui par conſéquent me donnent toutes deux points également éloignés de CS, à l'exception de la droite MN qui ne me donne que le point D, à cauſe que ſa diſtance DC à la directrice étant égale à la diſtance OD, l'arc que je décrirois avec cette diſtance en prenant le foyer pour centre, ne fait que toucher cette perpendiculaire MN en D ſans la couper, & quand aux autres perpendiculaires telles que EF qui couperoient la partie CD, il eſt clair qu'en pre-

nant leurs distances GC à la directrice, & prenant pour centre le foyer, l'arc décrit avec cette ouverture, ne couperoit point la perpendiculaire à cause de OG plus grand que GC. Faisant donc passer une courbe ZVRPDQTXY par tous les points trouvés, l'axe de cette courbe est la droite DS, ses ordonnées sont les droites PH, RO, &c. & ses abscisses sont les droites DH, DO &c. il reste donc à faire voir que cette courbe est une parabole.

Il y a ici deux sortes d'ordonnées, les unes VL, ZK, &c. qui sont en dessous du foyer, & les autres telles que PH qui sont entre le foyer O & le sommet D. Commençons par les premieres.

Je mene du foyer O la droite OV (*Fig.* 389.) à l'extrêmité de l'ordonnée VL; ce qui me donne un triangle rectangle VOL, dans lequel j'ai $\overline{VL}^2 = \overline{VO}^2 - \overline{OL}^2$ & à cause de VO = LC, par la construction, j'ai $\overline{VL}^2 = \overline{LC}^2 - \overline{OL}^2$, & faisant le quarré LB de LC, & le quarré LR de LO, j'ai le quarré $\overline{VL}^2$ égal au gnomon ou équerre CBFIRO; or, la ligne CL est divisée en deux parties CO, OL, le gnomon contient le quarré RB de la partie CO, plus, deux rectangles égaux CR, RF des parties CO, OL; (*N.* 140.) ainsi coupant le quarré RB en deux également par la droite MN paralelle à RE, & donnant la moitié de ce quarré à chacun des deux rectangles; le gnomon sera égal à deux fois le rectangle IMNF, c'est-à-dire à IM multiplié par deux fois IF; or, IM = DL; car à cause de HR égal à CO, & du point M qui divise HR en deux également, de même que CO est divisé en deux également en D, on a DO = MR & DO + OL = MR + RI = MI, & IF égal à OC à cause de LC = LF & de LI = LO; donc le rectangle IMNF = DL × OC, & par conséquent 2IMNF = DL × 2OC; c'est-à-dire le gnomon ou le quarré de l'ordonnée VL, est égal à l'abscisse correspondante DL multipliée par 2 fois la distance OC du foyer à la directrice, ou par 4 fois la distance OD du foyer au sommet. Or, je prouverai de la même façon que le quarré de l'ordonnée ZY est égal à son abscisse DY multipliée par 4 fois la distance OD, donc les quarrés des ordonnées VL, ZV, &c. sont entr'eux comme leur abscisses, DL, DV, &c. multipliées chacune par 4OD, & par conséquent comme leur abscisses, à cause du multiplicateur commun 4OD.

Maintenant, soit une ordonnée PM (*Fig.* 390.) entre le foyer O & le sommet D; je mene du foyer O la droite OP, & dans

le triangle rectangle PMO, j'ai $\overline{PM}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{MO}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{MO}^2$; car par la conſtruction, j'ai PO = MC; je fais le quarré CH de CM, & prenant CL = MO, je fais le quarré CR, & par conſéquent le quarré $\overline{PM}^2$ eſt égal au gnomon MHASRL qui contient le quarré RH de la partie LM, & deux rectangles AR, RM des parties CL, LM; je diviſe le quarré RH en deux également par la ligne QX, & donnant la moitié de ce quarré à chaque rectangle, le gnomon ou le quarré PM eſt égal à 2 fois le rectangle SXQA ou à 2SX × SA; mais SA = LM, & LM = 2MD, à cauſe de DO = DC, & de MO = CL; donc le quarré $\overline{PM}^2$ = 2SX × 2MD = 4SX × MD, c'eſt-à-dire le quarré de l'ordonnée PM égal à ſon abſciſſe MD multipliée par 4SX ou 4CD ou 4DO; ainſi le quarré de l'ordonnée PM eſt au quarré de l'ordonnée VE, qui eſt au-deſſous du foyer, comme l'abſciſſe DM multipliée par 4DO, eſt à l'abſciſſe DE multipliée par 4DO, ou comme DM eſt à DE; donc la courbe eſt une parabole (*N.* 630.).

636. La droite égale à 4DO, ſe nomme *Parametre* de l'axe.

637. COROLLAIRE Ier. *La droite* MN (Fig. 388.) *paralelle aux ordonnées, & qui paſſe par le ſommet* D, *eſt tangente de la parabole*; car tous les autres points de la parabole ſont au-deſſous de cette droite par la conſtruction.

Nota. Que lorſqu'on veut conſtruire une parabole par pluſieurs points, cette parabole ſera d'autant plus exacte que les perpendiculaires PQ, RT, &c. (*Fig.* 388.) ſeront plus proches entre-elles.

638. COROLLAIRE II. *Du foyer* O (Fig. 391.) *étant menée une droite* OS *qui coupe la parabole en un point quelconque* V. *Je dis* 1°. *Que ſi du point* V, *on mene une perpendiculaire* VT *ſur la directrice, cette perpendiculaire* VT *ſera toujours égale à la droite* VO, *compriſe entre la courbe & le foyer.* 2°. *Que ſi du point* X *de la droite* SO *pris entre la courbe & le foyer, on mene une perpendiculaire* XH *ſur la directrice, cette perpendiculaire ſera plus grande que la droite* XO *compriſe entr'elle & le foyer.* 3°. *Enfin qne ſi du point* S *de la droite* OS *pris hors de la courbe, on mene une perpendiculaire* SA *ſur la directrice, cette perpendiculaire* SA *ſera plus courte que la droite* SO *compriſe entr'elle & le foyer.*

Du point V je mene l'ordonnée VE à l'axe, & par la conſtruction de la parabole, j'ai EC = OV; mais à cauſe des paralelles,

les; j'ai EC = VT; donc VT = VO : ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Du point X je mene XR perpendiculaire sur TV; dans le triangle rectangle VRX, l'hypoténuse XV est plus grande que le côté RV; or nous avons TV = VO, donc TV — VR, c'est-à-dire TR est plus grand que VO — VX, c'est-à-dire que XO; mais TR = HX; donc HX est plus grande que XO : ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Du point V je mene VM perpendiculaire sur SA, & dans le triangle rectangle SMV, j'ai MS plus petite que SV; or, nous avons TV ou AM = VO; donc AM + MS est plus petite que VO + VS, c'est-à-dire AS plus petite que SO : ce qu'il falloit 3°. démontrer.

639. Corollaire III. Donc, 1°. quand la perpendiculaire VT menée sur la directrice, est égale à VO, le point V est sur la courbe. 2°. Quand la perpendiculaire XH est plus grande que XO, le point X est entre la courbe & le foyer. 3°. Quand la perpendiculaire SA est moindre que SO, le point S est hors de la courbe.

640. Probleme. *D'un pint donné* P (Fig. 392.) *pris sur la courbe d'une parabole hors du sommet* A *de l'axe, mener une tangente à la parabole.*

Du point P je mene l'ordonnée PS, la droite PR perpendiculaire sur la directrice, la droite PO au foyer O, & joignant la droite RO, que je divise en deux également en H; je mene par les points P, H la droite PHT qui est la tangente demandée.

Car si on veut que la droite PT touche la courbe en quelqu'autre point, ce point sera, ou entre P & T comme en M, ou en delà comme en Z; supposé donc qu'il soit en M, je mene du point M la droite MO au foyer, la droite MR au point R, & la droite MV perpendiculaire sur la directrice. Le triangle RPO est isoscele; car PR = NS à cause des paralelles, & PO = NS par la construction de la parabole; or la droite PH étant perpendiculaire sur le milieu de RO, tous ses points tels que M sont également éloignés de R & O; donc RM = MO, & le triangle RMO est isoscele; mais dans le triangle rectangle RVM, l'hypothenuse RM est plus grande que le côté MV; donc MO est aussi plus grand que MV, & par conséquent le point M est hors de la parabole (*N.* 639.). On

prouvera de la même façon que le point Z eſt hors de la parabole. Donc la droite ZT ne touche la parabole qu'en P.

641. COROLLAIRE Ier. *La ſoutangente* TS *eſt coupée en deux également au ſommet* A *de l'axe.* Les triangles rectangles PRH, THO ſont ſemblables & égaux, à cauſe de l'angle aigu RPT, égal à ſon alterne PTO, ce qui rend les trois angles égaux chacun à chacun, & du côté RH égal au côté HO; donc PR = TO; mais PR = NS, donc TO = NS, & retranchant de TO la partie AO, & de la droite NS la partie NA = AO par la conſtruction de la parabole, j'ai TA = AS.

642. COROLLAIRE II. Donc pour mener une tangente d'un point P, il n'y a qu'à mener l'ordonnée, puis prolonger l'axe au-delà du ſommet juſqu'à ce que TA ſoit égal à AS, & mener la droite PT qui ſera la tangente demandée.

643. COROLLAIRE III. *Si ſur le point d'attouchement* P *on éleve la droite* PL *perpendiculaire ſur la tangente, la ſouperpendiculaire* SL *eſt égale à la moitié du paramétre.* La droite RO étant perpendiculaire ſur la tangente eſt par conſéquent paralelle & égale à PL à cauſe des paralelles PR, LN, & la droite RN eſt auſſi égale à PS; donc les triangles rectangles PSL, RNO ſont ſemblables & égaux & SL = NO, mais NO eſt la moitié du paramétre (*N.* 636.); donc la ſouperpendiculaire SL eſt égale à la moitié du paramétre.

644. COROLLAIRE IV. *Toutes les tangentes qu'on peut mener de tous les points de la parabole ſont inclinées entr'elles, & ſe coupent entre les points d'attouchement.*

Soient les points d'attouchement H, Q (*Fig.* 393.) pris l'un à gauche & l'autre à droite de l'axe; je mene les ordonnées HS, QE, & faiſant AB = AS, & AC = AE, la tangente au point H ſera HB, & la tangente au point Q ſera QC (*N.* 642.); ainſi comme ces deux tangentes ſont inclinées ſur l'axe; il eſt clair qu'en prolongeant la plus courte HB, elle coupera l'autre en un point D qui ſera entre les points d'attouchement H, Q.

De même ſoient les points d'attouchement H, P pris du même côté de l'axe; menant les ordonnées HS, PN, & faiſant BA = AS, & AT égal à AN, la tangente du point H ſera BH ou BX, & la tangente du point P ſera PT; or, PT ne peut aller aboutir en T qui eſt plus éloigné du ſommet A que le point B ſans couper BX, & elle ne peut couper BX entre B & H; par exemple, en R, car ſi cela étoit, il faudroit qu'elle paſſât entre l'axe & le point

d'attouchement H, & par conſéquent elle couperoit la parabole, & ne ſeroit plus tangente ; donc il faut néceſſairement qu'elle coupe BX en quelque point M entre les points d'attouchemens P & H.

645. COROLLAIRE V. *Une tangente* PT (Fig. 394.) *ne peut toucher la parabole en deux points.* Si l'on veut que PT touche la parabole en P & R, la droite PR menée entre ces deux points ſera la plus courte qu'on puiſſe mener ; or, l'arc parabolique PR eſt courbe, & comme par la formation de la parabole dans le cône, ſa concavité eſt toujours tournée vers l'axe, la droite PR doit paſſer entre l'axe & la courbe ; donc PR doit couper la courbe au lieu de la toucher, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

646. COROLLAIRE VI. *D'un même point* P (Fig. 395.) *on ne peut mener deux tangentes.* Si on veut qu'on puiſſe en mener deux, la ſeconde tangente coupera l'axe en un point C plus près du ſommet A que le point T où la premiere tangente PT la coupe, ou en un point S plus éloigné. Suppoſons donc qu'elle la coupe en C. Je prens AN = CA ; du point N, je mene l'ordonnée NQ, & du point Q par le point C, je mene la droite QC qui ſera tangente en Q, puiſque la ſoutangente NC eſt double de l'abſciſſe AN (*N.* 641.) ; & CQ prolongée coupera PT en un point M entre les points d'attouchement P, Q (*N.* 644.). Or, la ſeconde tangente menée du point P au point C, paſſera néceſſairement entre M & Q ; car autrement elle entreroit dans la parabole ; ainſi elle coupera CM entre M & Q, & enſuite en Q, ce qui n'eſt pas poſſible ; & on démontreroit la même choſe, ſi la ſeconde tangente coupoit l'axe en S.

647. PROPOSITION CXXIV. *Toutes les lignes* DK (Fig. 396.) *paralelles à l'axe* AB *coupent la parabole, & ne la coupent qu'en un point, & toutes les lignes* RT *qui ne ſont pas paralelles à l'axe, & qui coupent la parabole en un point, la coupent encore en un autre point.*

Les quarrés des ordonnées étant entr'eux comme leurs abſciſſes, il eſt clair qu'à meſure que les abſciſſes ſont plus grandes, les quarrés des ordonnées ſont plus grands, & par conſéquent les ordonnées ſont auſſi plus grandes. Ainſi la courbe de la parabole s'éloigne de plus en plus de ſon axe ; or, la diſtance DN de la ligne DK à l'axe, quelque grande qu'elle ſoit, eſt toujours la même, à cauſe du paralelliſme ; donc il ſe trouvera toujours quelque ordonnée OF égale à DN, & par conſéquent DK cou-

pera la parabole en O, après quoi les autres ordonnées croiſſant toujours, la courbe s'éloignera de plus en plus de DK, qui par conſéquent ne la coupera plus ; ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Par la ſuppoſition la ligne RT eſt oblique à l'axe & coupe la parabole en R. Or, de tous les points H, X, &c. de l'arc parabolique indéfini RHXP, on peut mener des tangentes MHN, SXQ, &c. & ces tangentes ſont toutes diverſement inclinées, de façon que les inférieures SXQ coupent les ſupérieures MHN (*N.* 644.) ; ainſi les angles NHE, QXF, &c. qu'elles font avec les ordonnées HE, XF menées des points d'attouchement H, X, &c. vont en augmentant à meſure que les points d'attouchement s'éloignent du ſommet A de la parabole. Donc il faut néceſſairement qu'il ſe trouve quelque tangente, telle que QXS, qui faſſe avec l'ordonnée XF un angle QXF, plus grand que l'angle que la ligne RT fait avec la même ordonnée ; or, en ce cas les droites QXS, RTS n'étant pas paralelles, ſe couperont en quelque point S, & ce point ſera hors de la parabole, à cauſe que QXS eſt tangente ; donc la ligne RT qui entre dans la parabole en R, & qui viendra couper la tangente QXS en S, doit néceſſairement couper la parabole en un autre point T.

648. DEFINITION. Toute ligne DK paralelle à l'axe AB (*Fig.* 396.), ſe nomme *Diamétre* de la parabole, à cauſe qu'on peut toujours trouver une infinité de lignes paralelles entr'elles, & terminées de part & d'autre à la courbe, leſquelles ſeront coupées chacune en deux également par la ligne DK, comme il ſera démontré plus bas.

649. PROPOSITION CXXV. *L'axe* AB (Fig. 397.) *un diamétre* PR, *& leurs tangentes* AP, NT *aux ſommets* A, N *étant donnés, le triangle* TOA *fait par ces tangentes & l'axe, eſt égal au triangle* PON *fait par les mêmes tangentes & le diamétre.*

Les triangles rectangles TOA, PON ſont ſemblables, à cauſe de l'angle aigu PNT, égal à ſon alterne NTA ; mais en menant du point N l'ordonnée NB à l'axe, on a PN = AB, & nous avons auſſi AB = AT (*N.* 641.) ; donc le côté AB étant égal au côté AT, les deux triangles ſont non-ſeulement ſemblables, mais encore égaux.

650. COROLLAIRE. *Le rectangle* PANB *fait par la tangente* PA, *& l'ordonnée* NB, *avec l'axe & le diamétre eſt égal au triangle* NTB *fait par l'autre tangente avec l'ordonnée* NB, *& ſa ſoutangente.* Car ſi à chacun des triangles égaux TOA, PON, on ajoute le quadrilatére OANB, on aura PANB = NTB.

651. Cette Propoſition & ſon Corollaire ſont le fondement de preſque tout ce que nous allons dire, & par conſéquent il faut y faire attention. Il faut auſſi remarquer que les tangentes NT, AP compriſes entre l'axe & le diamétre ſont coupées chacune également au point O; car les triangles TOA, PON ſemblables & égaux donnent NO = OT, & PO = OA.

652. PROPOSITION CXXVI. *L'axe* AB (Fig. 398.) *un diamétre* PR *& leur tangente* AP, NT *aux ſommets* A, N *étant donnés, ſi d'un point quelconque* S *pris ſur la courbe on mene deux droites* ZSX, CD, *paralelles aux tangentes, il ſe formera deux triangles, l'un* SZD *avec l'axe, & l'autre* CSV *avec le diamétre; & je dis* 1°. *Que le triangle* SZD *fait par les paralelles & l'axe eſt égal au rectangle* PADC *fait par la tangente de l'axe & ſa paralelle entre l'axe & le diamétre.* 2°. *Que le triangle* CSV *fait par les mêmes paralelles & le diamétre eſt égal au paralellogramme* NTZV *fait par la tangente du diamétre & ſa paralelle compriſes entre l'axe & le diamétre.*

Commençons par le triangle fait avec l'axe; mais auparavant il faut remarquer, 1°. Que le point d'où l'on mene les paralelles peut-être pris entre le diamétre & l'axe comme le point S, & alors le triangle fait par les paralelles & l'axe eſt ZSD, 2°. Que ce point peut être pris en-delà du diamétre comme le point X, auquel cas le triangle par les paralelles XZ, XB, & l'axe eſt ZXB; 3°. enfin, que ce point peut être pris au-delà de l'axe comme le point E, & alors le triangle fait par les paralelles DC, DH, & l'axe eſt DEH. Cela poſé.

Si le point eſt en S, je ſçais que le triangle TNQ eſt égal au rectangle PAQN (*N.* 650); or à cauſe des paralelles NT, SZ & NQ, SD, ces deux triangles ſont ſemblables & ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues NQ, SD; donc TNQ, ZSD :: $\overline{NQ}^2$, $\overline{SD}^2$; mais NQ, SD étant ordonnées à l'axe, nous avons $\overline{NQ}^2$, $\overline{SD}^2$ :: QA, DA. Donc TNQ, ZSD :: QA, DA, & multipliant les deux derniers termes par la même grandeur AP, nous aurons TNQ, ZSD :: QA × AP, DA × AP; or QA × AP = PAQN & DA × AP = PADC; donc TNQ, ZSD :: PAQN, PADC, mais TNQ = PAQN; donc ZSD = PADC.

De même ſi le point d'où l'on mene les paralelles eſt X, le triangle TNQ eſt ſemblable au triangle ZXB fait par les para-

lelles ZX, XB & l'axe; donc on aura encore TNQ, ZXB :: $\overline{\text{NQ}}^2$, $\overline{\text{XB}}^2$ :: QA, BA :: QA × AP, BA × AP :: PAQN, PABR; or TNQ = PAQN; donc ZXB = PABR.

Enfin ſi le point d'où l'on mene les paralelles eſt E, le triangle TNQ eſt encore ſemblable au triangle DEH fait par les paralelles & l'axe, à cauſe de l'angle aigu NTH égal à ſon alterne THE; donc on aura encore TNQ, DEH :: $\overline{\text{NQ}}^2$, $\overline{\text{DE}}^2$ :: QA, DA :: QA × AP, DA × AP :: PAQN, PADC; or TNQ = PAQN; donc DEH = PADC. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Venons au triangle fait avec les paralelles & le diamétre; 1°. Si le point d'où l'on mene les paralelles eſt S, le triangle eſt CSV; or je dis: le triangle TNQ eſt égal au rectangle PAQN, & retranchant du triangle TNQ, le triangle ZSD, & du rectangle PAQN, le rectangle PADC égal au triangle ZSD, comme on vient de voir, il reſte TNLZ + SLQD = CDNQ, & retranchant la partie commune SLQD, il reſte TNLZ = CSLN, & ajoutant de part & d'autre le triangle NLV, nous aurons TNVZ = CSV.

2°. Si le point d'où l'on mene les paralelles eſt X, le triangle fait avec les paralelles, & le diamétre eſt VXR. Or nous avons trouvé ZXB = PABR, retranchant donc du triangle ZXB, le triangle ZSD, & du rectangle PABR, le rectangle PADC = ZSD, nous aurons SDBX = CDBR, & retranchant la partie commune SDBRV, nous aurons XVR = CSV, mais CSV = NTZV donc XVR = NTZV.

3°. Enfin, ſi le point d'où l'on mene les paralelles eſt E, le triangle fait avec les paralelles, & le diamétre ſera EKC; or le triangle EDH fait par les mêmes paralelles avec l'axe eſt égal à PADC; donc le triangle EKC = PAHK, & retranchant du ſecond membre le triangle PNO, & lui donnant en ſa place le triangle TOA = PON (*N.* 649) nous aurons EKC = NTHK, ce qu'il falloit en ſecond lieu démontter.

653. COROLLAIRE. *Toute ligne* SX *paralelle à une tangente* NT *& terminée de part & d'autre à la courbe parabolique, eſt diviſée en deux également en* V *par le diamétre* PR *qui paſſe par le point d'attouchement.* Nous venons de trouver le triangle CSV égal au triangle XVR (*N.* 652.) or ces deux triangles ſont ſemblables à cauſe des angles oppoſés au ſommet égaux, &

de l'angle aigu VXR égal à ſon alterne VSC; donc les côtés de ce triangle ſont égaux, & nous avons SV = VX.

Nota. On a donc eu raiſon de dire (*N.* 648) que toute ligne PR paralelle à l'axe eſt un diamétre; car en quelque point N que cette ligne coupe la courbe, on n'aura qu'à mener une tangente par ce point, & des paralelles à cette tangente compriſes entre la courbe, & l'on prouvera toujours que PR eſt un diamétre; d'où il ſuit que tous les diamétres ſont paralelles à l'axe.

654. COROLLAIRE II. *Donc les moitiés de toutes les lignes telles que* SV *paralelles à une tangente* NT *ſont les ordonnées du diamétre* PR *qui paſſe par le point d'attouchement* (*N.* 626.)

655. COROLLAIRE III. *Les quarrés des ordonnées à un diamétre ſont entr'eux comme les abſciſſes de ce diamétre.*

Soit le diamétre PR (*Fig.* 399.) l'axe AB, les tangentes NT, AP & les droites SM, EH ordonnées au diamétre PR; je prolonge ces ordonnées juſqu'à l'axe, & des points S, E je mene des droites SI, EL paralelles à la tangente AP. Le triangle ISM fait par deux paralelles aux tangentes & par le diamétre, eſt donc égal au paralellogramme NTOM (*N.* 652.) & par la même raiſon le triangle LEH eſt égal au paralellogramme NTQH; donc ISM, LEH :: NTOM, NTQH; mais à cauſe de la ſimilitude des triangles ISM, LEH, nous avons ISM, LEH :: $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$; donc $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NTOM, NTQH; mais ces deux derniers termes ou paralellogrammes étant entre mêmes paralelles PR, TB, ſont entr'eux comme leur baſes NM, NH; donc $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NM, NH.

656. PROPOSITION CXXVII. *Si l'on cherche une troiſiéme proportionnelle à une Abſciſſe* NM (Fig. 399.) *d'un diamétre* PR *& à ſon ordonnée* MS, *les quarrés des ordonnées à ce diamétre ſeront égaux à leurs Abſciſſes multipliées par cette troiſiéme proportionnelle.*

Nous avons $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NM, NH (*N.* 655.); nommant donc la troiſiéme proportionnelle x, & multipliant les deux Abſciſſes par la même grandeur x, nous aurons encore $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$. :: NM × x. NH × x; mais à cauſe de la proportion continue :: NM. MS. x, nous avons $\overline{MS}^2$ = NM × x, c'eſt-à-dire

les deux antécedens $\overline{MS}^2$, $NM \times x$ de la proportion $\overline{MS}^2 . \overline{HE}^2 :: NM \times x . NH \times x$ ſont égaux ; donc les deux conſéquens $\overline{HE}^2$, $NH \times x$ ſont auſſi égaux.

657. La troiſiéme proportionnelle à l'abſciſſe NM, & à l'ordonnée MS d'un diamétre PR, ſe nomme le *Paramétre* de ce diamétre, à cauſe que cette proportionnelle multipliant l'abſciſſe, fait un produit égal au quarré de l'ordonnée, de même qu'à l'égard de l'axe, le produit de l'abſciſſe par le paramétre eſt égal au quarré de l'ordonnée.

658. COROLLAIRE Ier. *Le paramétre d'un diamétre ayant été pris troiſiéme proportionnel à une abſciſſe* NM, *& à ſon ordonnée* MS, *eſt auſſi troiſiéme proportionnel à une autre abſciſſe quelconque* NH, *& à ſon ordonnée* HE. Car nommant ce paramétre x, nous avons $\overline{HE}^2 = NH \times x$ (*N.* 656.); donc :: NH. HE. x.

659. COROLLAIRE II. *Si du ſommet* N *d'un diamétre* PR (Fig. 400.), *on mene une ordonnée* NB *à l'axe, le paramétre du diamétre* PR *ſera égal au paramétre de l'axe, plus quatre fois l'abſciſſe* AB *de cet axe.* Du ſommet A, je mene l'ordonnée AR au diamétre PR; ainſi le paramétre du diamétre ſera une troiſiéme proportionnelle à l'abſciſſe NR, & à l'ordonnée AR; mais à cauſe des paralelles NT, RA, & NR, TA; nous avons NR = TA, & AR = NT; donc le paramétre du diamétre ſera troiſiéme proportionnelle à la moitié TA de la ſoutangente TB, & à la tangente NT, & par conſéquent :: TA. TN. x; d'où je tire $\overline{TN}^2 = TA \times x$; mais à cauſe du triangle rectangle NTB; j'ai $\overline{TN}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{TB}^2 = AB \times 4AO + 4\overline{TA}^2 = TA \times 4AO + 4\overline{TA}^2$; car TA = BA (*N.* 641.), & par la proprieté de la parabole $\overline{NB}^2 = AB \times 4AO = TA \times 4AO$, en ſuppoſant que le point O ſoit le foyer; comparant donc enſemble les deux valeurs de $\overline{TN}^2$; j'ai $TA \times x = TA \times 4AO + 4\overline{TA}^2$; & diviſant tout par TA, le quotient eſt $x = 4AO + 4TA = 4AO + 4AB$, c'eſt-à-dire le paramétre du diamétre PR eſt égal à 4AO ou au paramétre de l'axe, plus quatre fois l'abſciſſe AB.

660. COROLLAIRE III. *Si du ſommet* N *d'un diamétre* PR (Fig. 400.), *on mene la droite* NO *au foyer, cette droite ſera le quart du paramétre du diamétre* PR, *de même que la droite* AO *menée du ſommet*

ſommet de l'axe au foyer, eſt le quart du paramétre de l'axe.

Je mene la directrice PQ, & j'ai NO = LB = AB + LA; c'eſt-à-dire NO égal à l'abſciſſe AB de l'axe, plus le quart du paramétre de cet axe. Mais le paramétre du diamétre eſt égal à 4 fois l'abſciſſe AB, plus le paramétre ou 4LA (*N.* 659.); donc le paramétre du diamétre eſt quadruple de NO.

661. COROLLAIRE IV. *L'angle* ONT *fait par la droite* NO *menée du ſommet* N *du diamétre* PR *au foyer* O, *avec la tangente* NT *eſt égal à l'angle* XNR *fait par la même tangente avec le diamétre* PR.

Du point P où le diamétre PR coupe la directrice; je mene au foyer la droite PO; ainſi la tangente NT coupe PO en Z en deux également (*N.* 640.), & à cauſe des triangles ſemblables & égaux PZN, TZO, j'ai PN = TO; mais PN = LB = NO par la conſtruction de la parabole; donc NO = TO; & par conſéquent le triangle NOT étant iſoſcele, l'angle TNO eſt égal à l'angle NTO; mais celui-ci eſt égal à l'angle XNR, à cauſe des paralelles PR, TB; donc l'angle ONT eſt égal à l'angle XNR.

662. PROPOSITION CXXVIII. *Deux diamétres, ou l'axe & deux diamétres étant donnés avec leurs tangentes* PO, OM (Fig. 401.), *ſi l'on mene d'un point d'attouchement à l'autre la droite* PM, *& qu'on la diviſe en deux également en* V, *la droite* OV *qui paſſera par le point* V, *& par le point* O *où les deux tangentes ſe coupent, ſera le diamétre de la droite* PM *& de ſes paralelles.*

La droite PM & ſes paralelles ont néceſſairement un diamétre, car les tangentes en nombre infini qu'on peut mener ſur tous les points de l'arc parabolique PM, étant toutes diverſement inclinées entr'elles, il faudra bien qu'il y en ait quelqu'une qui ſoit paralelle à la droite PM, & par conſéquent du point d'attouchement de cette tangente, menant une ligne paralelle à l'axe, cette ligne coupera PM, & ſes paralelles chacune en deux également (*N.* 653.). Si l'on veut donc que la ligne OV qui coupe PM, ne coupe pas les paralelles à PM auſſi en deux également; il y aura donc quelqu'autre ligne qui paſſera par le point V, & qui diviſera les paralelles en deux également, & cette ligne prendra ſa direction ou à droite ou à gauche du point O où les tangentes PO, MO ſe coupent, lequel point eſt entre les points P, M d'attouchement (*N.* 644.); ſuppoſons donc que ce ſoit la ligne VL, du point L, je mene la droite LP, laquelle coupera la parabole, à cauſe que PO qui paſſe par le même point P eſt tangente; ainſi

PL aura une partie PE dans la parabole. Je mene une droite ST paralelle à PM, & qui coupe PE en un point R, & je prolonge ST en H. Les triangles ſemblables LPV, LRK, donnent PV. RK :: VL. KL; & à cauſe des triangles ſemblables LVM, LKH, j'ai VM. KH :: VL. KL, donc PV. RK :: VM. KH; or, PV = VM; donc RK = KH, mais SK eſt plus grand que RK, & au contraire KT eſt moindre que KH; donc SK eſt plus grand que KT, & par conſéquent la droite LV qui diviſe PM en deux parties égales, ne diviſe pas en deux également la droite ST paralelle à PM; d'où il ſuit qu'elle n'eſt pas un diamétre.

On démontrera de la même façon que toute autre ligne qui paſſera par le point V, & qui prendra ſa direction entre P & O, ne ſera pas un diamétre; donc puiſqu'il doit y en avoir un, il faut néceſſairement que ce ſoit la droite VO.

663. COROLLAIRE. La droite VO menée du point O où les tangentes ſe coupent, ſur le milieu de la droite PM qui joint les points d'attouchement eſt paralelle aux diamétres PZ, MN; car tous les diamétres d'une parabole doivent être paralelles à l'axe (*N.* 648, 653.), & par conſéquent paralelles entr'eux.

664. *REMARQUE.* Tout ce que nous avons dit (*N.* 649, 650, & 652.), à l'égard de l'axe & d'un diamétre peut ſe démontrer auſſi à l'égard de deux diamétres par le moyen de la Propoſition précédente.

Soit par exemple, les deux diamétres PZ, MN (*Fig.* 402.); & leurs tangentes PT, MD qui ſe coupent en O; je mene la droite PM, que je diviſe en deux également en V; je mene auſſi la droite VO, laquelle étant un diamétre (*N.* 662.) eſt paralelle aux deux diamétres PZ, MN; du point P, je mene PN paralelle à la tangente MD, & du point M la droite MZ paralelle à la tangente PT, & par conſéquent PN eſt ordonnée au diamétre MN, & MZ eſt ordonnée au diamétre PZ; & la figure POMR eſt un paralellogramme. Or, la diagonale PM eſt diviſée en deux également en V par la droite OV; donc cette droite OV étant prolongée doit être l'autre diagonale, & paſſer par le point R. Ainſi à cauſe des paralelles PT, ZM les paralelles PZ, OR, TM ſont égales, c'eſt-à-dire OR eſt égale à chacune des droites PZ, TM; & à cauſe des paralelles DM, PN la droite OR eſt auſſi égale à chacune des droites PD, NM; d'où il ſuit que les quatre lignes TM, MN, PD, PZ ſont égales.

Donc 1°. A cauſe de TM = MN, la ſoutangente TN du diamétre MN eſt diviſée en deux également au ſommet M de ce diamétre, & par conſéquent elle eſt double de l'abſciſſe MN, & à cauſe de DP = PZ, la ſoutangente DZ du diamétre PZ eſt double de l'abſciſſe PZ.

Donc 2°. Les triangles DOP, TOM faits par les tangentes & les diamétres ſont égaux, car ces triangles ſont ſemblables, & le côté PD eſt égal au côté TM.

Donc 3°. Le triangle PTN fait par la tangente PT, par la ſoutangente TN & par l'ordonnée PN au diamétre MN, eſt égal au paralellogramme MNPD fait par la même ordonnée PN & par la tangente MD du même diamétre MN compriſes entre les deux diamétres. Car ſi à chacun des triangles égaux TOM, DOP on ajoute la partie commune OPNM, on aura PTN = MNPD. & on démontrera de même que MDZ = PZMT.

Donc 4°. Si d'un point quelconque S (*Fig.* 403.) pris ſur la courbe, on mene XR, LH paralelles aux deux tangentes TP, MD, le triangle HSR faits par les deux paralelles avec le diamétre MN, eſt égal au paralellogramme MDXR fait par la tangente MD de ce diamétre, & ſa paralelle compriſe entre les deux diamétres. Car menant du point P l'ordonnée PN, nous aurons TPN=MDPN, comme on vient de voir : or, les triangles TPN, HSR étant ſemblables, nous avons TPN. HSR :: $\overline{PN}^2$. $\overline{SR}^2$, mais PN, SR étant ordonnées au diamétre MN, donnent $\overline{PN}^2$. $\overline{SR}^2$ :: MN. MR, donc TPN. HSR :: MN. MR ; mais les paralellogrammes MNPD, MRXD étant entre deux paralelles, ſont entr'eux comme leur baſe MN. MR, donc TPN. HSR :: MNPD. RXD, or, TPN = MNPD, donc HSR = MRXD.

Et on prouvera de même que l'autre triangle XSL fait par les deux paralelles, & l'autre diamétre eſt égal au paralellogramme fait par la tangente PT de ce diamétre, & par ſa paralelle compriſes entre les diamétres ; car de l'autre point d'attouchement M menant l'ordonnée MZ au diamétre PZ ; les triangles ſemblables DMZ, XSL ſeront entr'eux comme les quartés de leurs baſes ou des ordonnées MZ, SL, & par conſéquent comme les abſciſſes PZ, PL, ou comme les paralellogrammes PTMZ, PTHL qui ſont dans la même raiſon que leurs baſes PZ, PL, à cauſe qu'ils ſont entre deux paralelles ; donc on aura DMZ. XSL :: PTMZ. PTHL. mais DMZ = PTMZ, donc XSL = PTHL.

Et on prouvera la même choſe en quelque point de la courbe que ſoit le point δ.

665. COROLLAIRE. *Dans la parabole, deux tangentes* PT, DM (Fig. 403.) *qui ſe coupent en allant aboutir aux diamétres oppoſés, ſe coupent chacune en deux parties égales*, car les triangles DOP, TOM étant ſemblables & égaux, on a PO = OT, & DO = OM.

666. PROPOSITION. CXXIX. *Deux diamétres* PZ, MN (Fig. 404.) *étant donnés avec leurs tangentes* PT, MD, *ſi l'on prend ſur la courbe deux points* R, S, *entre les deux ſommets* P *&* M, *& que de chacun de ces points on mene des droites* RL, RC, SH *ou* IH, SE *ou* XE, *paralelles aux tangentes, le trapezoïde* QCES *fait avec le diamétre* MN, *par les deux paralelles* QC, SE *qui le coupent, & par la plus proche* HS *des deux autres, eſt égal au trapezoïde* LRQH *fait avec l'autre diamétre* PZ *par les deux paralelles* QH, RL *qui le coupent, & par la plus proche* RC *des deux autres.*

A cauſe que RC, LN ſont paralelles aux tangentes, nous avons CRN = NMDL (*N.* 664.) & retranchant de part & d'autre la partie commune RBMN, nous aurons CBM = BDLR; de même à cauſe des droites HI, SE paralelles aux tangentes, nous avons ESI = IHDM, & retranchant de part & d'autre la partie commune SVMI, nous aurons EVM = VDHS, & par conſéquent CBM — EVM = BDLR — VDHS; mais CBM — EVM = CBVE; donc CBVE = BDLR — VDHS, ou CBVE + VDHS = BDLR, & retranchant de part & d'autre la partie commune VDHS, nous aurons enfin CQSE = HQRL.

667. COROLLAIRE. Si on ajoute à chacun des trapezoïdes égaux CQSE, HQRL le petit paralellogramme QRXS, nous aurons CRXE = HSXL, c'eſt-à-dire : *le trapezoïde* CRXE *fait avec le diamétre* MN *par les paralelles* RC, XE *qui le coupent, & par la plus éloignée* XL *des deux autres paralelles, eſt égal au trapezoïde* HSXL *fait avec l'autre diamétre par les paralelles* HS, LX *qui le coupent; & par la plus éloignée* XE *des deux autres.*

Nota. Cette propoſition & ſon Corollaire ſont d'une grande utilité dans les trois ſections coniques, comme on va voir dans les propoſitions ſuivantes touchant la parabole, & dans celles que nous donnerons touchant l'ellipſe & l'hyperbole.

668. PROPOSITION CXXX. *Si deux droites* SX, RY (Fig. 405. 406. 407.) *qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe parabolique, ſe coupent dans la parabole, le rectangle* SK × KX *des parties inégales*

de la premiere, eſt au rectangle RK × KY *des parties inégales de la ſeconde, comme le quarré* $\overline{PO}^2$ *de la tangente du diamétre* PB *de la premiere, eſt au quarré* $\overline{OM}^2$ *de la tangente du diamétre* MV *de la ſeconde.*

Il peut arriver que les deux lignes SX, RY coupent toutes les deux l'arc parabolique PM compris entre les deux diamétres PB, MV (*Fig.* 405.) ou que l'une SX (*Fig.* 406.) coupe l'arcPM, & l'autre RY ne le coupe pas, ou enfin que toutes les deux SX, RY ne coupent point cet arc (*Fig.* 407.) Dans le premier cas (*Fig.* 405.) je prolonge les lignes SX, RY juſqu'à la rencontre des diamétres prolongés en E & L, & de leurs points S, R qui ſont ſur l'arc PM, je mene les droites SH, RC paralelles aux tangentes, la droite SX étant coupée en deux également en B par ſon diamétre, & en deux inégalement en K, nous avons SK × KX = $\overline{SB}^2$ — $\overline{KB}^2$ (*N.* 146.) or, dans les triangles ſemblables BSH, BKL nous avons $\overline{SB}^2$. $\overline{KB}^2$ :: BSH, BKL (*N.* 352.) donc $\overline{SB}^2$ — $\overline{KB}^2$. $\overline{SB}^2$ :: BSH — BKL. BSH, ou $\overline{SB}^2$ — $\overline{KB}^2$. BSH — BKL :: $\overline{SB}^2$. BSH, c'eſt-à-dire, SK × KX. KSHL :: $\overline{SB}^2$. BSH ; mais les triangles ſemblables BSH, POD donnent $\overline{BS}^2$. BSH :: $\overline{PO}^2$. POD, donc SK × KX. KSHL :: $\overline{PO}^2$. POD, ou SK × KX. $\overline{PO}^2$ :: KSHL. POD. Je trouverai par un raiſonnement tout ſemblable que RK × KY. $\overline{OM}^2$ :: RCEK. TOM ; nous avons donc d'une part SK × KX. $\overline{PO}^2$ :: KSHL. POD, & de l'autre RK × KY. $\overline{OM}^2$ :: RCEK. OMT ; or, à cauſe de KSHL = RCEK (*N.* 667.) & de POD = OMT (*N.* 664.) la derniere raiſon KSHL, POD de la premiere proportion eſt égale à la derniere raiſon RCEK, OMT de la ſeconde proportion, donc les deux premieres raiſons de ces proportions ſont égales, & partant SK × KX. $\overline{OP}^2$ :: RK × KY. $\overline{OM}^2$, ou SK × KX RK × KY :: $\overline{PO}^2$. $\overline{OM}^2$.

Dans le ſecond cas (*Fig.* 406) je prolonge XS en E, & des points S, X je mene les droites SH, XZ paralelles à la tangente DM ; je mene auſſi du point R la droite RC paralelle à la tangente PT, & du point Q la droite QL paralelle à la tangente DM. Cela fait je trouverai en raiſonnant comme ci-deſſus SK

$\times KX$, XKFZ :: $\overline{XB}^2$, XBZ :: $\overline{PO}^2$, POD ou $SK \times KX$, $\overline{PO}^2$ :: XKFZ, POD, & de même $RK \times KY$, $\overline{MO}^2$ :: RCEK, MOT; or POD = MOT; ſi je prouve donc que XKFZ = RCEK, nous aurons $SK \times KX$, $RK \times KY$ :: $\overline{PO}^2$. $\overline{MO}^2$. Or pour le prouver j'obſerve d'une part que XKFZ = XBZ — KBF, & qu'à cauſe de l'ordonnée XS diviſée en deux également en B, les triangles ſemblables XBZ, BHS ſont égaux; donc XKFZ = BHS — KBF; mais à cauſe des droites SH, SB paralelles aux tangentes, nous avons BHS = PTEB (*N.* 6 4.) Donc XKFZ = PTEB — KBF; d'autre part la partie RGBK du trapezoïde RCEF eſt égale au triangle RGF moins le triangle KBF; or à cauſe de l'ordonnée RQ diviſée en deux également en G, les triangles ſemblables RGF, GQL ſont égaux; donc RGBK = QGL — KBF; mais à cauſe des droites QL, QG paralelles aux tangentes, nous avons GQL = PTCG (*N.* 664.) donc RGBK = PTCG — KBF, & ajoutant de part & d'autre la partie commune GCEB, nous aurons RCEK = PTEB — KBF; mais nous avons trouvé XKFZ = PTEB — KBF; donc RCEK = XKFZ.

Dans le troiſiéme cas (*Fig.* 407.) je mene des points R, S des paralelles RC, SH aux tangentes, & des points Q, F où ces droites coupent la courbe, je mene auſſi des droites QL, FE paralelles aux tangentes. Cela fait nous aurons comme auparavant $SK \times KX$, $\overline{PO}^2$ :: SHIK, POD & $RK \times KY$, $\overline{OM}^2$, :: RCNK, OMT, & à cauſe de POD = OMT, il ne reſte qu'à prouver que SHIK = RCNK, ce qui donnera $SK \times KX$, $RK \times KY$, $\overline{PO}^2$, $\overline{MO}^2$. J'obſerve donc d'une part qu'à cauſe de l'ordonnée SF diviſée en deux également en Z, les triangles ſemblables ZSN, ZEF ſont égaux; or à cauſe de FE, FZ paralelles aux tangentes, nous avons ZEF = MDHZ; donc ZSN = MDHZ, & ajoutant de part & d'autre la partie commune ZHIKN, nous aurons SHIK = MDIKN. D'autre part à cauſe de l'ordonnée RQ diviſée en deux également en G, les triangles ſemblables GRI, HQG ſont égaux; or à cauſe des droites GL, GQ paralelles aux tangentes, nous avons LQG = PTCG; donc GRI = PTCG, & ajoutant de part & d'autre la partie commune GCNKI, nous aurons RCNK = PTNKI; mais OMT = POD; donc en ajoutant la partie commune POMNKI, nous aurons

PTNKI = MDIKN; donc RCNK = MDIKN; mais nous avons trouvé SHIK=MDIKN; donc SHIK=RCNK.

669. PROPOSITION CXXXI. *Si deux lignes* AX, AZ (*Fig.* 408.) *qui coupent la parabole ſe coupent en un point* A *hors de la parabole, le rectangle* AX × AQ *de la premiere* AX *par ſa partie extérieure* AQ *eſt au rectangle* AZ×AS *de la ſeconde* AZ *par ſa partie extérieure* AS, *comme le quarré* $\overline{PO}^2$ *de la tangente du diamétre* PD *de la premiere, eſt au quarré* $\overline{OM}^2$ *de la tangente du diamétre* ME *de la ſeconde.*

Je prolonge les droites AX, AZ juſqu'à la rencontre des diamétres en C & H, & des points Q, S où elles coupent la courbe, je mene les droites QL, SE paralelles aux tangentes, la droite QX étant diviſée en deux également en B, & la droite QA lui étant ajoutée, nous avons $AX \times AQ = \overline{AB}^2 - \overline{BQ}^2$ (*N.* 148.); or les triangles BAH, BQL ſemblables donnent $\overline{AB}^2$, $\overline{BQ}^2$ :: ABH, BQL; donc $\overline{AB}^2 - \overline{BQ}^2$, $\overline{AB}^2$ :: ABH — BQL, ABH, c'eſt-à-dire AX × AQ, $\overline{AB}^2$ :: AHLQ, ABH, ou AX × AQ, AHLQ :: $\overline{AB}^2$. ABH; mais les triangles ſemblables ABH, OPD donnent $\overline{AB}^2$, ABH :: $\overline{OP}^2$, OPD; donc AX × AQ, AHLQ :: $\overline{OP}^2$. OPD ou AX × AQ. $\overline{OP}^2$. AHLQ. OPD, & par un ſemblable raiſonnement nous trouverons AZ × AS. $\overline{OM}^2$ :: ACES. OMT, mais OPD=OMT. (*N.* 664. & AHLQ = ACES (*N.* 666.) donc dans les deux dernieres proportions que nous venons de trouver, la raiſon AHLQ, OPD eſt la même que la raiſon ACES. OMT, & par conſéquent les deux autres raiſons ſont égales, & nous avons AX × AQ. $\overline{OP}^2$ :: AZ × AS. $\overline{OM}^2$. ou AX × AQ. AZ × AS :: $\overline{OP}^2$. $\overline{OM}^2$.

670. PROPOSITION CXXXII. *L'axe* A B (*Fig.* 409.) *un diamétre* PK *& leur tangente* AY, PT *étant données avec l'ordonnée* PZ *menée à l'axe du point d'attouchement* P, *je dis que ſi du point* T *on mene une ſecante* TS *qui coupe la parabole en* R *&* S, *& l'ordonnée* PZ *en* N, *cette ſecante ſera coupée harmoniquement aux points* R, N.

Des points R, S je mene les droites MC, BV paralelles à la

tangente AY, & les droites LE, SH paralelles à la tangente TPV; enfin du point X où la droite SH coupe la courbe, je mene XD paralelle à AY. Les triangles ſemblables BVT, MQT donnent BV, MQ :: BT. MT, & à cauſe des triangles ſemblables BST, MRT nous avons BS, MR :: BT, MT. Donc BV, MQ :: BS, MR, & partant $\overline{BV}^2$, $\overline{MQ}^2$ :: $\overline{BS}^2$, $\overline{MR}^2$; mais les triangles ſemblables BVT, MQT ſont entr'eux comme les quarrés $\overline{BV}^2$, $\overline{MQ}^2$ de leurs côtés homologues BV, MQ, & par la même raiſon les triangles ſemblables BSH, MRL ſont entr'eux comme $\overline{BS}^2$, $\overline{MR}^2$; donc BVT, MQT :: BSH, MRL, ou BVT, BSH :: MQT, MRL, & par conſéquent BVT, BVT — BSH :: MQT, MQT — MRL, c'eſt-à-dire BVT, TVSH :: MQT, TQRL; mais à cauſe de l'ordonnée au diamétre XS diviſée en deux également en O, les triangles ſemblables KOS, XDO ſont égaux, & à cauſe des droites XD, XO paralelles aux tangentes, le triangle XDO eſt égal au paralellogramme PTHO; donc KOS = PTHO, & ajoutant de part & d'autre le trapezoïde POSV, nous aurons KPV = VTHS. De même le triangle CRE eſt égal au paralellogramme PTLE, & retranchant la partie commune PQRE, nous aurons CQP = QTLR; mettant donc dans la proportion trouvée ci-deſſus BVT, TVSH :: MQT, TQRL, les valeurs de TVSH, TQRL que nous venons de trouver, nous aurons BVT, KPV :: MQT, CQP ou BVT, MQT :: KPV, CQP. Mais les triangles BVT, MQT ſont entr'eux comme les quarrés $\overline{VT}^2$, $\overline{QT}^2$ de leurs côtés homologues, & les triangles KPV, CQP ſont entr'eux comme $\overline{VP}^2$, $\overline{QP}^2$; donc $\overline{VT}^2$, $\overline{QT}^2$ :: $\overline{VP}^2$, $\overline{QP}^2$, & partant VT, QT :: VP, QP ou QT, QP :: VT, VP; mais à cauſe des paralelles MR, ZP, BV, la droite TS eſt diviſée en même raiſon que la droite VT; donc TR, RN :: TS, SN, & on démontreroit la même choſe quand même TB ſeroit un diamétre.

671. *Remarque.* De cette propoſition on peut en tirer les ſuivantes. 1°. *L'axe* AB (Fig. 410.) *une tangente* TP *& l'ordonnée* PR *étant données; ſi par le point* T *on mene* MN *paralelle à* PR *& deux ſecantes* TV, TZ *également éloignées de l'axe, je dis que les droites* QZ, XV *qui paſſent par les points où les ſecantes*

cantes coupent la courbe, paſſeront par le point R. 2°. *Poſant toujours les mêmes choſes, ſi d'un point quelconque* M *pris ſur* MN *on mene une droite* MV *qui coupe la courbe en* X *&* V *& qui paſſe par le point* R, *cette ligne ſera coupée harmoniquement aux points* X, R, V. 3°. *Poſant toujours les mêmes choſes, ſi d'un point quelconque* P (Fig. 411.) *pris ſur* MN *on mene deux tangentes* PV, PX, *à la courbe, ainſi qu'il ſera enſeigné plus bas, la ligne* XV *menée par les points d'attouchement paſſera par le point* R. 4°. *Poſant toujours les mêmes choſes, ſi l'on prolonge* RP *en* H (Fig. 412.) *& que d'un point quelconque* H *pris ſur* PH *on mene deux tangentes* HQ, HZ *à la courbe, la droite* ZQ *menée par les points d'attouchement paſſera par le point* T. Ces propoſitions ſe démontrent de la même façon que nous les avons démontrées à l'égard du cercle (*N.* 300. 302. 303. &c.) & ſi l'on ſe donne la peine de relire ce que nous avons dit dans le Chapitre du Cercle touchant la ligne diviſée harmoniquement, on en déduira ſans peine d'autres proprietés de la parabole.

672. PROPOSITION CXXXIII. *Deux diamétres* PB, MV (Fig. 413.) *étant donnés avec leurs tangentes* PT, MD, *ſi l'on mene une ordonnée* CA *à l'un des diamétres, & qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre en* E *la tangente* DM *de l'autre diamétre, le rectangle* CE × EA *de la toute* CE *par l'ajoutée* EA *eſt au quarré* $\overline{EM}^2$ *de la partie* EM *de la tangente* DM *qu'elle coupe comme le quarré* $\overline{PO}^2$ *de la tangente du diamétre* PB *eſt au quarré* $\overline{OM}^2$ *de la tangente de l'autre diamétre.*

Du point A je mene LX paralelle à la tangente, & par conſéquent en ſuivant le raiſonnement que nous avons fait ci-deſſus (*N.* 669.) j'ai EC × EA, EDLA :: $\overline{PO}^2$, POD; or à cauſe des droites XL, AN paralelles aux tangentes, nous avons NAX = MDLX; donc en retranchant la partie commune MEAX, nous aurons ENM = EDLA, mais nous avons auſſi POD=MOT (*N.* 664.) mettant donc dans notre proportion les valeurs de EDLA & de POD, nous aurons EC × EA. ENM :: $\overline{PO}^2$, MOT, ou EC × EA. $\overline{PO}^2$ :: ENM. MOT; & au lieu de ces deux derniers triangles qui ſont ſemblables, mettant les quatrés $\overline{EM}^2$, $\overline{OM}^2$ de leurs côtés homologues, nous aurons EC × EA. $\overline{PO}^2$ :: $\overline{EM}^2$. $\overline{OM}^2$, ou EC × EA. $\overline{EM}^2$ :: $\overline{PO}^2$. $\overline{OM}^2$.

Si la droite CA (*Fig.* 414) coupe la parabole à un point A hors de l'arc parabolique PM compris entre les diamétres, je mene AL paralelle à la tangente DM, & du point Q où cette paralelle coupe la parabole, je mene QN paralelle à l'autre tangente. Ainſi j'ai toujours EC × EA. EDLA :: $\overline{PO}^2$. POD; or les triangles ſemblables AVX, NQX étant égaux à cauſe de l'ordonnée AQ diviſée en deux également par ſon diamétre MV, & le triangle NQX étant égal au paralellogramme MDLX, nous avons AVX = MDLX; & ajoutant de part & d'autre la partie commune MXAE, nous aurons MVE = EDLA; mais POD = MOT; mettant donc dans notre proportion les valeurs de EDLA & de POD, nous aurons EC × EA. MVE. $\overline{PO}^2$. MOT, ou EC × EA. $\overline{PO}^2$ :: MVE. MOT, & mettant les quarrés des côtés homologues de ces deux derniers triangles, nous aurons EC × EA. $\overline{PO}^2$ :: $\overline{ME}^2$. $\overline{OM}^2$, ou EC × EA. $\overline{ME}^2$. $\overline{PO}^2$. $\overline{OM}^2$.

Nota. Ce ſeroit la même choſe ſi l'un des diamétres étoit l'axe.

673. *Definition.* La portion ABC (*Fig.* 415.) d'une parabole coupée par une droite AC, ſe nomme *ſegment de parabole*, la droite AC en eſt la *corde* ou la *baſe*. Tout triangle AEC, ABC, &c. qui a pour baſe la baſe AC du ſegment, & dont le ſommet eſt ſur l'arc parabolique ABC ſe nomme triangle *inſcrit*; & celui dont le ſommet eſt au ſommet B du diamétre BR de la baſe eſt le *plus grand*; car ſi à ce même point B on mene la tangente MN qui ſera paralelle à l'ordonnée ou baſe AC, & qu'entre ces deux paralelles on mene la perpendiculaire BR, il eſt aiſé de voir que le point B eſt de tous les points de l'arc ABC celui qui eſt le plus éloigné de la baſe, & que par conſéquent tous les triangles inſcrits ayant même baſe, ceux qui n'auront pas le ſommet en B ſeront moindres que le triangle ABC, à cauſe qu'ils auront moins de hauteur ou moins de diſtance du ſommet à la baſe.

674. Proposition CXXXIV. *Deux ſegmens* APC, BME (Fig. 415, 416, 415.) *d'une même parabole* ACE *étant donnés, ſi les parties* PR, MV *des diamétres de leurs baſes compriſes dans ces ſegmens ſont égales, les plus grands triangles inſcrits dans ces mêmes ſegmens ſont égaux.*

Il peut arriver que les baſes AC, BE des ſegmens ſe coupent dans la parabole (*Fig.* 415.) ou qu'elles ſe coupent en dehors en X (*Fig.* 416.) ou qu'elles ſe coupent à un point de la courbe (*Fig.* 417.)

Si les baſes ſe coupent en dedans (*Fig.* 415.) je mene les droites AP, EM, ce qui donne les moitiés APR, EMV des plus grands triangles inſcrits à cauſe de AR=RC & de EV=VP; ainſi ce que nous dirons des triangles APR, EMV, ſe dira des plus grands triangles inſcrits. Des ſommets P, M des diamétres je mene les tangentes PO, MO & la droite PM; je mene auſſi par les extrémités & les milieux des baſes, les droites BC, AE, RV, & cette derniere eſt paralelle à PM à cauſe des paralelles égales PR, MV; enfin par le point O où les tangentes ſe coupent & par le milieu de la ligne PM qui joint leurs points d'attouchement, je mene la droite OL, laquelle eſt un diamétre (*N.* 662.) & par conſéquent cette droite eſt paralelle aux deux diamétres & coupe auſſi en deux également la droite RV paralelle à PM. Or les triangles ſemblables POM, RXV ayant les baſes PM, RV égales ſont égaux, & partant RX=PO, VX=MO, $\overline{RX}^2=\overline{PO}^2$ & $\overline{VX}^2=\overline{MO}^2$, d'où il ſuit que $\overline{RX}^2.\overline{VX}^2 :: \overline{PO}^2.\overline{MO}^2$; mais à cauſe que les baſes AC, BE des ſegmens ſe coupent en X, nous avons $CX \times AX. BX \times XE :: \overline{PO}^2.\overline{MO}^2$ (*N.* 668.) ou $\overline{CR}^2-\overline{XR}^2.\overline{BV}^2-\overline{XV}^2 :: \overline{PO}^2.\overline{MO}^2$, à cauſe des baſes AC, BM diviſées en deux également en R & V, & en deux inégalement en X; donc $\overline{CR}^2-\overline{XR}^2 :: \overline{BV}^2-\overline{XV}^2 :: \overline{RX}^2.\overline{VX}^2$, ou $\overline{CR}^2-\overline{XR}^2.\overline{XR}^2 :: \overline{BV}^2-\overline{XV}^2.\overline{XV}^2$, & compoſant $\overline{CR}^2-\overline{XR}^2+\overline{XR}^2.\overline{XR}^2.\overline{BV}^2-\overline{XV}^2+\overline{XV}^2.\overline{XV}^2$, ce qui ſe réduit à $\overline{CR}^2.\overline{XR}^2 :: \overline{BV}^2.\overline{XV}^2$; d'où l'on tire CR. XR :: BV. XV, ce qui rend paralelles les lignes RV, BC; or CR=AR & BV=VE; donc AR. XR :: VE. VX, & par conſéquent les lignes AE, RV ſont paralelles; ainſi les quatre lignes BC, PM, RV, AE ſont paralelles entr'elles & coupées en deux également par le diamétre OL, ce qui fait que le paralellogramme PMVR, le trapezoïde RVEA & le trapezoïde PMEA ſont tous diviſés en deux également par le même diamétre; retranchant donc de ce dernier trapezoïde, d'une part le paralellogramme PSIR,

& le trapezoïde RILA, & de l'autre le paralellogramme MSIV = PSIR, & le trapezoïde VILE = RILA ; il reſtera PAR = MVE, & par conſéquent les doubles de ces triangles, c'eſt-à-dire les plus grands triangles inſcrits dans les ſegmens APC, BME ſont égaux.

Si les baſes AC, EB des ſegmens ſe coupent en dehors en X (*Fig.* 416.) ; je mene les droites CB, PM, RV, AE, & la droite OL par le milieu S de PM, & par conſéquent la droite OL étant un diamétre (*N.* 662.) eſt paralelle aux deux autres diamétres, & coupe auſſi en deux également la ligne RV égale & paralelle à PM, à cauſe des paralelles égales PR, MV. De plus les triangles ſemblables POM, RXV ayant leurs baſes PM, RV égales ſont égaux, & RX = PO, VX = OM, $\overline{RX}^2 = \overline{PO}^2$, $\overline{XV}^2 = \overline{OM}^2$; d'où je tire $\overline{RX}^2 . \overline{XV}^2 :: \overline{PO}^2 . \overline{OM}^2$; or, les ſecantes AX, XE, donnent AX×XC. EX×XB :: $\overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$ (*N.*669.), ou $\overline{XR}^2 - \overline{CR}^2 . \overline{XV}^2 - \overline{BV}^2 :: \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$, à cauſe des lignes AC, BE diviſées également en R, V, & des ajoutées CX, BX ; donc $\overline{XR}^2 - \overline{CR}^2 . \overline{XV}^2 - \overline{BV}^2 :: \overline{RX}^2 . \overline{XV}^2$, ou $\overline{XR}^2 - \overline{CR}^2 . \overline{XR}^2 :: \overline{XV}^2 - \overline{BV}^2 . \overline{XV}^2$, & retranchant de chaque conſéquent ſon antécedent, puis comparant le reſte au conſéquent, nous aurons $\overline{XR}^2 - \overline{XR}^2 + \overline{CR}^2 . \overline{XR}^2 :: \overline{XV}^2 - \overline{XV}^2 + \overline{BV}^2 . \overline{XV}^2$, ce qui ſe réduit à $\overline{XR}^2 . \overline{CR}^2 :: \overline{XV}^2 . \overline{BV}^2$; donc XR. CR :: XV. BV, & par conſéquent les lignes CB, RV ſont paralelles. Or, RC = AR, & VB = EV ; donc XR. AR. XV. VE, ce qui rend auſſi les droites RV, AE paralelles ; ainſi les quatre lignes CB, PM, RV, AE ſont paralelles & diviſées chacune en deux également par le diamétre OL, d'où il ſuit que le paralellogramme PMVR, le trapezoïde RVAE, & le trapezoïde PMAE ſont auſſi diviſés chacun en deux également par le même diamétre. Retranchant donc de ce dernier d'une part PSIR, & RILA, & de l'autre SMVI = PSIR, & VILE = RILA, il reſtera PAR = MVE.

Enfin, ſi les baſes AC, BE des ſegmens ſe coupent à un point de la courbe (*Fig.* 417.), je mene les droites PM, RV, AE leſquelles ſont paralelles entr'elles, car PM eſt paralelle à RV, & à cauſe de CR. CA :: BV. BE, la droite RV eſt paralelle à AE ; menant donc le diamétre OS, & achevant le reſte, comme ci-deſſus, on trouvera APR = MVE.

675. PROBLEME. *Une parabole* ABC (Fig. 418.) *étant donnée, trouver ſon axe, ſon paramétre & ſon foyer.*

Je mene pluſieurs lignes paralelles AN, QD, &c. qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe; je les diviſe chacun en deux également en R, S, &c. & par les points de diviſion, je fais paſſer une ligne droite SH, laquelle ſera le diamétre des paralelles; ainſi ſi ce diamétre eſt perpendiculaire ſur ſes ordonnées, il ſera l'axe cherchée; mais ſi cela n'eſt pas, du point H où ce diamétre coupe la courbe, je mene HG perpendiculaire ſur HS, & coupant HG en deux également en X; j'éleve la perpendiculaire XB, qui eſt l'axe demandé; car HG doit avoir un diamétre qui la coupe en deux également, & ce diamétre doit être paralelle au diamétre HS; or, nulle autre ligne que XB ne peut avoir ces conditions. Donc, &c.

L'axe étant trouvé, je mene en H la droite HT paralelle aux ordonnées RN, SD, &c. du diamétre HS, & par conſéquent HT ſera tangente en H; du point H, je mene HZ perpendiculaire ſur HT, & la ſouperpendiculaire XZ eſt égale à la moitié du paramétre (*N.* 643.); donc le double de cette droite eſt le paramétre de l'axe, & prenant le quart de ce paramétre, & le portant de B en O, le point O eſt le foyer.

Ou bien je fais en H avec la tangente TH, l'angle THO égal à l'angle EHS que cette tangente fait avec le diamétre HS, & le point O où la droite HO coupe l'axe, eſt le foyer (*N.* 661.), & par conſéquent BO eſt le quart du paramétre.

Ou bien encore par le ſommet B de l'axe, je mene la droite BL perpendiculaire à l'axe; je diviſe l'angle droit XBL en deux également par la ligne BV, & du point V où cette ligne coupe la parabole, je mene l'ordonnée VM, laquelle eſt égale au paramétre, car l'angle XBL étant droit, ſa moitié XBV eſt de 45 degrés; donc dans le triangle rectangle BMV, l'autre angle aigu BVM eſt auſſi de 45 degrés, & par conſéquent ce triangle eſt iſoſcele & MV = BM; d'où il ſuit que $\overline{MV}^2 = \overline{MB}^2 = MB \times MB$; mais en nommant p le paramétre; nous avons par la proprieté de la parabole $\overline{MV}^2 = MB \times p$; donc $MB \times p = MB \times MB$, & partant en diviſant par MB, nous aurons $p = MB$.

Ou bien enfin, je cherche une troiſiéme proportionnelle à une abſciſſe quelconque BX, & à ſon ordonnée XG, & cette troiſié-

me proportionnelle que je nomme p ſera le paramétre, car à cauſe de :: BX. XG. p, nous aurons $\overline{XG}^2 = BX \times p$.

676. *Definition.* Une parabole ABC terminée par une baſe AC (*Fig.* 419.) étant donnée, ſi par le ſommet B, on mene la tangente MN, & par les extrémités A, C de ſa baſe, les droites AM, CN perpendiculaires ſur MN, le rectangle AMNC ſe nomme *Rectangle circonſcrit*; la figure mixtiligne AFBECNM eſt le *Complement* de la parabole, & la figure mixtiligne BECN eſt le *Complement* de la demi-parabole.

677. Probleme. *Meſurer une parabole* ABC (Fig. 419.), *terminée par une baſe ou double ordonnée* AC.

Je décris le rectangle circonſcrit AMNC, & les deux tiers de ce rectangle ſont la valeur de la parabole, ce que je démontre ainſi.

Je conçois que BN ſoit diviſé en une infinité de parties égales BH, HL, &c. & que des points de diviſion ſoient menées à la courbe des droites HR, LV, &c. leſquelles ſeront les élemens du demi-complement BVCN; des points R, V, &c. je mene les ordonnées SR, TV, &c. ainſi les élemens HR, LV, &c. du demi-complement ſeront égaux aux abſciſſes BS, BT, &c. & les diſtances BH, BL, &c. des droites HR, LV, &c. au ſommet B du demi-complement ſeront égales aux ordonnées SR, TV, &c. mais par la proprieté de la parabole, les abſciſſes BS, BT, &c. ſont entr'elles comme les quarrés des ordonnées SR, TV, &c. donc les élemens HR, SV, &c. ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs diſtances BH, BL, &c. au ſommet B.

Or, ſelon ce que nous avons démontré (*N.* 499.), ſi l'on coupe une pyramide par une infinité de plans paralelles à ſa baſe, leſquels ſeront les élemens de cette pyramide, ces plans ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diſtances au ſommet de la pyramide; donc les élemens du demi-complement BVCN ſont entr'eux comme les plans élementaires d'une pyramide. Mais la ſomme des plans élementaires d'une pyramide eſt égale à la baſe multipliée par le tiers de ſa diſtance au ſommet (*N.* 504.); donc la ſomme des élemens du demi-complement BVCN eſt égale à la baſe ou plus grand élement NC multiplié par le tiers de ſa diſtance NB au ſommet B. Or, NC multiplié par NB eſt le rectangle BDCN, & $NC \times \frac{1}{3}NB$ en eſt le tiers; donc la ſomme des élemens du demi-complement, c'eſt-à-dire le demi-complement

lui-même eſt égal au tiers du rectangle BDCN; or, ſi de ce rectangle nous retranchons le demi-complement, le reſte eſt la demi-parabole DBNC; donc cette demi-parabole eſt égale aux deux tiers du rectangle BDCN, & comme on démontrera de la même façon que l'autre demi-parabole eſt égale aux deux tiers du rectangle BDAM; il s'enſuit que la parabole entiere ABC eſt égale aux deux tiers du rectangle circonſcrit AMNC.

678. COROLLAIRE Ier. Si le rectangle circonſcrit eſt un, la parabole ſera $\frac{2}{3}$, & le triangle ABC ſera $\frac{1}{2}$, à cauſe qu'il eſt la moitié; ainſi en réduiſant tout en même dénomination, ces trois Figures ſeront entr'elles comme $\frac{6}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, ou comme 6, 4, 3; or, en retranchant de la parabole le triangle ABC, le reſte eſt la valeur des deux ſegmens AFBX, BVCZ pris enſemble; donc le rectangle circonſcrit, la parabole, le triangle inſcrit, & la ſomme des deux ſegmens ſont entr'eux comme 6. 4. 3. 1, & par conſéquent la ſomme des deux ſegmens eſt le $\frac{1}{6}$ du rectangle le $\frac{1}{4}$ de la parabole, & le $\frac{1}{3}$ du triangle; d'où il ſuit que le ſegment BVCZ eſt auſſi le $\frac{1}{6}$ du rectangle BNCD, le $\frac{1}{4}$ de la demi-parabole BDC, & le $\frac{1}{3}$ du triangle BDC.

679. COROLLAIRE II. *Un ſegment* ABC (Fig. 420.) *de parabole dont le diamétre* BP *eſt incliné ſur la baſe* AC *eſt auſſi les deux tiers du paralellogramme circonſcrit, c'eſt-à-dire du paralellogramme* AMNC, *dont les côtés* AM, NC *ſont paralelles & égaux au diamétre* BP. Car menant les élemens HQ, LV, &c. du demi-complement BNCV paralelles à la baſe NC de ce demi-complement, & les ordonnées QS, TV, &c. les élemens HQ, LT, &c. ſeront égaux aux abſciſſes BS, BT, &c. & les parties BH, BL, &c. que les élemens coupent ſur BN ſeront égales aux ordonnées QS, VT, &c. donc les élemens HQ, LV, ſeront entr'eux comme les quarrés des parties BH, BL, &c. qu'ils coupent; or, ſi du ſommet B j'abaiſſe la perpendiculaire BK ſur la baſe CN prolongée, les élemens étant prolongés couperont cette perpendiculaire en E, O, &c. en même raiſon qu'ils coupent la droite BN en H, L, &c. & par conſéquent les diſtances BE, BO, &c. des élemens au ſommet, ſeront entr'elles comme les droites BH, BL, &c. que ces élemens coupent; donc les quarrés de BE, BO, &c. ſeront auſſi en même raiſon que les quarrés de BH, BL, &c. ainſi les élemens HQ, LV, &c. ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs diſtances BE, BO, &c. au ſommet B, & partant ils ſeront le tiers du plus grand élement NC mul-

tiplié par ſa diſtance BK, au ſommet B, ainſi qu'il a été démontré ci-deſſus (*N.* 677.); or, le rectangle CN × BK eſt égal au paralellogramme PBNC de même baſe & de même hauteur, donc la ſomme des élemens HQ, LV, &c. c'eſt-à-dire le demi-complement BNCV eſt le tiers du paralellogramme PBNC, & par conſéquent le demi-ſegment PBC eſt les deux tiers de ce paralellogramme; d'où il eſt aiſé de voir que le ſegment entier ABC eſt les deux tiers du paralellogramme AMNC.

680. COROLLAIRE III. *Si deux ſegmens* ABC, DEF (Fig. 421.) *d'une même parabole ont les portions* BP, RE *de leurs diamétres compriſes dans ces ſegmens, égales entr'elles, ces ſegmens ſont égaux.* Les plus grands triangles ABC, DEF inſcrits dans ces ſegmens ſont égaux (*N.* 674.); donc les paralellogrammes circonſcrits ſont égaux, puiſqu'ils ſont doubles des triangles; or, les ſegmens ſont les deux tiers de leurs paralellogrammes (*N.* 679.); donc ils ſont égaux.

681. PROBLEME. *Une parabole* VHAS (Fig. 422.) *étant donnée avec ſon axe* AX, *mener deux tangentes* PS, PV *d'un point* P *qui n'eſt pas ſur l'axe.*

Du point P, je mene un diamétre PHR, qui coupe la parabole en H; je mene en H la tangente HT, je prens l'abſciſſe HR égale à PH, & par le point R, menant au diamétre PR l'ordonnée VS qui coupe la parabole en V & S, je mene de ces points les droites SP, V, qui ſont les tangentes demandées. Car à cauſe que la droite SP eſt menée de l'extrémité S de l'ordonnée RS, & que la droite PR eſt diviſée en deux également en H; il eſt clair que PR eſt ſoutangente, & que PS eſt tangente, & par la même raiſon PV eſt auſſi tangente.

682. COROLLAIRE Ier. *D'un point extérieur* P, *on ne peut mener que deux tangentes à la parabole.* Ce qui eſt évident, car une autre ligne qu'on voudroit mener du point P paſſeroit ou entre les deux points V, S d'attouchement ou en dehors; ainſi dans le premier cas elle couperoit la parabole; & dans le ſecond, elle ſeroit toute entiere hors de la courbe, & ne la toucheroit pas.

683. COROLLAIRE II. *Les deux tangentes* PS, PV *qu'on peut mener à la parabole d'un point extérieur* P *qui n'eſt pas ſur l'axe, ſont néceſſairement inégales.*

Du point H, je mene l'ordonnée HM à l'axe. Le triangle XHR étant rectangle en H, l'angle HRX eſt aigu, & ſon angle de ſuite HRV eſt obtus. Or, les deux triangles PRS, PRV ont le

le côté PR commun, le côté RS égal au côté RV; mais l'angle compris PRS eſt moindre que l'angle compris PRV; donc la baſe PS eſt moindre que la baſe PV.

684. COROLLAIRE III. *Au contraire les deux tangentes* TH, TL *qu'on peut mener d'un point* T *pris ſur l'axe, ſont égales.* Car prenant l'abſciſſe AM égale à TA, & menant la double ordonnée HL, les deux tangentes paſſeront par les points H, L, & à cauſe que les triangles rectangles TMH, TML, ont le côté TM commun, & le côté HM égal au côté ML; il eſt clair que le troiſiéme TH eſt égal au troiſiéme TL.

685. *DEFINITION.* Deux paraboles ABC, *abc* (*Fig.* 423.) qui ont des paramétres BR, *br* différens, & qui ſont terminées par des baſes AC, *ac*, ſont dites *Semblables*, lorſqu'une figure quelconque AMBNC étant inſcrite dans l'une, on peut en inſcrire une ſemblable *ambnc* dans l'autre.

686. PROBLEME. *Une parabole* ABC (Fig. 423.) *étant donnée, décrire avec un autre paramétre* br, *une autre parabole* abc *ſemblable à la parabole donnée.*

Je décris une parabole dont la diſtance de la directrice au foyer ſoit égale à la moitié du paramétre *br*; cette parabole étant décrite, ſuppoſons que la ligne des abſciſſes ſoit la droite indéfinie *bx*; je prens une quatriéme proportionnelle au paramétre BR de la parabole donnée à ſa hauteur PB, & au paramétre *br*, & portant cette quatriéme proportionnelle ſur *bx*, de *b* en *p*; je mene par le point *p* la baſe *ac*; & je dis que la parabole *abc* terminée par la double ordonnée ou baſe *ac*, eſt ſemblable à la parabole donnée ABC, terminée par la double ordonnée ou baſe AC.

Car ſoient menées dans la parabole ABC, la double ordonnée MN & les cordes MB, MA, BN, NC, je diviſe la hauteur *bp* en *t* en même raiſon que la hauteur BP eſt diviſée en T, & menant par le point *t* la double ordonnée *mn*, & enſuite les cordes *mb*, *ma*, *nb*, *nc*, la figure inſcrite *ambnc* eſt ſemblable à la figure inſcrite AMBNC, & par conſéquent les deux paraboles ſont ſemblables; ce que je prouve ainſi.

Par la proprieté de la parabole, nous avons $\overline{TN}^2 = TB \times BR$; donc :: TB. TN. BR, & partant $\overline{TB}^2$. $\overline{TN}^2$ :: TB. BR (*N.*393.); de même dans la parabole *abc*, nous trouverons $\overline{tb}^2$. $\overline{tn}^2$ :: *tb*. *br*;

mais nous avons fait TB. *tb* :: BP. *bp*. & BP. *bp* :: BR. *br*; donc TB. *tb* :: BR. *br*, ou TB. BR :: *tb*. *br*, & par conſéquent $\frac{TB.}{2}$. $\frac{TN}{2}$ :: $\frac{tb.}{2}$. $\frac{tn}{2}$; d'où l'on tire TB. TN :: *tb*. *tn*. Ainſi les deux triangles rectangles BTN, *btn* ſont ſemblables, & partant le triangle entier MBN eſt ſemblable au triangle entier *mbn*.

Je mene les droites TC, TA, *tc*, *ta*, & je prouverai aiſément comme ci-deſſus que PC. PT :: *pc*. *pt*, & que par conſéquent le triangle TPC eſt ſembable au triangle *tpc*, ce qui rend auſſi ſemblables les triangles ATC, *atc*; enfin comme à cauſe des triangles ſemblables TPC, *tpc*, nous avons TC. *tc* :: TP. *tp*, & que TP. *tp* :: BT. *bt*, nous aurons TC. *tc* :: BT. *bt*; mais nous avons trouvé BT. *bt* :: TN. *tn*; donc TC. *tc* :: TN. *tn*; or à cauſe des angles droits PTN, *ptn*, & des angles égaux PTC, *ptc*, les angles CTN, *ctn* ſont auſſi égaux; donc les deux triangles CTN, *ctn* ſont ſemblables, puiſque les côtés TC, *tc* & TN, *tn* qui comprennent les mêmes angles ſont proportionnels; & de-là il ſuit que les deux autres triangles MTA, *mta* ſont auſſi ſemblables. Ainſi les figures inſcrites AMBNC, *ambnc* étant compoſées d'un même nombre de triangles ſemblable chacun à chacun, ſont ſemblables entr'elles.

687. COROLLAIRE. *Les paraboles ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs baſes ou de leurs côtés homologues.* Nous avons trouvé PC. *pc* :: PT, *pt*; & à cauſe que nous avons fait PT. TB :: *pt*. *tb*, nous aurons en compoſant PT. PB :: *pt*. *pb*, ou PT. *pt* :: PB. *pb*. Donc PC. *pc* :: PB. *pb*; or la demi-parabole BPC eſt les deux tiers du rectangle PC × PB, & la demi-parabole *bpc* eſt les deux tiers du rectangle *pc* × *pb*, & ces deux rectangles ayant les côtés proportionnels, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; donc les deux demi-paraboles, & par conſéquent les deux paraboles ſont comme les quarrés de leurs côtés homologues.

688. COROLLAIRE II. *Toutes les paraboles peuvent être ſemblables.* Car il n'y a qu'à prendre les Abſciſſes BP, *bp* en même raiſon que les paramétres BR, *br*, & mener par les points P*p* les baſes AC, *ac*.

De l'Ellipſe conſideréé ſur un Plan hors du Cône.

689. PROBLEME. *Conſtruire une Ellipſe.*

Je prens deux lignes droites AB, CD (*Fig.* 424.) inégales entr'elles, je leur fais faire un angle droit enſorte qu'elles ſe coupent l'une & l'autre en deux parties égales au point O. De ce point pris pour centre & d'un rayon égal à la moitié OA de la plus grande des deux lignes, je décris un cercle AEBH; je prolonge CD de part & d'autre juſqu'à la circonference du cercle en H & E, & diviſant AB en pluſieurs parties égales, j'éleve des perpendiculaires *n*N, *r*T, & qui ſe terminent de part & d'autre à la circonference. Cela fait, je commence par le demi cercle AEB, & je cherche une quatriéme proportionnelle au rayon OE à la droite OD & à la perpendiculaire MN; cette quatriéme proportionnelle étant trouvée, je le porte ſur MN de M en R. Je cherche de même une quatriéme proportionnelle SV aux deux OE, OD & à la perpendiculaire ST; je continue ainſi à chercher des quatriémes proportionnelles toujours aux deux lignes OE, OD & à quelqu'une des perpendiculaires du demi-cercle AED, & je fais paſſer une courbe ARVDPB par les extrémités des quatriémes proportionnelles. Je fais la même choſe à l'égard du demi-cercle AHB, ce qui me donne une courbe ADBC dont la ligne AB eſt un axe à cauſe qu'elle coupe en deux également toutes les droites *r*R, *s*V ſur leſquelles elle eſt perpendiculaire, & la ligne CD eſt l'autre axe, parce qu'elle coupe auſſi en deux également toutes les lignes paralelles à AB qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe, comme nous démontrerons plus bas. Il ne reſte donc qu'à faire voir que cette courbe eſt une Ellipſe, c'eſt ce que je démontre.

Par la conſtruction nous avons OE. OD :: MN. MR. & OE. OD :: ST. SV; donc MN. MR :: ST. SV, ou MN. ST :: MR. SV, c'eſt-à-dire les ordonnées MR. SV, &c. de la courbe ADBC ſont entr'elles comme les ordonnées MN. ST, &c. du demi-cercle AEB, & par conſéquent en élevant tout au quarré, nous aurons $\overline{MR}^2 . \overline{SV}^2 :: \overline{MN}^2 . \overline{ST}^2$. mais par la proprieté du cercle $\overline{MN}^2 = AM \times MB$ & $\overline{ST}^2 = AS \times SB$; donc $\overline{MR}^2 . \overline{SV}^2 :: AM \times MB . AS \times SB$, c'eſt-à-dire les quarrés des ordonnés MR, SV &c. de la courbe ADBC ſont entr'eux comme les rectangles AM × MB, AS × SB, &c. des parties de l'axe AB qu'elles coupent, & par conſéquent cette courbe eſt une Ellipſe (*N.* 632.)

690. COROLLAIRE Ier. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MR *au grand axe* AB *eſt au rectangle* AM × MR *des parties de l'axe*

qu'elle coupe, comme le quarré du petit axe CD *eſt au quarré du grand axe* AB. Les droites MR, OD étant ordonnées au grand axe, nous avons $\overline{MR}^2 . \overline{OD}^2 :: AM \times MB . AO \times OB$ (*N.* 689.) ou $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: \overline{OD}^2 . AO \times OB$; mais à cauſe de AO=OB, nous avons $AO \times OB = \overline{AO}^2$; donc $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: \overline{OD}^2 . \overline{AO}^2$; or OD étant le demi petit axe, & AO le demi grand axe, les quarrés $\overline{OD}^2$, $\overline{AO}^2$ de ces moitiés ſont entr'eux comme les quarrés de leur tous CD, AO; donc le quarré de l'ordonnée MR eſt au rectangle AM × MB, comme le quarré du petit axe CD eſt au quarré du grand axe AB.

691. *Definition.* Si l'on prend une troiſiéme proportionnelle au grand axe AB & au petit axe CD, cette troiſiéme proportionnelle ſe nommera *Paramétre* du grand axe, & ſi l'on prend une troiſiéme proportionnelle au petit axe CD & au grand axe AB, cette troiſiéme proportionnelle ſe nommera *Paramétre* du petit ae.

692. Corollaire II. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MR *au grand axe, eſt au rectangle* AM × MB *des parties de l'axe qu'elle coupe, comme le paramétre du grand axe* AB *eſt à cet axe.* Je nomme *p* le paramétre du grand axe, & j'ai :: AB. CD. *p* (*N.* 691.) donc $\overline{AB}^2 . \overline{CD}^2 :: AB . p$, ou $\overline{CD}^2 . \overline{AB}^2 :: p . AB$. Or j'ai $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: \overline{CD}^2 . \overline{AB}^2$ (*N.* 690.) donc $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: p . AB$.

693. Corollaire III. *Si ſur l'une des extrémités* A *du grand axe* AB (Fig. 425.) *on éleve une perpendiculaire* AX *égale au paramétre de cet axe, & que de l'extrémité* X *de cette perpendiculaire l'on mene une droite* XB *à l'autre extrémité* B *du grand axe, laquelle coupera toutes les ordonnées les unes en dehors de l'Ellipſe, & les autres en dedans, je dis que le quarré d'une ordonnée quelconque* MR *eſt égal au rectangle de l'Abſciſſe* AM *par* MV, *c'eſt à-dire par la ligne* MV *perpendiculaire ſur le grand axe au point* M, *& compriſe entre le grand axe & la droite* XB. Nous avons $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: AX . AB$. (*N.* 692.) & à cauſe des triangles ſemblables VMB, XAB, nous avons VM. MB :: AX. AB, & multipliant les deux premiers termes de cette proportion par la même grandeur AM, nous aurons VM × AM. AM × MB :: AX. AB; donc VM × AM. AM × MB :: $\overline{MR}^2 . AM \times MB$; or les deux conſéquens

de cette proportion ſont égaux; donc $VM \times AM = \overline{MR}$.

694. *Remarque.* Dans la parabole, le quarré d'une ordonnée eſt toujours égal au rectangle de ſon Abſciſſe par le paramétre; dans l'Ellipſe le quaré de l'ordonnée au grand axe eſt toujours égal au rectangle de ſon Abſciſſe AM par une ligne MV moindre que le paramétre de cet axe, & dans l'hyperbole nous démontrerons dans la ſuite que le quarré d'une ordonnée à un axe eſt plus grand que le rectangle de l'Abſciſſe par le paramétre de cet axe. Or c'eſt de-là que le nom de Parabole, d'Ellipſe & d'Hyperbole ſont venus; car Parabole en Grec ſignifie *Egalité*, Ellipſe ſignifie *Défaut*, & Hyperbole *Excès*.

695. Corollaire IV. *Les ordonnées* SV, XP (Fig. 424.) *au grand axe* AB, *également éloignées du centre* O *ſont égales.* Par la génération de l'Ellipſe nous avons SV. XP :: ST. XZ. (*N.* 689.) or dans le cercle AEBH les cordes *t*T, *z*Z également éloignées du centre O ſont égales; donc leurs moitiés ST. XZ. ſont auſſi égales, & par conſéquent SV = XP.

696. Corollaire V. *Toutes les lignes comme* RZ (Fig. 426.) *qui paſſent par le centre* O *d'une Ellipſe, & qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe, ſont coupées en deux également au centre* O. De l'un des points R où la droite RZ coupe la courbe, je mene l'ordonnée RM; je prens ſur l'axe la partie OX = OM, & du point X je mene la droite XZ paralelle à MR, ſans m'embarraſſer ſi le point Z où elle coupe RZ eſt ſur la courbe, ou s'il n'y eſt pas. Les triangles ſemblables MOR, XOZ ayant le côté MO égal au côté OX ſont parfaitement égaux, & partant RO=OZ & MR=ZX; or MR, ZX ſont également éloignées du centre; donc puiſque MR eſt une ordonnée au grand axe, la droite ZX doit être auſſi ordonnée au même axe (*N.* 695.) & partant le point Z où elle coupe ZR eſt ſur l'Ellipſe, & ZR eſt coupée en deux également en O.

697. Corollaire VI. *Toute ligne comme* RP. (Fig. 427.) *paralelle au grand axe* AB, *& qui ſe termine de part & d'autre à la courbe, eſt coupée en deux également en* T *par le petit axe* CD. Des points R, P où RP coupe la courbe, je mene les ordonnées MR, PX, leſquelles étant paralelles entre les paralelles MX, RP ſont par conſéquent égales entr'elles; ainſi leurs diſtances MO, OX au centre O ſont égales (*N.* 695.) mais à cauſe des paralelles MR, OD, XP, les paralelles MO, RT ſont égales de

même que les paralelles OX, TP; donc à cauſe de MO=OX, nous aurons RT=TP.

698. COROLLAIRE VII. *Le quarré d'une ordonnée* RT *au petit axe* CD *eſt au rectangle des parties* CT, TD *de cet axe qu'elle coupe, comme le quarré du grand axe* AB *eſt au quarré du petit axe* CD. Du point R je mene l'ordonnée RM au grand axe, & j'ai $\overline{MR}^2$. $AM \times MB :: \overline{OD}^2 . \overline{AO}^2$. (*N.* 690.) mais à cauſe que AB eſt diviſé également en O & inégalement en M, nous avons $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$, ou $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{RT}^2$ à cauſe de MO=RT, & de même à cauſe de MR=OT, nous avons $\overline{MR}^2 = \overline{OT}^2$; mettant donc dans notre proportion les valeurs de $\overline{MR}^2$ & $AM \times MB$, nous aurons $\overline{OT}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{RT}^2 :: \overline{OD}^2 . \overline{AO}^2$, ou $\overline{OD}^2 . \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{RT}^2$, & par conſéquent $\overline{OD}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{AO}^2 + \overline{RT}^2$, ce qui ſe réduit à $\overline{OD}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{RT}^2$, ou $\overline{RT}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$, & comme à cauſe de l'axe CD diviſé également en O & inégalement en T, nous avons $\overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 = CT \times TD$, nous aurons enfin $\overline{RT}^2 . CT \times TD :: \overline{AO}^2 . \overline{CO}^2$, c'eſt-à-dire le quarré de l'ordonnée RT au petit axe, eſt au rectangle $CT \times TD$ comme le quarré du demi grand axe au quarré du demi petit axe, ou comme le quarré du grand axe au quarré du petit.

699. COROLLAIRE VIII. *Donc les quarrés des ordonnées au petit axe ſont entr'eux comme les rectangles des parties de cet axe qu'ils coupent.* Soient les deux ordonnées RT, EF, nous aurons donc $\overline{RT}^2 . CT \times TD :: \overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$ & $\overline{EF}^2 . CF \times FD :: \overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$; donc $\overline{RT}^2 . CT \times TD :: \overline{EF}^2 . CF \times FD$, ou $\overline{RT}^2 . \overline{EF}^2 :: CT \times TD . CF \times FD$.

700. COROLLAIRE IX. Donc le quarré d'une ordonnée RT au petit axe eſt au rectangle correſpondant $CT \times TD$ comme le paramétre du petit axe eſt au petit axe. Ce qui ſe démontre comme nous avons fait à l'égard du grand axe (*N.* 692.)

701. COROLLAIRE X. *Si ſur l'une des extrêmités* D *du petit axe* (Fig. 428.) *on éleve une perpendiculaire* DX *égale à ſon paramétre, & que du point* X *on mene à l'autre extrêmité* C *la droite* CX, *le quarré d'une ordonnée quelconque* TP *au petit axe eſt égal au produit de l'abſciſſe*

TD *par* TH. Ce qui ſe démontre de même qu'à l'égard du grand axe (*N.* 693.)

702. COROLLAIRE XI. *Si l'on décrit un cercle* CXD (Fig. 429.) *autour du petit axe* CD, *ce cercle ſera tout entier dans l'Ellipſe.* Car menant au petit axe l'ordonnée RT qui coupe le cercle en X, nous aurons $\overline{RT}^2$. CT × TD :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$. Or par la proprieté du cercle CT × TD = $\overline{XT}^2$; donc $\overline{RT}^2$. $\overline{XT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$; mais $\overline{AO}^2$ eſt plus grand que $\overline{OD}^2$; donc $\overline{RT}^2$ eſt auſſi plus grand que $\overline{XT}^2$; ainſi le point X du cercle eſt dans l'Ellipſe, & comme cela arrivera à l'égard de toutes les ordonnées de l'ellipſe & du cercle CXD, il s'enſuit que ce cercle eſt inſcrit dans l'ellipſe.

703. COROLLAIRE XII. *L'Ellipſe eſt moyenne proportionnelle entre le cercle circonſcrit* AEBH, *& le cercle inſcrit* CXD (*Fig.* 429.) Par la nature de l'ellipſe toute ordonnée MS du cercle circonſcrit AEBH eſt à l'ordonnée correſpondante MN de l'ellipſe comme le rayon OE ou la moitié OA du grand axe eſt à la moitié du petit axe; d'où il ſuit que la ſomme des ordonnées du cercle circonſcrit où le cercle circonſcrit eſt à la ſomme des ordonnées de l'ellipſe ou à l'ellipſe, comme la moitié du grand axe eſt à la moitié du petit axe, ou comme le grand axe au petit; ainſi nous avons AEBH. ADBC :: AB. CD. Or comme nous avons $\overline{RT}^2$. $\overline{XT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$ (*N.* 699.) ce qui donne RT. XT :: AO. OD, il eſt clair que la ſomme des ordonnées au petit axe de l'ellipſe, c'eſt-à-dire l'ellipſe eſt à la même ſomme des ordonnées du cercle inſcrit, c'eſt-à-dire au cercle inſcrit, comme AO eſt à OD, ou comme AB. CD, & par conſéquent nous avons ADBC. CXDV :: AB. CD; mais nous venons de trouver AEBH. ADBC :: AB. CD; donc AEBH. ADBC :: ADBC. CXDV.

704. COROLLAIRE XIII. *Les ordonnées* MR, SV, &c. (*Fig.* 430.) *d'un quart d'Ellipſe* AOD, *vont en diminuant à meſure qu'elles s'approchent du ſommet* A *du grand axe; & ſi des ordonnées* MN, ST, &c. *du quart de cercle circonſcrit* AOE *on retranche les ordonnées* MN, SV, &c. *les reſtes* RN, VT, &c. *iront auſſi en diminuant en approchant de* A, *& ſeront entr'eux comme les ordonnées* MR, SV, &c. Par la nature de l'ellipſe nous avons MR. SV :: MN. ST; mais dans le cercle AEBH, la corde *n*N étant plus éloignée du centre O que la corde *t*T eſt moindre que *t*T; donc ſa moitié

MN eſt auſſi moindre que la moitié ST de rT, & par conſéquent MR eſt auſſi moindre que SV. Maintenant puiſque nous avons MR. SV. :: MN. ST ou MR. MN :: SV. ST. nous aurons auſſi MR. MN — MR :: SV. ST — SV, c'eſt-à-dire, MR. RN :: SV. VT, & partant MR. SV :: RN. VT; mais MR eſt moindre que SV, donc RN eſt moindre que VT.

705. COROLLAIRE XIV. *De toutes les lignes* RO, VO &c. (Fig. 430.) *qu'on peut mener des points d'un quart* AD *de circonférence d'Ellipſe au centre* O, *celles qui ſont un moindre angle avec le grand axe*, AB, *& qui par conſéquent en ſont plus proches comme* RO *ſont plus grandes que celles qui ſont un angle plus grand avec cet axe, ou qui en ſont plus éloignées comme* VO. Des points R, V je mene les ordonnées RM, SV au grand axe, & je les prolonge juſqu'à la circonférence du cercle circonſcrit en N & T; des points N, T je mene au centre les droites NO, TO leſquelles ſont égales étant rayons du même cercle, ainſi $\overline{NO}^2 = \overline{TO}^2$. Or, le triangle rectangle NMO donne $\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MN}^2$, & à cauſe que MN eſt diviſé en deux parties en R, nous avons $\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + 2MR \times RN + \overline{RN}^2$; donc $\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MR}^2 + 2MR \times RN + \overline{RN}^2$, de même le triangle rectangle TOS donne $\overline{TO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{ST}^2$, & à cauſe de ST diviſé en deux parties en V, nous avons $\overline{ST}^2 = \overline{SV}^2 + 2SV \times VT + \overline{VT}^2$, & partant $\overline{TO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SV}^2 + 2SV \times VT + \overline{VT}^2$. Or, le triangle rectangle RMO donne $\overline{RO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MR}^2$, donc ce qui manque au quarré $\overline{RO}^2$ pour être égal au quarré $\overline{NO}^2$ eſt $2MR \times RN + \overline{RN}^2$; de même le triangle rectangle VSO donne $\overline{VO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SV}^2$, & par conſéquent ce qui manque au quarré $\overline{VO}^2$ pour être égal au quarré $\overline{TO}^2$ eſt $2SV \times VT + \overline{VT}^2$. Mais MR eſt moindre que SV & RN moindre que VT, (*N.* 704.) donc le défaut $2MR \times RN + \overline{RN}^2$ eſt moindre que le défaut $2SV \times VT + \overline{VT}^2$. Ainſi il manque moins à $\overline{RO}^2$ pour être égal à $\overline{NO}^2$ qu'il ne manque à $\overline{VO}^2$ pour être égal à $\overline{TO}^2$ ou $\overline{NO}^2$, & par conſéquent $\overline{RO}^2$ eſt plus grand que $\overline{VO}^2$, & RO plus grand que VO.

706.

706. COROLLAIRE. XV. *Donc de toutes les lignes* RH, VL (Fig. 430.) *qui paſſent par le centre* O, *& qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe, les plus grandes ſont celles qui font des angles moindres avec le grand axe.* Nous venons de voir que RO eſt plus grand que VO; or, RH, VL étant coupées en deux également au centre O (*N.* 696.) ſont doubles de RO, VO, donc RH eſt auſſi plus grand que VL.

707. COROLLAIRE XVI. *Si du centre* O *d'une Ellipſe* (Fig. 431.) *& avec un rayon* OH *plus grand que le demi petit axe* OD, *& moindre que le demi grand axe* OA, *on décrit un cercle, ce cercle coupera l'Ellipſe, & ne la coupera qu'en quatre points* M, N, S, R, *par leſquels on peut mener deux doubles ordonnées* MN, RS *au grand axe égales entr'elles, & deux doubles ordonnées* MR, NS *au petit axe auſſi égales entr'elles.* 1°. Il eſt évident que ce cercle doit couper l'Ellipſe, car prenant ſur le grand axe la partie TO égale au rayon HO, la circonférence du cercle paſſera par le point T, & par conſéquent elle ne pourra venir du point H au point T, ſans couper le quart d'Ellipſe AC. 2°. Ce cercle doit couper l'Ellipſe en quatre points, car de même que le point H ne peut décrire le quart HT de circonférence, ſans couper le quart AC de l'Ellipſe, de même auſſi il ne peut décrire l'autre quart de circonférence TE, ſans couper l'autre quart d'Ellipſe AD, & la même choſe arrivera à l'égard des deux autres quarts d'Ellipſe DB. CB. 3°. Le point H en décrivant le quart de circonférence HT, ne peut couper le quart d'Ellipſe AC qu'en un ſeul point M, car s'il le coupoit encore en un autre point K, menant des points, M, K des droites au centre, ces droites MO, KO étant rayons du même cercle ſeroient égales, & par conſéquent de deux différens points M, K d'un quart d'Ellipſe AC, on pourroit mener au centre O deux lignes égales MO, KO ce qui n'eſt pas poſſible, puiſque la plus proche KO de l'axe AB, eſt toujours plus grande que l'autre MO (*N.* 705.) par la même raiſon le point H en décrivant le quart de circonférence TE, ne peut couper le quart d'Ellipſe AD qu'en un ſeul point N, & la même choſe doit ſe dire des autres quarts DB, CB d'ellipſe, donc le cercle ne peut couper l'ellipſe qu'en 4 points. 4°. Le point T étant le plus haut point du quart de circonférence HMT, c'eſt-à-dire, le plus éloigné du diamétre HE; ſi du point M où ce quart de circonférence coupe le quart d'Ellipſe AC, je mene une droite MN paralelle au diamétre HE, cette droite coupera le cercle en un autre point tel que N, & ſera une

corde, laquelle ſera coupée en deux également en P par le rayon OT perpendiculaire ſur le diamétre HE, ainſi nous aurons MN = 2MP, mais MP étant ordonnée au grand axe AO, la double ordonnée menée du même point M doit être auſſi 2MP, donc cette double ordonnée doit être égale à MN, & par conſéquent le point N où la corde MN coupe le cercle, eſt le même que le point N où la double ordonnée au grand axe coupe le quart d'Ellipſe AP. On prouvera de même que la ligne qui joint les points N,S eſt une double ordonnée du petit axe que celle qui joint les points S,R eſt une double ordonnée au grand axe, & que celle qui joint les points R,M eſt une double ordonnée au petit axe; ainſi à cauſe des paralelles MN, RS, & NS, MR, la figure MNRS ſera un paralellogramme reſtangle, & partant les deux doubles ordonnées MN, RS ſeront égales, de même que les deux doubles ordonnées NS, MR au petit axe.

708. PROBLEME. *D'un point* R *pris ſur une Ellipſe* ADBC (Fig. 432.) *mener une tangente à la courbe.*

Du point R je mene une ordonnée au grand axe AB, & cherchant une troiſiéme proportionnelle OT à la diſtance OM du centre à l'ordonnée, & au demi grand axe OA, je mene par l'extrémité T de cette proportionnelle & par le point donné R la droite TRY, laquelle eſt la tangente demandée, ce que je prouve ainſi.

Je décris autour du grand axe le cercle AEBH qui ſera circonſcrit à l'Ellipſe; je prolonge l'ordonnée MR juſqu'à ce qu'elle coupe la circonférence du cercle en N, & du point N menant par le point T la droite NT, cette droite touchera le cercle en N à cauſe de :: OM. OA. OT (*N.* 292). Je prens ſur l'axe un autre point quelconque S d'où je mene une droite SX paralelle à MN, & qui coupe la tangente TN en X; la circonférence du cercle en Z, la droite TR en L & l'Ellipſe en V; les triangles ſemblables MNT, SXT donnent MN. SX :: MT. ST, & à cauſe des triangles ſembables MRT, SLT, nous avons MR, SL :: MT. ST; donc MN. SX :: MR. SL, ou MN. MR :: SX. SL; or, par la nature de l'Ellipſe, nous avons MN. MR :: SZ. SV, donc SX. SL :: SZ. SV. Or, à cauſe que TN eſt tangente du cercle en N, la droite SX eſt plus grande que l'ordonnée SZ de ce cercle, donc SL doit être plus grand que SV, & par conſéquent le point L de la droite TY doit être hors de l'Ellipſe, & comme la même choſe arrivera en quelque part de l'axe où l'on prenne le point S excep-

té en M, il s'enſuit que TRY ne touche l'Ellipſe qu'en R.

Nota. Que ſi ſur les extrémités, A, B du grand axe on éleve des perpendiculaires, elles ſeront tangentes de l'Ellipſe à cauſe qu'elles ſeront tangentes du cercle circonſcrit, ſur le diamétre duquel elles ſeront perpendiculaires, & de même les perpendiculaires élevées ſur les extrémités du petit axe ſeront tangentes, à cauſe que le petit axe eſt la plus grande de toutes les doubles ordonnées au grand axe.

709. COROLLAIRE Ier. *Une tangente* TR (Fig. 433.) *ayant été menée à une Ellipſe, ſi on la prolonge juſqu'à ce qu'elle coupe le petit axe* CD *en* Y, *& que du point d'attouchement on mene l'ordonnée* RQ *au petit axe, on aura auſſi* :: OQ. OD. OY.

Je décris autour du petit axe le cercle CHDF, lequel ſera inſcrit dans l'Ellipſe, & du point E où ce cercle coupe l'ordonnée QR, menant la droite EY, cette droite ſera tangente du cercle; car d'un autre point quelconque P pris ſur le petit axe menant paralellement à QR la droite PM qui coupe la tangente TY en M, l'ellipſe en N, la droite YE prolongée en S, & le cercle en X, les triangles ſemblables PMY, QRY donnent PM. QR :: PY. QY, & à cauſe des triangles ſemblables PSY, QEY nous aurons PS. QE :: PY. QY, donc PM. QR :: PS. QE, ou PM. PS :: QR. QE; mais par la nature de l'Ellipſe nous avons PN. PX :: QR. QE, donc PM. PS :: PN. PX; or, à cauſe que TR eſt tangente de l'Ellipſe en R, la droite PM eſt plus grande que l'ordonnée PN, donc la droite PS eſt auſſi plus grande que PX, & partant le point S de la droite YES eſt hors du cercle CHDF; & comme la même choſe arrivera par tout où l'on prendra le point P excepté en Q, il s'enſuit que la droite YE eſt tangente du cercle en E, & que par conſéquent on doit avoir :: OQ. OD. OY. (*N.* 292).

D'où il ſuit qu'un point R étant donné ſur une Ellipſe (*Fig.* 432. 433.) il eſt indifférent de mener l'ordonnée MR au grand axe (*Fig.* 432.) ou l'ordonnée RQ au petit axe (*Fig.* 433.) car dans le premier cas faiſant :: OM. OA. OT, le point T ſera le point par où il faut mener la tangente, & dans le ſecond faiſant :: OQ. OD. OY, le point Y ſera le point d'où la tangente devra être menée, & cette tangente ſera la même pour l'un & l'autre cas.

710. COROLLAIRE II. *Toutes les tangentes qu'on peut mener de tous les points de la courbe Elliptique ſont toutes inclinées entr'elles, & ſe coupent entre leurs points d'attouchement.*

Si les tangentes TP, VQ (*Fig.* 434.) ſont menées de part & d'autre de l'axe, il eſt clair que ces lignes étant inclinées ſur cet axe ſont inclinées entr'elles, & qu'elles doivent ſe couper en un point R entre les points d'attouchement. Et ce ſeroit la même choſe ſi les tangentes étoient menées de part & d'autre du petit axe CD.

Mais ſi les tangentes TP, VQ (*Fig.* 435.) ſont menées de deux points T, V du même côté de l'axe, je mene les ordonnées TM, VN, ainſi par rapport à la tangente TP, j'ai :: OM. OA. OP, ce qui donne $OM \times OP = \overline{OA}^2$; & par rapport à la ſeconde j'ai :: ON. OA. OQ & $ON \times OQ = \overline{OA}^2$; donc $OM \times OP = ON \times OQ$, d'où je tire OM. ON :: OQ. OP; mais OM eſt moindre que ON, donc OQ eſt moindre que OP, c'eſt-à-dire le point P, où la tangente TP la plus éloignée de l'axe coupe cet axe, eſt plus éloigné du ſommet A que le point Q, où la tangente VQ coupe l'axe. Donc la tangente TP ne peut point aller aboutir au point P ſans couper la tangente QVS, mais elle ne peut la couper au point d'attouchement V, car alors TP toucheroit la courbe en deux points T, V ce qui n'eſt pas poſſible (*N.* 708.); & elle ne peut pas non plus la couper entre V & Q, car il faudroit pour cela qu'elle paſſât entre le point V d'attouchement & l'axe, & par conſéquent elle ne ſeroit plus tangente, donc elle doit la couper néceſſairement en quelque point Z entre T & V.

711. COROLLAIRE III. *D'un même point on ne peut mener deux tangentes*, ce que l'on prouvera de même que pour la parabole (*N.* 646).

712. COROLLAIRE IV. *Une tangente* RP (Fig. 436.) *étant menée d'un point* R, *& une ordonnée* MR *menée du point d'attouchement* R *au grand axe, on aura* PA. AM :: PB. MB. Je décris ſur le grand axe le cercle circonſcrit, & prolongeant l'ordonnée juſqu'à la circonférence en N, la droite NP eſt tangente du cercle (*N.* 708.) & la droite MN eſt l'ordonnée de ce cercle menée du point d'attouchement N, donc nous avons PA. AM :: PB. MB (*N.* 296.) c'eſt-à-dire, la ſécante PB qui paſſe par le centre O de l'ellipſe eſt coupée harmoniquement.

713. COROLLAIRE V. *Poſant les mêmes choſes que dans le Corollaire précédent, ſi l'on mene par le point* P (Fig. 437.) *une ſécante* PZ *qui ne paſſe pas par le centre de l'ellipſe, & qui ſoit coupée par la courbe & par l'ordonnée* RM *aux points* X, Z, V, *on aura encore*

PX. XV :: PZ. VZ. Je décris le cercle circonſcrit, & prolongeant l'ordonnée MR en N, la droite PN eſt tangente du cercle, & MN eſt ſon ordonnée menée du point d'attouchement. Des points X, Z, je mene les droites QE, TH, juſqu'à ce qu'elles coupent la circonférence en E, H, & l'axe en Q, T. Ainſi par la nature de l'ellipſe, j'ai QX. TZ :: QE. TH. Je mene par le point E, & le point P la droite PH ſans m'embarraſſer ſi elle coupe TH en H ou en quelqu'autre point que je nomme *y*. Les triangles ſemblables PQX, PTZ donnent QX. TZ :: PQ. PT, & à cauſe des triangles ſemblables PQE, PT*y*, nous avons QE. T*y* :: PQ. TP ; donc QX. TZ :: QE. T*y* ; mais nous avons QX. TZ :: QE. TH ; donc QE. TH :: QE. T*y*, & par conſéquent TH = T*y*, c'eſt-à-dire la droite P*y* eſt la même que PH. Or, PH eſt une ſecante du cercle, laquelle eſt coupée harmoniquement par le cercle & l'ordonnée MN menée du point d'attouchement N (*N.* 296.), & à cauſe des paralelles QE, MN, TH la droite PZ eſt coupée en X, V, Z en même raiſon que la droite PH ; donc PX. XV :: PZ. VZ.

714. COROLLAIRE VI. *Poſant toujours la tangente* RP (Fig. 438.) *& l'ordonnée* RM *menée du point d'attouchement, ſi l'on mene le petit axe* CD, *on aura* PA. PM :: PO. PB. Je décris le cercle circonſcrit, je prolonge l'ordonnée en N, & du point N, je mene la tangente PN ; ainſi j'ai par rapport au cercle PA. PM :: PO. PB (*N.* 294.) ; or, ces lignes ſont les mêmes par rapport à l'éllipſe. Donc, &c.

715. COROLLAIRE VII. *Poſant les mêmes choſes que dans le Corollaire précédent, ſi des extrêmités* A, B, *de l'axe on éleve ſur cet axe des perpendiculaires* AH, BL *juſqu'à la rencontre de la tangente* PRL, *le rectangle* AH×BL *de ces deux perpendiculaires eſt égal au quarré du demi-axe* OD. Je prolonge le petit axe juſqu'à ce qu'il rencontre la tangente en E, les triangles PAH, PMR, POE, PBL étant ſemblables, leurs baſes AH, MR, OE, BL ſont entr'elles comme leurs hauteurs PA, PM, PO, PB ; mais nous avons PA. PM :: PO. PB (*N.* 714.) ; donc AH. MR :: OE. BL, & partant AH×BL = MR×OE. Du point R, je mene l'ordonnée RT au petit axe, ce qui donne MR = OT ; or, à cauſe de la tangente RE, & de l'ordonnée RT menée du point d'attouchement, nous avons :: OT ou MR. OD. OE ; donc $\overline{OD}^2$ = MR × OE ; mais nous venons de trouver AH×BL = MR×OE, donc AH×BL = $\overline{OD}^2$.

716. COROLLAIRE VIII. *Suppoſant toujours la tangente* PR (Fig. 439.), *& l'ordonnée* RM *à l'axe menée du point d'attouchement* R; *le rectangle* AM × MB *des parties de l'axe que l'ordonnée* RM *coupe eſt égal au rectangle* PM × MO *de la ſoutangente* PM *par la diſtance* MO *de l'ordonnée* RM *au centre* O. Je décris le cercle circonſcrit, & prolongeant l'ordonnée en N, la droite PN eſt tangente du cercle en N; donc en menant au centre la droite NO, le triangle PNO eſt rectangle; or, l'ordonnée MN au cercle étant abaiſſée de l'angle droit N de ce triangle perpendiculairement ſur ſon hypothenuſe, nous avons $\overline{MN}^2 = PM \times MO$; & par la proprieté du cercle nous avons $\overline{MN}^2 = AM \times MB$, donc $PM \times MO = AM \times MB$.

717. COROLLAIRE IX. *Poſant encore les mêmes choſes, ſi du point d'attouchement* R (Fig. 440.) *on éleve une perpendiculaire* RS *ſur la tangente* RP, *cette perpendiculaire coupera le grand axe en un point* S *qui ſera entre l'ordonnée* RM *& le centre* O. La droite NO menée du point d'attouchement N du cercle circonſcrit au centre O eſt perpendiculaire ſur la tangente PN du cercle, & à cauſe que les deux lignes PR, PN ſe coupent en P; il eſt clair que la perpendiculaire SR ſur PR étant prolongée ſera oblique ſur PN, & fera un angle aigu PXR ſur PN du côté de P, à cauſe que le triangle PRX eſt rectangle en R; ainſi RS s'éloignera de plus en plus de NO, & par conſéquent elle coupera le diamétre entre l'ordonnée MR, & le centre O ou la droite NO va aboutir.

Nota. Que ſi du point R, on mene l'ordonnée RT au petit axe, la perpendiculaire RZ coupera cet axe en-delà du centre O par rapport à l'ordonnée RT; ce qui eſt évident.

718. COROLLAIRE X. *Poſant les mêmes choſes que dans le Corollaire précédent, je dis que la ſouperpendiculaire* MS (Fig. 440.) *eſt à la diſtance* MO *de l'ordonnée* MR *au centre* O, *comme le paramétre du grand axe eſt au grand axe.* Par la nature de l'ellipſe, nous avons en nommant P le paramétre du grand axe $\overline{MR}^2$. AM × MB :: P. AB (*N.* 692.). Or, à cauſe du triangle rectangle PRS, & de la droite RM perpendiculaire ſur l'hypothenuſe PS, nous avons $\overline{MR}^2 = PM \times MS$, & d'autre part nous avons $AM \times MB = PM \times MO$ (*N.* 716.); ſubſtituant donc ces valeurs dans notre proportion, nous aurons PM × MS. PM × MO :: P. AB; mais les rectangles PM × MS, PM × MO ayant une dimenſion com-

mune PM, ſont entr'eux comme leurs dimenſions inégales MS, MO; donc MS, MO :: P. AB.

Nota. Si l'on mene du point R l'ordonnée RT au petit axe, on prouvera de la même façon que la ſouperpendiculaire TZ eſt à la diſtance TO de l'ordonnée au centre, comme le paramétre du petit axe eſt à ce petit axe. Au reſte, il eſt aiſé de voir que tout ce que nous avons dit dans les Corollaires précédens au ſujet du grand axe, peut s'appliquer au petit axe; à l'exception de ce qui a été remarqué dans la note du Corollaire précédent.

719. DEFINITION. Une ellipſe ADBC étant donnée (*Fig.* 441.); ſi de l'une des extrêmités D du petit axe CD, & avec un rayon égal au demi-grand axe AO, on décrit un arc HX qui coupe le grand axe en deux points H, X, ces points ſe nommeront les *Foyers* de l'Ellipſe. Il eſt aiſé de voir que ces foyers ſont également éloignés du centre O, à cauſe des triangles rectangles égaux DHO, DOX.

720. COROLLAIRE. Il ſuit de cette Définition que *le rectangle* AH × HB *des parties* AH, HB *de l'axe, que l'un des foyers* H *coupe eſt égal au quarré de la moitié* OD *du petit axe.* Car le triangle rectangle HOD donne $\overline{OD}^2 = \overline{HD}^2 - \overline{HO}^2$ ou $\overline{OD}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{HO}^2$; à cauſe de HD = AO : mais le grand axe AB étant diviſé en deux également en O, & en deux inégalement en H, nous avons $AH \times HB = \overline{AO}^2 - \overline{HO}^2$; donc $AH \times HB = \overline{OD}^2$, & de même $AX \times XB = \overline{OD}^2$.

721. PROPOSITION CXXXV. *Une tangente* PR (Fig. 442.); *& l'ordonnée* RM *au grand axe menée du point d'attouchement* R *étant données; je dis que ſi l'on décrit le cercle circonſcrit, & que des points* T, S *où ce cercle coupe la tangente* PRL, *on éleve des perpendiculaires* TH, SX *ſur la tangente, ces perpendiculaires paſſeront par les foyers* H, X *de l'Ellipſe.*

La droite TS étant corde du cercle circonſcrit, les droites T*t*, SQ élevées perpendiculairement aux extrêmités de cette corde, ſont deux cordes égales du même cercle circonſcrit (*N.* 265.), & à cauſe que le diamétre BA du cercle coupe ces cordes obliquement, les parties TH, *t*H de la corde T*t* ſont égales chacune à chacune aux parties SX, XQ de la corde SQ (*N.* 266.). Cela poſé.

Je mene par les extrémités A, B de l'ellipſe les tangentes AN,

BL qui coupent la tangente PL en N & L ; les triangles rectangles PBL, PSX étant ſemblables, à cauſe de l'angle aigu P qui leur eſt commun, donnent PB PS :: BL. SX, & à cauſe des triangles rectangles ſemblables PTH, PAN, nous avons PT. PA :: TH. AN ; or, les droites PB, PS étant ſecantes du cercle, donnent PB. PS :: PT. PA (*N.* 272.) ; donc BL. SX :: TH. AN, & par conſéquent BL × AN = SX × TH ; mais BL × AN = $\overline{OD}^2$ (*N.* 715.) ; donc SX × TH = $\overline{OD}^2$, ou *t*H × TH = $\overline{OD}^2$, à cauſe de *t*H = SX ; or, les droites *t*T, AB étant des cordes du cercle circonſcrit, leſquelles ſe coupent en H, nous avons *t*H × TH = AH × HB (*N.* 279.) ; donc AH × HB = $\overline{OD}^2$, c'eſt-à-dire le rectangle des parties inégales AH, HB du grand axe eſt égal au quarré de la moitié OD du petit axe ; donc le point H eſt un des foyers de l'éllipſe (*N.* 720.) ; & on prouvera de même que le point X eſt l'autre foyer.

722. COROLLAIRE Ier. *Une tangente* PR (Fig. 443.) *étant donnée, ſi des deux foyers* H, X *de l'ellipſe, on mene des droites* HR, XR *au point d'attouchement* R, *les angles* HRT, XRS *fait par ces droites avec la tangente* PS, *ſont égaux.* Je décris le cercle circonſcrit & des points T, S où ſa circonférence coupe la tangente P, S, élevant des perpendiculaires TH, SX qui paſſent par les foyers H, X (*N.* 721.), les triangles HRT, XRS ſont rectangles, & les triangles ſemblables HTP, XSP donnent HT. XS :: PT. PS ; je mene l'ordonnée MR que je prolonge juſqu'à la circonférence du cercle en N, & menant NP, cette droite NP eſt tangente du cercle ; donc la ſecante PS étant coupée en R par l'ordonnée NM menée du point d'attouchement, donne PT. TR :: PS. RS (*N.* 296.) ou PT. PS :: TR. RS ; donc HT. XS :: TR. RS, & par conſéquent les triangles rectangles HTR, XSR ſont ſemblables, & l'angle HRT eſt égal à l'angle XRS.

723. COROLLAIRE II. *Si des foyers* H, X (Fig. 443.) *d'une ellipſe, on mene des droites au point* R *où une tangente quelconque touche l'ellipſe, la ſomme de ces deux droites* HR, XR *eſt égale au grand axe* AB. Je décris le cercle circonſcrit ; & du centre O, je mene la droite OS à l'un des points S où le cercle coupe la tangente TS ; j'éleve en S la droite SX perpendiculaire ſur la tangente, laquelle paſſe par le foyer X, & je prolonge XS juſqu'à ce qu'elle rencontre en V la droite HR prolongée, l'angle SRV étant égal à l'angle

à l'angle TRH qui lui eſt oppoſé au ſommet, eſt par conſéquent égal à l'angle XRS, lequel eſt égal à l'angle TRH (*N.* 722.); ainſi les triangles rectangles XRS, SRV ſont ſemblables & égaux, à cauſe du côté commun RS, & partant XS = SV; or, par la définition des foyers on a XO = OH; donc la droite OS eſt paralelle à la droite HV, & les triangles ſemblables HXV, OXS, donnent HV. OS :: HX. OX : mais HX eſt double de OX, donc HV eſt auſſi double de OS : or, à cauſe des triangles rectangles ſemblables & égaux RXS, RSV, nous avons XR = RV; donc HV = HR + RV = HR + XR, & partant HR + RX eſt double de OS ou de OB, c'eſt-à-dire HR + RX = AB.

724. *Remarque.* Comme il n'eſt point de point R ſur la courbe de l'éllipſe auquel on ne puiſſe mener une tangente; il s'enſuit qu'il n'en eſt point auſſi où les droites HR, RX menées du foyer ne ſoient enſemble égales à l'axe. Ainſi on peut aiſément décrire une éllipſe dont le grand axe AB, & les foyers H, X ſont connus; car ſi l'on prend un fil égal à la longueur AB, & qu'ayant attaché ſes deux extrêmités aux deux foyers H, X, on tienne ce fil toujours tendu par le moyen d'un ſtile que l'on conduira autour des deux foyers juſqu'à ce qu'il revienne au même point d'où il étoit parti; la pointe du ſtile décrira une courbe élliptique, puiſqu'en quelque part R que ſe trouve cette pointe, on aura toujours HR + RX = AB.

725. *Definition.* Toute ligne droite qui paſſe par le centre d'une éllipſe, & qui ſe termine de part & d'autre à la courbe, ſe nomme *Diamétre*, parce qu'on peut aiſément trouver une infinité de lignes paralelles terminées de part & d'autre à la courbe qui ſeront coupées chacune en deux également par ce diamétre, comme il ſera dit plus bas.

726. Proposition CXXXVI. *Le grand axe* AB (Fig. 444.), *& un diamétre* RS *étant donnés, ſi par les ſommets* A, R, *on mene des tangentes* AZ, RP *qui ſe coupent en* X, *les triangles* PXA, ZXR, *faits par ces tangentes avec l'axe & le diamétre ſont égaux.*

Du point R, je mene l'ordonnée RM au grand axe AB, laquelle eſt paralelle à la tangente AZ, l'une & l'autre étant perpendiculaire ſur le grand axe AB; & du point A, je mene la droite AH paralelle à la tangente RP. A cauſe de la tangente RP, & de l'ordonnée RM menée du point d'attouchement, j'ai OM. OA :: OA. OP (*N.* 708.); or, les triangles ſemblables OMR, OAZ, donnent OR. OZ :: OM. OA; donc OR. OZ :: OA. OP,

& par conſéquent menant la droite RA, & la droite ZP, ces deux lignes RA, ZP ſont paralelles, & les triangles ARP, ARZ qui ſont entre ces deux paralelles, & qui ont la même baſe RA ſont égaux; donc en retranchant de l'un & de l'autre le triangle RXA, nous aurons PXA = ZXR.

727. COROLLAIRE. *Poſant les mêmes choſes, ſi du point d'attouchement* R *de la tangente* RP *menée par le ſommet du diamétre* RS *on mene l'ordonnée* RM *au grand axe, le triangle* RPM *fait par la tangente, l'ordonnée, & le grand axe, eſt égal au quadrilatere* ZAMR *fait par la tangente de l'axe, par l'ordonnée* RM, *& par l'axe & le diamétre.* Les triangles PXA, ZXR ſont égaux (*N.* 726.); ajoutant de part & d'autre la partie commune RXAM, nous aurons RPM = ZAMR.

Nota. Cette Propoſition & ſon Corollaire ſont de conſéquence pour bien entendre ce qui ſuit.

728. PROPOSITION CXXXVII. *Le grand axe* AB (Fig. 445, 446, 447, 448, 449.) *un diamétre* RS *étant donnés avec leurs tangentes* AZ, RP *menées par les ſommets, ſi par un point quelconque* E *pris ſur la courbe, on mene deux paralelles aux tangentes, le triangle* EHV *fait par ces deux paralelles, & le grand axe eſt égal au trapezoïde* AZTV *fait par la tangente du grand axe, & ſa paralelle* TV *compriſe entre l'axe & le diamétre; & le triangle* TEL *fait par les deux paralelles & le diamétre* RS *eſt égal au trapezoïde* RPHL *fait par la tangente de ce diamétre, & ſa paralelle compriſe entre l'axe & le diamétre.*

Il y a ici pluſieurs cas que nous allons examiner en commençant par le triangle fait par les deux paralelles avec l'axe AB.

Si le point E d'où l'on mene les paralelles TV, HL eſt entre l'axe & le diamétre (*Fig.* 445.); je ſçais que le triangle PRM eſt égal au trapezoïde ZAMR (*N.* 727.). Or, les triangles PRM, HEV étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues RM, EV; donc PRM. HEV :: $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$; mais par la nature de l'ellipſe, nous avons $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$ :: AM×MB. AV×VB (*N.* 689.), & à cauſe que AB eſt diviſé en deux également en O, & en deux inégalement en M, nous avons AM ×MB = $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$, & par la même raiſon AV×VB = $\overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$; donc PRM. HEV :: $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. $\overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$, & mettant au lieu des quarrés $\overline{AO}^2$, $\overline{MO}^2$ & $\overline{VO}^2$, les triangles ſemblables AZO,

VTO, MRO qui ſont en même raiſon, à cauſe que les droites AO, MO & VO ſont leurs côtés homologues, nous aurons PRM. HEV :: AZO—MRO. AZO — VTO, c'eſt-à-dire, PRM. HEV :: AZRM. AZTV; mais PRM=AZRM (*N.* 727.); donc HEV=AZTV.

Si le point E d'où l'on mene les paralelles (*Fig.* 446.) eſt entre le diamétre RS & le petit axe CD, les triangles ſemblables PRM, HEV donneront toujours PRM. HEV :: $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$, & nous aurons auſſi $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$ :: $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. $\overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$ :: AZO —MRO. AZO — VTO :: AZRM. AZTV; donc PRM. HEV :: AZRM. AZTV, & partant HEV = AZTV, à cauſe de PRM = AZRM.

Si le point E, d'où l'on mene les paralelles (*Fig.* 447.), eſt en deſſous du petit axe CD. La tangente AZ, & ſa paralelle EV ne formeront plus un trapezoïde; mais en menant à l'autre extrémité B du grand axe la tangente Bz qui coupe le diamétre RS en z, cette tangente formera avec ſa paralelle, l'axe & le diamétre, le trapezoïde VTzB. Or, les triangles ſemblables PRM, HEV, donneront toujours PRM. HEV :: $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$; & nous aurons auſſi $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$ :: $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. $\overline{OB}^2 - \overline{OV}^2$ :: AZO — MRO. OBz — OVT :: AZRM. VTzB; donc PRM. HEV :: AZRM. VTzB, & partant HEV = VTzB, à cauſe de PRM=AZRM.

Si le point E (*Fig.* 448.) eſt de l'autre côté du grand axe, on aura toujours PRM. HEV :: $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. $\overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$ :: AZO — MRO. AZO — VTO :: AZRM. AZTV; donc PRM. HEV :: AZRM. AZTV, & par conſéquent HEV = AZTV, de même que PRM = AZRM.

Enfin, ſi le point E eſt ſur le quart d'ellipſe DB (*Fig.* 449.); je mene par l'autre extrémité B de l'axe, la tangente Bz, & je trouve encore PRM. HEV :: $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$ :: $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. $\overline{BO}^2 - \overline{VO}^2$ :: AZO — MRO. BOz — VOT :: AZRM. BVTz, & par conſéquent HEV=BVTz, de même que PRM = AZRM. Venons au ſecond triangle.

Et premierement ſi le point E eſt entre l'axe & le diamétre (*Fig.* 445.), le triangle fait par les paralelles & le diamétre eſt TEL; or, PRM = AZRM, retranchant donc d'une part le triangle HEV, & de l'autre le trapezoïde AZTV = HEV, nous au-

rons PRIH + EVMI = TVMR, & retranchant la partie commune EVMI, nous aurons PRIH = TERI; & ajoutant de part & d'autre le triangle RIL, nous aurons PRLH = TEL.

Si le point E eſt entre le diamétre RS & le petit axe CD (*Fig.* 446.), le triangle fait par les paralelles & le diamétre RS eſt TEL. Par l'autre point *e* où la paralelle EH coupe l'ellipſe, je mene la paralelle *tu* à la tangente AZ de l'axe, ce qui donne H*eu* = AZ*tu* comme on vient de voir. Or HEV = AZTV; retranchant donc d'une part H*eu*, & de l'autre AZ*tu*, nous aurons *eu*EV = *tu*VT, & retranchant la partie commune *eu*VTL, il reſtera TEL = *te*L; or *te*L = RPHL; donc TEL = RPHL.

Si le point E eſt ſur le quart d'ellipſe CB (*Figure* 447.), je mene par l'autre extrêmité B du grand axe la tangente *zp* juſqu'à ce qu'elle rencontre le diamétre RS en *z* & la tangente PR prolongée en *p*. Les triangles rectangles ſemblables AZO, B*z*O ſont égaux, à cauſe de OB = AO, & les triangles AZO, PRO ſont auſſi égaux à cauſe de la partie commune ORXA & du triangle PAX égal au triangle ZXR (*N.* 726.) donc PRO = BO*z*, & ajoutant la partie commune R*p*BO, nous aurons P*p*B = R*pz*. Je retranche de part & d'autre la partie R*p*BVEL, & il reſte PRLH + HEV = VB*z*T + LET; or HEV étant le triangle fait par les paralelles avec l'axe eſt égal au trapezoïde VB*z*T; donc le triangle LET fait par les paralelles avec le diamétre eſt égal au trapezoïde PRLH.

Si le point E eſt de l'autre côté du grand axe ſur le quart d'ellipſe AD (*Fig.* 448.) je mene par l'autre extrêmité S du diamétre RS la tangente *zp* qui rencontre l'axe prolongé en *p*, & ſa tangente ZA prolongée en *z*. Ainſi je démontrerai comme dans le cas précédent que *pz*A = Z*z*S, & retranchant la partie commune S*z*AVEL, il reſtera *p*SLH + HEV = VAZT + LET. Or le triangle HEV fait par les paralelles, & l'axe eſt égal au trapezoïde VAZT; donc le triangle LET fait par les paralelles & le diamétre, eſt égal au trapezoïde *p*SHL.

Enfin ſi le point E eſt dans le quart d'ellipſe DB (*Fig.* 449.) menant par les extrêmités S, B du diamétre & de l'axe les tangentes S*p*, B*z*, on démontrera que le triangle LET fait par les paralelles & le diamétre, eſt égal au trapezoïde HLS*p*, de même que nous l'avons démontré à l'égard du triangle LET (*Fig.* 446.)

729. COROLLAIRE. *Toute ligne* Ee (Fig. 450.) *terminée de part*

& d'autre à la courbe de l'Ellipſe & paralelle à une tangente RP *menée à l'extrêmité d'un diamétre* SR *eſt coupée en deux également en* L *par ce diamétre, & par conſéquent elle en eſt la double ordonnée.* Des extrêmités E, *e* de la ligne E*e* je mene les droites ET, *et*, paralelles à la tangente ZA de l'axe & qui coupent le diamétre en T, *t*; ainſi à cauſe que les droites *et*, *e*L ſont paralelles aux tangentes AZ, RP, le triangle *et*L eſt égal au trapezoïde RPHL (*N.* 728.) & par la même raiſon le triangle ETL = RPHL; donc *et*L = ETL; or ces triangles ſont ſemblables; donc ils ſont parfaitement égaux, & nous avons *e*L = EL, & on démontrera la même choſe de quelque point E de l'ellipſe que ſoit menée la droite E*e* paralellement à RP, en obſervant ce qui a été dit ci-deſſus (*N.* 728.)

730. COROLLAIRE II. *Les quarrés des ordonnées* ET, IV. (Fig. 451.) *à un diamétre quelconque* RS, *ſont entr'eux comme les rectangles* RT × TS. RV × VS *des parties du diamétre que les ordonnées coupent.* Je prolonge les ordonnées juſqu'à ce qu'elles coupent l'axe en *t*, *u*, & des extrêmités E, I, je mene des droites EL, IH, paralelles à la tangente de l'axe. Les triangles ſemblables TEL, VIH donnent $\overline{TE}^2$. $\overline{VI}^2$ :: TEL. VIH. (*N.* 392.) or les droites EL, ET étant paralelles aux tangentes de l'axe & du diamétre, nous avons TEL = RP*t*T (*N.* 728.) & par la même raiſon VIH = RP*u*V; donc $\overline{TE}^2$. $\overline{VI}^2$ :: RP*t*T. RP*u*V; or RP*t*T = RPO — T*t*O & RP*u*V = RPO — V*u*O; donc $\overline{TE}^2$. $\overline{VI}^2$ :: RPO — T*t*O. RPO — V*u*O; & au lieu des triangles RPO, T*t*O, V*u*O mettant les quarrés $\overline{RO}^2$, $\overline{TO}^2$, $\overline{VO}^2$ qui ſont en même raiſon, à cauſe que les triangles étant ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues RO, TO, VO, nous aurons $\overline{TE}^2$. $\overline{VI}^2$ :: $\overline{RO}^2$ — $\overline{TO}^2$. $\overline{RO}^2$ — $\overline{VO}^2$. Or RS étant diviſé en deux également en O & en deux inégalement en T, nous avons $\overline{RO}^2$ — $\overline{TO}^2$ = RT × TS, & par la même raiſon $\overline{RO}^2$ — $\overline{VO}^2$ = RV × VS; donc $\overline{TE}^2$. $\overline{VI}^2$ :: RT × TS. RV × VS; & on démontrera la même choſe de quelques points de l'ellipſe que ſoient menées les ordonnées ET, IV, en obſervant ce qui a été dit ci-deſſus (*N.* 728.)

731. PROPOSITION CXXXVIII. *Deux diamétres* MN, RS,

(Fig. 452.) *étant donnés avec les tangentes au ſommet* MX, RX; *qui ſe coupent en* X, *ſi l'on mene la droite* RM *qui joint les points d'attouchement, & que du point* X *où les tangentes ſe coupent on mene par le milieu* L *de la droite* RM, *la droite* XO, *cette droite ſera un diamétre & paſſera par conſéquent par le centre* O.

Pour prouver que XO eſt un diamétre, il n'y a qu'à faire voir qu'elle coupera en deux également toutes les droites paralelles à RM qui ſeront terminées de part & d'autre à la courbe, & la démonſtration s'en fera de même que pour la parabole (*N.* 662.)

732. *Remarque.* Par le moyen de cette Propoſition, tout ce qui a été dit ci-deſſus à l'égard d'un axe & d'un diamétre peut ſe démontrer de même à l'égard de deux diamétres.

Soient par exemple les diamétres MN, RS (*Fig.* 453.) avec leurs tangentes MT, RP qui ſe coupent en X, je mene du ſommet M la droite MZ paralelle à la tangente RP, & par conſéquent ordonnée au diamétre RS (*N.* 729.) & du ſommet R la droite RH ordonnée au diamétre MN, je joints les points d'attouchement R, M par la droite TM, & coupant cette ligne en deux également en L, la droite XL eſt un diamétre (*N.* 731.) & paſſe par le centre O. Or à cauſe que RXME eſt un paralellogramme, & que ſa diagonale RM eſt coupée en deux également en L par la droite XL; il eſt clair que XL prolongée paſſe par l'angle E, & que XE eſt l'autre diagonale. Les triangles ſemblables OEH. OXM. donnent OH. OM :: OE. OX; & à cauſe des triangles ſemblables OEM, OXP nous avons OM. OP :: OE. OX; donc OH. OM :: OM. OP; de même les triangles ſemblables OEZ, OXR donnent OZ. OR :: OE. OX, & à cauſe des triangles ſemblables OER, OXT nous avons OR. OT :: OE. OX, & par conſéquent OZ. OR :: OR. OT, ce qui fait voir que la ligne OP eſt diviſée aux points H, M, en même raiſon que la ligne OT eſt diviſée aux points Z, R, & que par conſéquent les droites ZH, RM, TP ſont paralelles.

Donc, 1°. Un diamétre MN étant donné, ſi d'un point R on veut mener une tangente, il faut de ce point mener une ordonnée RH au diamétre MN, puis chercher une troiſiéme proportionnelle OP aux droites OH, OM, & le point P ſera le point où la tangente menée par R coupera le diamétre MN, ainſi c'eſt la même opération à faire à l'égard d'un diamétre qu'à l'égard de l'axe (*N.* 708.) Donc, 2°. Les triangles PXM, TXR

faits par les tangentes, & les diamétres ſont égaux; car à cauſe des paralelles TP, RM, les triangles PRM, TRM qui ont la baſe commune RM ſont égaux, & retranchant le triangle commun RXM il reſtera PXM = TXR.

Donc, 3°. Le triangle PRH eſt égal au trapezoïde MTRH; car les triangles PXM, TXR étant égaux, ſi on ajoute de part & d'autre la partie commune MXRH, on aura PRH = MTRH.

Donc, 4°. Si d'un point quelconque E (*Fig.* 454.) pris ſur la courbe on mene des droites DL, CF paralelles aux tangentes, le triangle LEC fait par ces paralelles, & le diamétre MN eſt égal au trapezoïde MTFC fait par la tangente MT de ce diamétre & ſa paralelle CF. Car menant par le point R l'ordonnée RH au diamétre, nous aurons PRH = MTRH. Or les triangles PRH, LEC étant ſemblables donnent PRH, LEC :: $\overline{RH}^2$. $\overline{CE}^2$ (*N.* 392.) & à cauſe que RH, CE ſont ordonnées au diamétre MN, nous avons $\overline{RH}^2$. $\overline{CE}^2$ :: MH × HN. MC × CN :: $\overline{MO}^2 - \overline{HO}^2$. $\overline{MC}^2 - \overline{CO}^2$ (*N.* 730.) donc PRH. LEC :: $\overline{MO}^2 - \overline{HO}^2$. $\overline{MC}^2 - \overline{CO}^2$; & au lieu des quarrés $\overline{MO}^2$, $\overline{HO}^2$, $\overline{CO}^2$, mettant les triangles ſemblables MTO, CFO, HRO qui ſont en même raiſon (*N.* 392.) nous aurons PRH. LEC :: MTO — HRO. MTO — CFO :: MTRH. MTFC; mais PRH = MTRH; donc LEC = MTFC.

De même le triangle FED fait par les deux paralelles & le diamétre RS eſt égal au trapezoïde RPLD fait par la tangente RP de ce diamétre & ſa paralelle DL. Ce que l'on démontrera de la même façon en menant du point M l'ordonnée MZ au diamétre RS.

733. PROPOSITION CXXXIX. *Deux diamétres* MN, RS (Fig. 455.) *étant donnés avec leurs tangentes* MT, RP. *Si de deux points* Q, V *pris ſur la courbe entre ces diamétres on mene des droites* QL, QK, VH, VF *paralelles aux tangentes, le trapezoïde* ELHV *fait par deux de ces paralelles* QL, VH *avec le diamétre* MN, *& la plus proche des deux autres* VF *eſt égal au trapezoïde* FEQK *fait par les deux autres paralelles* VF, QK *avec l'autre diamétre* RS *& la plus proche* QL *des deux autres paralelles; & le trapezoïde* QLHY *fait par les paralelles* QL, YH *avec le diamétre* MN *& la plus éloignée* YK *des deux autres paralelles eſt égale au trapezoïde* FVYK *fait par les deux autres paralelles* VF, YK *avec*

le diamétre RS *& la plus éloignée* YH *des paralelles.*

La démonſtration de ceci eſt la même que pour la parabole (*N.* 666. 667.)

734. PROPOSITION CXL. *Si deux lignes* HZ, TV (Fig. 456. 457. 458.) *qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe ſe coupent dans l'Ellipſe, le rectangle* HL × LZ *des parties de la premiere, eſt au rectangle* TL × LV *des parties de la ſeconde, comme le quarré de la tangente* MX *au ſommet du diamétre de la premiere, eſt au quarré de la tangente* RX *au ſommet du diamétre de la ſeconde.*

La démonſtration eſt la même que pour la parabole (*N.* 668.) pour les trois cas repréſentés par les figures 456. 457. 458.

735. PROPOSITION CXLI. *Si deux ſecantes* HZ, HV (Fig. 459.) *partent d'un même point extérieur* H, *le rectangle de la premiere* HZ *par ſa partie extérieure* HQ, *eſt au rectangle de la ſeconde* HV *par ſa partie extérieure* HL *comme le quarré de la tangente* RX *paralelle à la premiere, eſt au quarré de la tangente* MX *paralelle à la ſeconde.*

Même démonſtration que pour la parabole (*N.* 669.)

736. PROPOSITION CXLII. *Deux diamétres ou deux demi-diamétres* MO, RO (Fig. 460. 461.) *étant donnés avec leurs tangentes* MX, RX; *ſi l'on mene une double ordonnée* VZ *à l'un des diamétres* RO, *& qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre la tangente de l'autre diamétre en* H, *le rectangle* HZ × HV *de la ligne entiere* HZ *par la partie extérieure* HV *eſt au quarré de la partie* HM *qu'elle coupe ſur la tangente* MX, *comme le quarré de la tangente* RX *de ſon diamétre eſt au quarré de la tangente* MX *de l'autre diamétre.*

Même démonſtration que pour la parabole (*N.* 672.) pour les deux cas repréſentés par les figures 460. 461.

737. PROPOSITION CXLIII. *Deux ſegmens* AMB, CRD (Fig. 462. 463. 464.) *étant donnés, ſi les parties* ML, RH *de leurs diamétres compriſes dans ces ſegmens, ſont entr'elles comme leurs diamétres ou demi-diamétres* MO, RO, *les plus grands triangles inſcrits dans ces ſegmens ſont égaux.*

Je mene les droites RD, MB, ce qui donne des triangles RDH, MBL qui ſont les moitiés des plus grands triangles inſcrits dans les ſegmens à cauſe qu'ils ont leur ſommet aux ſommets R, M des diamétres, & que leurs baſes DH, BL ſont les moitiés des baſes DC, AB des ſegmens; ainſi ce que nous dirons

rons des triangles RDH, MBL ſe dira auſſi des plus grands triangles inſcrits. Or il peut ſe faire que les baſes AB, DC ſe coupent dans l'ellipſe (*Fig.* 462.) ou qu'elles ſe coupent en dehors (*Fig.* 463.) ou enfin qu'elles ſe coupent ſur la courbe (*Fig.* 464.)

Si les baſes AB, CD ſe coupent en dedans en V (*Fig.* 462.) je mene les tangentes MR, RX aux ſommets des diamétres ou demi-diamétres MO, RO, la droite RM qui joint les points d'attouchement, & les droites AC, HL, DB qui paſſent par les extrêmités & par les milieux des baſes AB, CD. Je coupe la droite RM en deux également, & par le point X où les tangentes ſe rencontrent, & le milieu de RM, je mene la droite XF, laquelle eſt un diamétre (*N.* 731.) & paſſe par le centre O. Or par la ſuppoſition nous avons ML. MO :: RH. RO; donc les triangles ROM, HOL ſont ſemblables, & les baſes RM, HL ſont paralelles, & comme la baſe RM du triangle RMO eſt coupée en deux également par la droite XO qui paſſe par le ſommet O, la baſe HL du triangle HOL ſera auſſi coupée en deux également en S par la même droite XO; d'autre part à cauſe des paralelles RM, HL & des tangentes RX, XM paralelles aux doubles ordonnées DC, AB, les triangles RXM, HVL ſont ſemblables, & à cauſe que la droite XF qui coupe la baſe RM du triangle RXM en deux également & qui paſſe par ſon ſommet X, coupe auſſi la baſe HL du triangle HVL en deux également & fait l'angle XSH égal à l'angle XVR, il faut néceſſairement que cette droite XF paſſe auſſi par le ſommet V du triangle HVL; ainſi nous avons VL. HV :: XM. RX, & partant $\overline{VL}^2.\overline{HV}^2 :: \overline{XM}^2.\overline{RX}^2$. Or à cauſe que les baſes AB, CD des ſegmens ſe coupent en dedans de l'ellipſe, nous avons $AV \times VB.\ CV \times VD :: \overline{MX}^2.\ \overline{RX}^2$ (*N.* 734.) donc $AV \times VB.\ CV \times VD :: \overline{VL}^2.\ \overline{HV}^2$; mais à cauſe des baſes AB, CD diviſées en deux également en L & H, & en deux inégalement en V, nous avons $AV \times VB = \overline{AL}^2 - \overline{VL}^2$, & $CV \times VD = \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2$; donc $\overline{AL}^2 - \overline{VL}^2 :: \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2 :: \overline{VL}^2.\ \overline{HV}^2$, ou $\overline{AL}^2 - \overline{VL}^2.\ \overline{VL}^2 :: \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2.\ \overline{HV}^2$, & compoſant, nous aurons $\overline{AL}^2.\ \overline{VL}^2 :: \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2 + \overline{HV}^2.\ \overline{HV}^2$, c'eſt-à-dire $\overline{AL}^2.\ \overline{VL}^2 :: \overline{CH}^2.\ \overline{HV}^2$, & partant AL. VL :: CH. HV; d'où il ſuit

que les droites HL, AC ſont paralelles. Or AL = LB, & CH = DH; donc LB. VL :: DH. HV; ainſi les droites DB, HL ſont paralelles, & par conſéquent les quatre lignes AC, RM, HL, DB ſont paralelles & diviſées chacune en deux également par la droite XF; d'où il ſuit que les trapezoïdes RMBD, RMLH, LHDB ſont auſſi diviſés chacun en deux également par la même droite XF. Retranchant donc du trapezoïde RMBD, d'un côté le trapezoïde RVSH, & le trapezoïde HSFD, & de l'autre le trapezoïde VMLS = RVSH, & le trapezoïde LSFB = HSFD, il reſtera d'une part le triangle RHD égal au triangle MLB de l'autre.

Si les baſes AB, CD (*Fig.* 463.) ſe coupent en T hors de l'Ellipſe, je fais la même conſtruction que ci-deſſus, & je démontrerai de la même façon que les droites RM, HL ſont paralelles entr'elles & coupées en deux également par le diamétre XO; que ce diamétre paſſe par le point T, & que nous aurons $\overline{TL}^2$. $\overline{TH}^2$ :: $\overline{MX}^2$. $\overline{RX}^2$, à cauſe que les triangles ſemblables LTH, MXR donnent TL. TH :: MX. RX; or les ſecantes TB, TD donnent TB × TA. TD × TC :: $\overline{MX}^2$. $\overline{RX}^2$; donc TB × TA. TB × TC :: $\overline{TL}^2$. $\overline{HT}^2$. Mais TB × TA = $\overline{TL}^2 - \overline{AL}^2$, & TD × TC = $\overline{TH}^2 - \overline{CH}^2$; donc $\overline{TL}^2 - \overline{AL}^2$. $\overline{TH}^2 - \overline{CH}^2$ :: $\overline{TL}^2$. $\overline{HT}^2$, ou $\overline{TL}^2$. $\overline{TL}^2 - \overline{AL}^2$ :: $\overline{TH}^2$. $\overline{TH}^2 - \overline{CH}^2$, & diviſant $\overline{TL}^2$. $\overline{TL}^2 - \overline{TL}^2 + \overline{AL}^2$ :: $\overline{TH}^2$. $\overline{TH}^2 - \overline{TH}^2 + \overline{CH}^2$, c'eſt-à-dire $\overline{TL}^2$. $\overline{AL}^2$ :: $\overline{TH}^2$. $\overline{CH}^2$, & partant TL. AL :: TH. CH, ce qui rend les lignes HL, CA paralelles; & comme à cauſe de AL = LB & de CH = HD nous avons TL. LB :: TH. HD, les lignes DB, HL ſont auſſi paralelles; ainſi les quatre lignes CA, RM, HL, DB ſont paralelles & diviſées chacune en deux également par le diamétre XF, & par conſéquent les trapezoïdes RMDB, RMLH, & HLBD ſont auſſi diviſés chacun en deux également par ce même diamêtre. Achevant donc le reſte comme ci-deſſus, nous trouverons auſſi RDH = MBL.

Enfin ſi les baſes AB, CD (*Fig.* 464.) ſe coupent ſur la courbe, je fais la même conſtruction, & les droites RM, HL ſont paralelles & diviſées chacune en deux également par la droite XF. Or AL = LB, & AH = HD; donc AL. AB :: AH. AD,

& par conſéquent les droites DB, HL ſont paralelles & diviſées chacune en deux également par le diamétre XF. Ainſi les trapezoïdes RMDB, RMLH & HLBD ſont auſſi diviſés chacun en deux également par ce même diamétre, & partant achevant le reſte comme ci-deſſus, on aura RDH = MBL.

738. *Definition.* Un diamétre RS (*Fig.* 465.) étant donné avec ſa tangente RT; ſi par le centre O on mene un diamétre MN paralelle à la tangente, ce diamétre MN ſe nomme diamétre conjugué du diamétre RS.

739. Proposition CXLIV. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* HE (Fig. 465.) *à un diamétre* RS *eſt au rectangle* RH × HS *des parties de ce diamétre qu'elle coupe comme le quarré du diamétre* MN *conjugué du diamétre* RS, *eſt au quarré du diamétre* RS.

Les droites HE, MO étant ordonnées au diamétre RS, nous avons $\overline{EH}^2$. RH × HS :: $\overline{MO}^2$. RO × OS (*N.* 730.) mais RO = OS; donc $\overline{EH}^2$. RH × HS :: $\overline{MO}^2$. $\overline{RO}^2$; or $\overline{MO}^2$. $\overline{RO}^2$ :: $\overline{MN}^2$. $\overline{RS}^2$; donc $\overline{EH}^2$. RH × HS :: $\overline{MN}^2$. $\overline{RS}^2$.

740. Proposition CXLV. *Toute ligne* EF *qui ſe termine de part & d'autre à la courbe* (Fig. 465.) *& qui eſt paralelle à un diametre* RS, *eſt coupée en deux également par le diamétre* MN *conjugué du damétre* RS.

Par les extrêmités E, F de la droite EF, je mene au diamétre RS les ordonnées EH, FL, leſquelles ſont paralelles & égales entr'elles à cauſe des paralelles EF, RS. Or nous avons $\overline{HE}^2$. RH×HS :: $\overline{LF}^2$. RL × LS (*N.* 730.) & $\overline{HE}^2 = \overline{LF}^2$, à cauſe de HE = LF; donc RH × HS = RL × LS; mais RH × HS = $\overline{RO}^2 - \overline{HO}^2$ & RL × LS = $\overline{SO}^2$ ou $\overline{RO}^2 - \overline{LO}^2$; donc $\overline{RO}^2 - \overline{HO}^2 = \overline{RO}^2 - \overline{LO}^2$, & par conſéquent $\overline{HO}^2 = \overline{LO}^2$ & HO = LO; mais à cauſe des paralelles HE, MO, LF, & EF, RS, nous avons HO = EV & LO = VF; donc EV = VF.

741. Corollaire. Donc toutes les paralelles au diamétre RS ſont des doubles ordonnées à ſon diamétre conjugué MN, & par conſéquent la tangente TQ menée par le ſommet M eſt paralelle au diamétre RS, d'où il ſuit que le diamétre RS eſt le diamétre conjugué de ſon conjugué MN, & que le quarré d'une ordonnée quelconque EV au diamétre MN eſt au rectangle MV.

× VN des parties de ce diamétre qu'elle coupe comme le quarré du diamétre RS eſt au quarré du diamétre MN.

742. PROPOSITION CXLVI. *Les deux axes* AB,CD (Fig. 466.) *& deux diamétres conjugués* MN, RS *étant donnés, le rectangle* PQTV *des deux axes, c'eſt-à-dire le rectangle fait par les quatre tangentes des deux axes, eſt égal au paralellogramme des deux diamétres, c'eſt-à-dire au paralellogramme* XZHL *fait par les tangentes des diamétres.*

Le ſegment ADB coupé par le grand axe AB, & le ſegment MSN coupé par le diamétre MN, ont les parties OD, OS de leurs diamétres compriſes entre la courbe & leurs baſes AB, MN proportionnelles à ces mêmes diamétres; car OD. OC :: OS. OR; donc les plus grands triangles ADB, MSN inſcrits dans ces ſegmens ſont égaux (*N.* 737.) or le triangle ADB eſt la moitié du rectangle AQTB, de même baſe & de même hauteur, & le triangle MSN eſt la moitié du paralellogramme MHLN; donc le rectangle AQTB eſt égal au paralellogramme MHLN, & par conſéquent le rectangle PQTV double de AQTB eſt égal au parallellogramme XZLH double du paralellogramme MHLN.

743. COROLLAIRE. *Poſant les mêmes choſes; ſi de l'extrêmité* D *du petit axe* (Fig. 467.) *on mene une ordonnée* DV *au diamétre* MN, *& que de l'extrêmité* S *de l'autre diamétre conjugué* RS *on mene une ordonnée* SL *au grand axe* AB, *je dis que le diamétre* MN *& le grand axe ſeront coupés en même raiſon en* V *&* L *par leurs ordonnées* DV. SL. Je prolonge l'ordonnée DV juſqu'à ce qu'elle coupe en Y la tangente SY du diamétre RS conjugué de MN, & l'ordonnée LS juſqu'à ce qu'elle coupe en X la tangente DT du petit axe, & je mene DS. Le triangle ODS eſt la moitié du paralellogramme OVYS de même baſe & de même hauteur, & le même triangle eſt auſſi la moitié du rectangle ODXL; donc le paralellogramme OVYS eſt égal au rectangle ODXL; or le paralellogramme OMHS étant le quart du paralellogramme des diamétres conjugués MN, RS eſt égal au rectangle ODTB qui eſt le quart du rectangle des deux axes (*N.* 742.) donc les paralellogrammes OMHS, OVYS ſont entr'eux en même raiſon que les rectangles ODTB, ODXL qui leur ſont égaux chacun à chacun; mais les paralellogrammes OMHS, OVYS ayant la hauteur commune OS ſont entr'eux comme leurs baſes OM, OV, & les rectangles ODTB, ODXL ayant la hau-

teur commune OD ſont entr'eux comme leurs baſes OB, OL; donc OM. OV :: OB. OL, & partant OM. OM — OV :: OB. OB — OL, ou OM. MV :: OB. BL; & doublant les antécedens, nous aurons MN. MV :: AB. BL; & enfin diviſant MN — MV. MV :: AB — BL. BL, ou NV. MV :: AL. BL.

744. COROLLAIRE II. *Poſant encore les mêmes choſes; ſi de l'extrêmité* M *du diamétre* MN (Fig. 468.) *on mene l'ordonnée* MH *au petit axe, & de l'extrêmité* S *de l'autre diamétre conjugué, l'ordonnée* SL *au grand axe, les deux axes ſeront coupés proportionnellemet aux points* H, L. Je prolonge le diamétre MN juſqu'à ce qu'il coupe en T la tangente DT du petit axe, & du point D je mene l'ordonnée DV à ce diamétre. Les triangles ſemblables ODT, OHM donnent OD. OH :: OT. OM; mais à cauſe de la tangente DT & de l'ordonnée DV menée du point d'attouchement, nous avons OV. OM :: OM. OT, ou OT. OM :: OM. OV; donc OD. OH :: OM. OV; mais OM. OV :: OB. OL (*N.* 743.) donc OD. OH :: OB. OL.

745. COROLLAIRE III. *Poſant encore les mêmes choſes, le quarré de l'ordonnée* MH (Fig. 468.) *au petit axe menée du ſommet du diamétre* MN, *eſt égal au rectangle* BL × LA *des parties du grand axe coupées par l'ordonnée* SL *menée du ſommet du diamétre conjugué* RS, *& réciproquement, le quarré de l'ordonnée* LS *eſt égal au rectangle* CH × HD *des parties du petit axe que l'ordonnée* MH *coupe.* Les deux axes étant coupés proportionnellement en H & L (*N.* 744.) nous avons DH, DC :: BL. BA, & CH. DC :: AL. AB; multipliant donc enſemble les termes de ces deux proportions, nous aurons DH × CH. $\overline{DC}^2$ :: BL × AL. $\overline{AB}^2$, ou DH × CH. BL × AL :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AB}^2$; or par la nature de l'ellipſe nous avons $\overline{LS}^2$. BL × AL :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AB}^2$; donc $\overline{LS}^2$. BL × AL :: DH × CH. BL × AL; & partant à cauſe des conſéquens égaux, nous aurons $\overline{LS}^2$ = DH × CH.

De même nous avons $\overline{MH}^2$. DH × CH :: $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$, ou DH × CH. $\overline{MH}^2$ :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$; mais nous avons trouvé DH × CH. BL × AL :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AB}^2$; donc DH × CH. $\overline{MH}^2$ :: DH × CH. BL × AL, & par conſéquent $\overline{MH}^2$ = BL × AL.

746. COROLLAIRE IV. *Posant encore les mêmes choses* (Fig. 468.) *les quarrés des diametres conjugués* MN, RS, *sont ensemble égaux aux quarrés des deux axes pris ensemble.* Le triangle rectangle OMH donne $\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{MH}^2$; mais (*N.* 745.) $\overline{MH}^2 = BL \times AL$; donc $\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + BL \times AL$; de même dans le triangle rectangle OSL, nous avons $\overline{OS}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LS}^2$, mais $\overline{LS}^2 = CH \times HD$, donc $\overline{OS}^2 = \overline{OL}^2 + CH \times HD$, & partant $\overline{OM}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{OH}^2 + BL \times AL + \overline{OL}^2 + CH \times HD$; mais à cause que l'axe AB est divisé en deux également en O, & en deux inégalement en L, nous avons $BL \times AL + \overline{OL}^2 = \overline{BO}^2$, & par la même raison $CH \times HD + \overline{OH}^2 = \overline{OD}^2$; donc $\overline{OM}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OD}^2$. Donc, &c.

747. COROLLAIRE V. *Si des extrémités* M, R *des diamétres conjugués* MN, RS (Fig. 469.) *on mene des ordonnées au grand axe, le rectangle* AF × FB *des parties que l'une des ordonnées coupe, est égal au quarré de la distance* LO *de l'autre ordonnée au centre* O. Du point M, je mene au petit axe l'ordonnée MV, & par conséquent le quarré de cette ordonnée est égal au rectangle AF×FB; mais MV = LO, donc $\overline{LO}^2 = AF \times FB$, & on prouvera de même que $\overline{FO}^2 = AL \times LB$.

748. PROPOSITION CXLVII. *Il y a toujours deux diamétres conjugés égaux dans une Ellipse, & tous les autres diamétres conjugués, sont inégaux.*

Soit l'ellipse ADCB (*Fig.* 470.) dont le grand axe est AB, & le petit est CD; je joins les extrêmités de ces axes par les droites AD, DB, BC, AC; ce qui me donne un paralellogramme ABCD, dont les quatre côtés sont égaux. Je mene par le centre O la droite NM paralelle au côté CA, ce qui divise le paralellogramme ABCD en deux paralellogrammes égaux AHCL, HDBL, car les triangles semblables AOH, BOL sont égaux, à cause du côté AO égal au côté OB, par la même raison les triangles semblables AOC, DOB sont égaux, & les triangles semblables COL, HOD le sont aussi, à cause du côté CO égal au côté OD; ainsi les paralellogrammes AHCL, HDBL étant composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun sont égaux entr'eux; or, ces paralellogrammes étant entre les paralelles AD, CB ont la même hauteur; donc la base CL

doit être égale à la baſe LB, & par la même raiſon, nous avons AH = HD; donc MN diviſe en deux également les deux droites CB, AD paralelles entr'elles, & qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe, & par conſéquent MN eſt un diamétre. On prouvera de la même façon que ſi du centre O, on mene une ligne RS paralelle au côté AD du paralellogramme ABCD, cette ligne RS ſera auſſi un diamétre, lequel ſera conjugué du diamétre MN, à cauſe qu'il eſt paralelle aux ordonnées AH, CL de ce diamétre. Or, les lignes AD, AC étant égales, leurs moitiés AH, AP le ſont auſſi, & par conſéquent le paralellogramme AHOP eſt compoſé de quatre côtés égaux; d'où il ſuit que les triangles AHO, APO qui ont le côté AO commun, & les côtés AH, OH, égaux entr'eux, & aux côtés AP, PH ſont parfaitement égaux, & que l'angle AOH eſt égal à l'angle AOP; concevant donc que la demi-ellipſe ADB ſoit miſe ſur ſon égale ACB, enſorte que l'angle droit AOD tombe ſur l'angle droit AOC, la courbe ADB tombera ſur la courbe ACB, l'angle AOM ſur ſon égal AOR, & le côté OM ſera égal au côté OR; or, MN eſt double de ON (*N.* 696.), & OR double de RS, donc les diamétres conjugués MN, RS ſont égaux.

Maintenant concevons deux autres diamétres conjugués quelconques différens des diamétres conjugués & égaux MN, RS que nous venons de trouver (*Fig.* 471.), l'un des deux coupera les quarts d'ellipſe AC, ou entre R & A ou entre R & C; ſupſons qu'il le coupe entre R & A en T, & que ce diamétre ſoit la droite TV, qui par conſéquent eſt plus grande que RS (*N.* 705.); je mene par les points R, T les tangentes RX, TZ, leſquelles ſe couperont en quelque point Y entre les points d'attouchement R, T (*N.* 710.); c'eſt pourquoi ſi je prolonge la tangente YTZ, & le diamétre NM paralelle à la tangente RX, la tangente YZL, coupera en L le diamétre NM, & l'angle QZL extérieur au triangle ZOL ſera plus grand que l'angle intérieur AOL; or, le diamétre HP conjugué du diamétre TV étant paralelle à la tangente TZ, les angles QZL, QOH du même côté ſont égaux; donc l'angle QOH ou AOH eſt plus grand que l'angle QOL ou ZOL ou AOM, & par conſéquent MO eſt plus grand que HO (*N.* 705.), & MN plus grand que HP; or, TV eſt plus grand que RS ou que ſon égale MN; donc à plus forte raiſon TV eſt plus grand que ſon conjugué HP.

On prouvera de même que ſi l'un des diamétres conjugués

paſſe entre R & C, auquel cas il ſera moindre que RS, ſon conjugué ſera plus grand que MN égal à RS.

749. COROLLAIRE. *Les deux diamétres conjugués & égaux* MN, RS (Fig. 472.) *étant donnés dans une Ellipſe, le quarré d'une ordonnée quelconque* PH *à l'un de ces diamétres* MN *eſt égal au rectangle* MH×HN *des parties de ce diamétre que l'ordonnée coupe.* Car nous avons $\overline{PH}^2$. MH × HN :: $\overline{RS}^2$. $\overline{MN}^2$; or, à cauſe de RS = MN, nous avons auſſi $\overline{RS}^2 = \overline{MN}^2$; donc $\overline{PH}^2 = MH \times HN$.

750. *REMARQUE.* La proprieté de l'ellipſe à l'égard des diamétres conjugués, eſt donc la même que celle du cercle, & il n'y a de différence qu'en ce que dans le cercle l'ordonnée eſt toujours perpendiculaire à ſon diamétre, au lieu que dans l'ellipſe l'angle PHM (*Fig.* 472.) fait par l'ordonnée avec l'un des deux diametres conjugués & égaux, eſt toujours aigu; car cet angle eſt égal à l'angle ROM fait par les deux diamétres. Or, l'angle ROM (*Fig.* 470.) eſt égal à l'angle CBD du paralellogramme ADBC, & l'angle CBD eſt aigu, comme je vais le démontrer; donc l'angle PHM (*Fig.* 472.) eſt auſſi aigu.

Pour montrer donc que l'angle CBD (*Fig.* 470.) eſt aigu, il n'y a qu'à obſerver que les deux triangles iſoſceles CBD, ACB ont les côtés CB, BD égaux chacun à chacun aux côtés AC, CB; or, la baſe CD du premier eſt moindre que la baſe AB du ſecond; donc l'angle CBD eſt moindre que l'angle ACB; or, dans le paralellogramme ACBD, les deux angles CBD, ACB valent enſemble deux droits; donc CBD vaut moins d'un droit, & ACB en vaut davantage.

751. PROPOSITION CXLVIII. *L'axe & un diamétre ou deux diamétres* MN, HL (Fig. 473.) *qui ne ſont pas conjugués entr'eux, étant donnés, ſi par les extrêmités de ces diamétres on mene quatre tangentes* TR, PE *&* TP, RE *qui ſe coupent en* T, R, E, P, *les deux tangentes* TR, PE *menées par les extrêmités du diamétre* MN *ſeront coupées en* M *&* N *chacune en deux parties égales chacune à chacune, c'eſt-à-dire* TM = NE, *&* MR = NP, *& de même les deux tangentes* TP, RE *ſeront auſſi coupées chacune en deux parties égales chacune à chacune.*

Je mene les droites HM, NL, qui joignent les extrêmités des deux diamétres, & à cauſe que MO. MN :: HO. HL, les droites HM, NL ſont paralelles entr'elles. Du point T où les tangentes HT,

tes HT, MT ſe coupent, je mene par le milieu S de la droite HM la ligne TE qui eſt un diamétre (*N.* 731.), & qui par conſéquent coupe auſſi en deux également la droite NL paralelle à HM, d'où il ſuit que ce diamétre eſt le même que celui que l'on meneroit du point E où les deux tangentes NE, EL ſe coupent par le milieu Z de la droite NL qui joint les points d'attouchement NL. Or, les tangentes TR, PE étant paralelles entr'elles, à cauſe qu'elles doivent être paralelles aux ordonnées du diamétre MN; il eſt clair que les triangles TMO, NOE ſont ſemblables, & de plus égaux, à cauſe du côté MO égal au côté NO; donc TM = NE; mais TR = PE, à cauſe du paralellogramme TREP; donc TR — TM ou MR = PN.

De même les triangles ſemblables HTO, EOL ayant le côté HO égal au côté OL ſont parfaitement égaux, & par conſéquent HT = EL; or, PT = ER, donc PH = LR.

752. COROLLAIRE. *Poſant les mêmes choſes, je dis que le rectangle* TM×MR (Fig. 474.) *des deux parties de la tangente* TR *au ſommet* M *du diamétre* MN *eſt égal au quarré du demi-diamétre* OZ *conjugué de* MN, *& que le rectangle* TH×HP *des parties de la tangente* TP *au ſommet* H *du diamétre* HL *eſt égal au quarré du demi-diametre* OE *conjugué de* HL.

Je prolonge la tangente PT juſqu'à ce qu'elle rencontre le diamétre MN prolongé en B, & du point d'attouchement menant l'ordonnée HC au diamétre MN, j'ai OC. OM :: OM. OB (*N.* 732.) ou OB. OM :: OM. OC, donc OB — OM. OB :: OM — OC. OM, c'eſt-à-dire BM. OB :: MC. MO, ou BM. MC :: BO. MO, & partant BM. BM + MC :: BO. BO + MO, c'eſt-à-dire BM. BC :: BO. BO + MO; mais à cauſe de MO = ON, nous avons BO + MO = BO + ON = BN, donc BM. BC :: BO. BN; or, les triangles BMT, BCH, BOX, BNP étant ſemblables, leurs baſes TM, HC, XO, PN ſont en même raiſon que les côtés BM, BC, BO, BN; donc TM. HC :: XO. PN, & partant TM×PN = HC×XO; mais en menant du point d'attouchement H, l'ordonnée HQ au demi-diamétre conjugué OZ, laquelle ſera paralelle à MN, nous aurons OQ. OZ :: OZ. OX, & à cauſe des paralelles HQ, CO, les paralelles HC, QO ſont égales; donc HC. OZ :: OZ. OX, d'où je tire HC×OX $= \overline{OZ}^2$, & par conſéquent TM×PN $= \overline{OZ}^2$, mais PN = MR

(*N.* 751.), donc TM×MR=$\overline{OZ}^2$, & on démontra de la même façon que TH×HP=$\overline{OE}^2$.

753. *Remarque.* De ce qui vient d'être dit dans le Corollaire précédent, nous tirerons cette Régle ou Théoreme. *Si une ligne droite* OB *eſt diviſée en* C *&* M, *de façon qu'on ait* OC. OM :: OM. OB, *& qu'on lui ajoute du côté de* O *une droite* ON *égale à la moyenne proportionnelle* OM, *on aura* BM. BC :: BO. BN. Car c'eſt ce que nous venons de trouver dans ce Corollaire, & de ce premier Théoreme, j'en tire un ſecond qui n'eſt pas moins important; ſçavoir, *Si une ligne* OB *eſt diviſée en* C *&* M, *de façon qu'on ait* OC. OM :: OM. OB, *& qu'on lui ajoute du côté de* O *une droite* ON *égale à la moyenne proportionnelle* OM; *la ligne entiere* OB *ſera diviſée harmoniquement aux points* M, C, *& l'on aura* BM. MC :: BN. CN. Ce que je prouverai ainſi

Par la ſuppoſition, nous avons OC. OM :: OM. OB ou OB. OM :: OM. OC; donc BO—OM. OM :: OM—OC. OC, c'eſt-à-dire BM. OM :: MC. OC, ou BM. MC :: OM. OC; de même à cauſe de BO. OM :: OM. OC, nous avons BO +OM. OM :: OM+OC. OC; mais OM=ON, donc BN. OM :: CN. OC, ou BN. CN :: OM. OC; mais nous venons de trouver BM. MC :: OM. OC, donc BM. MC :: BN. CN.

Et de-là il eſt aiſé de prouver l'inverſe de ce ſecond Théoreme, c'eſt-à-dire, que *ſi une ligne* BN *eſt diviſée harmoniquement aux points* M, C, *& qu'on diviſe la ſomme* MN *de deux de ſes parties de ſuite* NC, CM *en deux également en* O, *on aura toujours* OC. OM :: OM. OB, & BM. BC :: BO. BN; car puiſque BM. MC :: BN. CN, donc BN. BM :: CN. MC, & partant BN+BM. BM :: CN+MC. MC; or, BN=NM+MB, & CN+MC =MN; donc NM+2BM. BM :: MN. MC, & prenant les moitiés des antécedens, nous aurons OM+MB. BM :: OM. MC, ou OB. BM :: OM. MC; donc OB—BM. OB :: OM—MC. OM, c'eſt-à-dire OM. OB :: OC. OM, ou OC. OM :: OM. OB; après quoi, à cauſe de ON égal à la moyenne proportionnelle, on aura comme ci-deſſus BM. BC :: BO. BN.

754. Probleme. *Une Ellipſe* ACBD (Fig. 475.) *étant donnée, trouver ſon centre, ſes deux axes, & ſes foyers.*

Je mene des lignes HL, PQ, &c. paralelles entr'elles, & qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe; je les diviſe chacun en deux également aux points R, S, &c. & faiſant paſſer une

ligne droite MN par les points R, S, &c. cette ligne eſt un diamétre, & par conſéquent le point O qui coupe cette ligne en deux également eſt le centre, & ſi les droites HL, PQ, &c. ſont perpendiculaires ſur MN, cette droite MN ſera l'un ou l'autre des deux axes.

Mais ſi cela n'eſt pas. Je décris du centre O un cercle qui coupe la courbe en quelque point T, ainſi le rayon OT de ce cercle eſt moindre que le demi-grand axe; car le cercle qui a pour rayon le grand axe, eſt circonſcrit à l'ellipſe & ne la coupe point, & ce même rayon OT eſt plus grand que le demi-petit axe, à cauſe que le cercle qui auroit pour rayon le demi-petit axe eſt inſcrit, & ne coupe pas non plus la courbe; donc le cercle du rayon OT doit couper l'ellipſe en quatre points T, X, Z, Y (*N.* 707.). Je mene par ces quatre points les droites TX, XZ, ZY, YT, & les coupant chacune en deux également, je mene par les points de diviſion les droites AB, DC qui ſe terminent à la courbe, & ces deux droites ſont les deux axes (*N.* 707.), & par conſéquent la plus grande AB eſt le plus grand axe, & l'autre eſt le petit.

Je prens avec le compas la grandeur AO du demi-grand axe, & de l'extrêmité D du petit axe, je décris un arc qui coupe le grand axe aux points F, V qui ſont les foyers (*N.* 719.).

755. PROBLEME. *Meſurer une Ellipſe* (Fig. 476.).

Je décris le cercle circonſcrit que je meſure, de même que l'axe & le petit axe; après quoi, je dis par Régle de Trois: le grand axe eſt au petit axe, comme le cercle circonſcrit eſt à un quatriéme terme qui ſera la valeur de l'ellipſe; car puiſque la ſomme des ordonnées du demi-cercle AEB eſt à la ſomme des ordonnées correſpondantes au grand axe de la demi-ellipſe ADB, comme le grand axe eſt au petit axe (*N.* 703.); il eſt clair que le cercle entier eſt à l'ellipſe entiere, auſſi comme le grand axe eſt au petit axe.

Ou bien je décris le cercle inſcrit que je meſure, & je dis par Regle de Trois; le petit axe eſt au grand, comme le cercle inſcrit eſt à un quatriéme terme qui ſera l'ellipſe; car puiſque la ſomme des ordonnées du demi-cercle CRD ou le demi-cercle CRD eſt à la ſomme des ordonnées au petit axe CD de la demi-ellipſe CAD ou à la demi-ellipſe CAD, comme le petit axe eſt au grand axe (*N.* 703.). Il s'enſuit que le cercle entier

inſcrit CRDT eſt à l'ellipſe entiere, comme le petit axe eſt au grand.

Ou bien encore, je prens les valeurs en nombre du cercle circonſcrit, & du cercle inſcrit, & le nombre moyen proportionnel Géometrique, entre ces deux nombres eſt la valeur de l'ellipſe (*N.* 703.), c'eſt-à-dire qu'en multipliant les valeurs des deux cercles l'une par l'autre, & tirant la racine quarrée du produit, cette racine ſera l'ellipſe.

756. PROBLEME. *Meſurer un ſegment d'Ellipſe* rAR *coupé par une double ordonnée* rR *au grand axe* (Fig. 477.).

Je décris le cercle circonſcrit ANB*n*, & je prolonge *r*R de part & d'autre juſqu'à ce qu'elle coupe la circonférence du cercle en *n*, N, ce qui me donne le ſegment de cercle *n*AN que je meſure; enſuite, je dis par Regle de Trois : le grand axe eſt au petit, comme le ſegment de cercle *n*AN eſt à un quatriéme terme qui ſera le ſegment *r*AR; car chaque ordonnée HT du demi-ſegment circulaire ANM, eſt à chaque ordonnée HS du demi-ſegment elliptique ARM comme OE, OC, ou comme le grand axe au petit axe (*N.* 689.); donc la ſomme des ordonnées au demi-ſegment circulaire ou le demi-ſegment ANM eſt à la ſomme des ordonnées au demi-ſegment ARM, ou au demi-ſegment ARM, comme le grand axe eſt au petit axe, & par conſéquent le ſegment entier *n*AN eſt au ſegment entier *r*AR dans la même raiſon.

757. PROBLEME. *Meſurer un ſecteur Elliptique* rARO (Fig. 477.) *dont la corde* rR *eſt double ordonnée au grand axe.*

Je prolonge la corde *r*R juſqu'à ce qu'elle coupe de part & d'autre la circonférence du cercle circonſcrit en *n*, N, & de ces points, je mene au centre O des droites *n*O, NO, ce qui me donne un ſecteur de cercle *n*ANO que je meſure; enſuite je dis par Regle de Trois : le grand axe eſt au petit comme le ſecteur circulaire *n*ANO eſt à un quatriéme terme qui ſera le ſecteur elliptique *r*ARO. Car le demi-ſegment circulaire ANM eſt au demi-ſegment elliptique ARM comme le grand axe eſt au petit (*N.* 756.), & les triangles MNO, MRO ayant la hauteur commune, ſont entr'eux comme leurs baſes MN, MR, ou comme OE eſt à OC, ou enfin, comme le grand axe au petit; donc le demi-ſegment ANM, plus le triangle MNO, c'eſt-à-dire le demi-ſecteur circulaire ANO eſt au demi-ſegment ARM, plus le triangle MRO, c'eſt-à-dire au demi-ſecteur ARO, comme le grand

axe au petit, & par conſéquent le ſecteur entier *n*ANO eſt au ſecteur entier *r*ARO, comme le grand axe eſt au petit.

758. *Remarque.* Si le ſegment elliptique *r*CR (*Fig.* 478.) étoit fait par une double ordonnée *r*R au petit axe, on décriroit le cercle inſcrit C*n*DN, & l'on diroit par Regle de Ttois: le petit axe eſt au grand comme le ſegment circulaire NC*n* eſt à nn quattiéme terme qui ſeroit le ſegment elliptique *r*CR. De même pout avoir le ſecteur *r*CRO, on diroit par Régle de Ttois: le petit axe eſt au grand axe, comme le ſecteur circulaire *n*CNO, eſt à un quatriéme terme qui ſeroit le ſecteut *r*CRO. Ce qui ſe démontte aiſément, puiſque toutes les otdonnées au demi-ſegment circulaire C*n*M ſont aux ordonnées du demi-ſegment elliptique C*r*M, comme le petit axe eſt au grand (*N.* 702.), & que le triangle M*n*O eſt au triangle M*r*O, comme M*n* eſt à M*r*, ou comme le petit axe eſt au grand.

759. Probleme. *Meſurer un ſegment Elliptique* HRL *coupé par une baſe* HL *oblique au grand axe & au petit* (Fig. 479.).

Je coupe le grand axe AB en Z en même raiſon que le diamétre RS de la baſe du ſegment donné eſt coupé en T, c'eſt-à-dire, je fais RS. RT :: BA. BZ, & menant par le point Z une double ordonnée M*n*, le ſegment MB*n* ſera égal au ſegment donné HRL, & par conſéquent il n'y aura qu'à meſurer le ſegment MB*n*, comme ci-deſſus (*N.* 756.), & ſa valeur ſera la même que celle du ſegment HRL, ce que je démontre ainſi.

Je conçois que la hauteut BZ du ſegment MB*n* ſoit coupée en une infinité de patties égales, & que par les points de diviſion ſoient menées des doubles ordonnées des extrêmités de chacune deſquelles ſoient élevées des petites perpendiculaires, ce qui donneta des petits rectangles circonſcrits, qui auront tous une hauteur infiniment petite & égale à ZX. Je conçois de même que la partie RT du diamétre RS ſoit coupée en un même nombre de petites patties, qui par conſéquent ſeront proportionnelles aux petites parties de BZ, & que par les points de diviſion ſoient menées des doubles ordonnées à RT, aux extrêmités deſquelles ſoient menées des petites lignes paralelles à RT, ce qui donnera autant de paralellogrammes circonſcrits au ſegment HRL que de rectangles circonſcrits au ſegment MB*n*; du ſommet R du diamétre RS, j'abaiſſe ſur la baſe HL du ſegment HRL la perpendiculaire RK, laquelle ſera coupée par les doubles ordonnées du ſegment HRL en patties égales & proportion-

nelles aux parties de RT, & par conſéquent proportionnelles aux parties de BZ; ainſi les hauteurs des paralellogrammes circonſcrits au ſegment HRL ſeront égales entr'elles, & à la hauteur EK du premier de ces paralellogrammes : or, les hauteurs des paralellogrammes étant infiniment petites, il eſt clair que la ſomme de ces paralellogrammes ne differera pas du ſegment HRL, de même que la ſomme des rectangles circonſcrits au ſegment MB*n* ne differera pas de ce ſegment. Si je fais donc voir que les paralellogrammes circonſcrits au ſegment HRL ſont enſemble égaux aux rectangles circonſcrits au ſegment MB*n*, il s'enſuivra néceſſairement que les deux ſegmens ſont égaux.

A cauſe que l'axe & le diamétre ſont coupés proportionnellement, nous aurons BZ. BA :: RT. RS, & ZA. BA :: TS. RS; & multipliant les termes de ces deux proportions les uns par les autres, nous aurons BZ×ZA. $\overline{BA}^2$ :: RT×TS. $\overline{RS}^2$, ou BZ×ZA. RT×TS :: $\overline{BA}^2$. $\overline{RS}^2$; par un ſemblable raiſonnement, nous trouverons BX×XA. RQ×QS :: $\overline{BA}^2$. $\overline{RS}^2$, & par conſéquent nous aurons BZ×ZA. RT×TS :: BX×XA. RQ×QS, ou BZ×ZA. BX×XA :: RT×TS. RQ×QS, & mettant au lieu des deux premiers termes BZ×ZA, & BX×XA les quarrés $\overline{MZ}^2$. $\overline{VX}^2$ qui ſont en même raiſon, & au lieu des deux derniers termes RT×TS, RQ×QS, les quarrés $\overline{HT}^2$, $\overline{FQ}^2$ qui ſont auſſi en même raiſon, nous aurons $\overline{MZ}^2$. $\overline{VX}^2$ :: $\overline{HT}^2$. $\overline{FQ}^2$, d'où l'on tire MZ. VX :: HT. FQ, & par conſéquent M*n*. V*u* :: HL. F*f*, c'eſt-à-dire les baſes des rectangles circonſcrits au ſegment MB*n* ſont entr'elles comme les baſes des paralellogrammes circonſcrits au ſegment HRL.

Maintenant le petit rectangle fait ſur la baſe M*n* eſt M*n*×ZX, & le petit paralellogramme fait ſur la baſe HL eſt HL×EK; or, ZX. ZB :: EK. RK, multiplant donc les termes de la premiere raiſon ZX, ZB par M*n*, & les termes de la ſeconde raiſon EK, RK par HL, nous aurons M*n*×ZX. M*n*×ZB :: HL×EK. HL×RK ou M*n*×ZX. HL×EK :: M*n*×ZB. HL×RK, c'eſt-à-dire le petit rectangle fait ſur M*n* eſt au petit paralellogramme fait ſur HL, comme le rectangle M*n*×ZB eſt au rectangle HL×RK. De même le petit rectangle fait ſur V*u*, eſt V*u*×ZX, & le petit paralellogramme fait ſur F*f*, eſt F*f*×EK; or, V*u*. E*f* :: M*n*. HL, &

ZX. EK :: ZB. BK ; multipliant donc enſemble les termes de ces deux proportions, nous aurons $Vu \times ZX. Ff \times EK :: Mn \times ZB. HL \times RK$; ainſi le petit rectangle, & le petit paralellogramme ſont encore entr'eux comme le rectangle $Mn \times ZB$ eſt au paralellogramme $HL \times RK$; & comme on trouvera toujours la même choſe en comparant chaque petit rectangle circonſcrit au ſegment MBn à chaque petit paralellogramme circonſcrit au ſegment HRL ; il s'enſuit que la ſomme des petits rectangles circonſcrits au ſegment MBn, c'eſt-à-dire le ſegment MBn eſt à la ſomme des petits paralellogrammes circonſcrits au ſegment HLR, c'eſt-à-dire au ſegment HRL, comme le rectangle $Mn \times ZB$ eſt au rectangle $HL \times RK$. Mais le rectangle $MN \times ZB$ eſt double du plus grand triangle MBn inſcrit au ſegment MBn, & le rectangle $HL \times RK$ eſt double du plus grand triangle HRL inſcrit au ſegment ; donc ces deux triangles inſcrits MBn, HRL ſont entr'eux comme les ſegmens ; or, les deux triangles MBn, HRL ſont égaux (*N.* 737.) ; donc les deux ſegmens MBn, HRL ſont auſſi égaux.

760. Probleme. *Meſurer un ſecteur Elliptique* HRLO *dont la corde* HL *eſt oblique aux deux axes* (Fig. 479.).

Je coupe le grand axe en Z en même raiſon que le diamétre RS de la corde HL du ſecteur eſt coupée en T ; je mene par Z la double ordonnée Mn au grand axe, & du centre O, je mene les droites MO, nO, ce qui me donne un ſecteur $MOnB$ égal au ſecteur HRLO ; ainſi meſurant MONB, comme ci-deſſus (*N.* 759.), ſa valeur ſera celle du ſecteur HRLO.

Car menant la droite OI perpendiculaire ſur HL, cette droite ſera la hauteur du triangle HOL, & la hauteur du triangle MOn ſera la droite OZ ; or, à cauſe que l'axe & le diamétre ſont coupés en deux également en O, & proportionnellement en T & Z, nous aurons BZ. ZO :: RT. TO, & à cauſe des triangles ſemblables RTK, TOI, nous avons RT. TO :: RK. OI ; donc BZ. ZO :: RK. OI, ou BZ. RK :: ZO. OI ; or, les plus grands triangles MBn, HRL inſcrits dans les ſegmens MBn, HRL étant égaux (*N.* 737.), ont les baſes réciproques à leurs hauteurs ; donc Mn. HL :: RK. ZB, ou ZB. RK :: HL. Mn, & partant ZO. OI :: HL. Mn, d'où l'on tire $ZO \times Mn = HL \times OI$; or, $ZO \times Mn$ eſt le double du triangle MOn, & $HL \times OI$ eſt le double du triangle HLO, donc ces deux triangles ſont égaux ;

or, les deux ſegmens B*n*, MHRL ſont auſſi égaux (*N.* 759.); donc les deux ſecteurs MO*n*B, HOLR le ſont auſſi.

761. PROPOSITION CXLIX. *Si l'on fait paſſer un cercle par les extrêmités* C, D *du petit axe* (Fig. 480.) *& par l'une des extrêmités* A *du grand axe, la portion de circonference* CHD *qui ſera du côté de l'autre extrêmité* B *du grand axe ſera toute entiere dans l'ellipſe, & l'autre portion* CNAD *ſera toute entiere hors de l'ellipſe.*

A cauſe que dans le cercle la droite CD eſt coupée en deux également en O par la droite OH qui lui eſt perpendiculaire, la droite OH eſt partie du diamétre du cercle, & par conſéquent CO étant une ordonnée à ce diamétre, nous avons AO. OC :: OC. OH, mais AO eſt plus grand que CO; donc à plus forte raiſon eſt-elle plus grande que OH, & par conſéquent OH étant moindre que OB = AO, le point H eſt dans l'ellipſe.

Je mene par le ſommet A la droite AT perpendiculaire au grand axe AB & égale à ſon paramétre; ainſi AT ſera moindre que AB, puiſque le paramétre du grand axe eſt troiſiéme proportionnelle au grand axe & au petit (*N.* 691.) de l'extrêmité T, du paramétre, je mene la droite TB à l'autre extrêmité B du grand axe, & du point H je mene la droite indéfinie HK qui paſſe par le point G où la droite TB coupe le petit axe. Il eſt viſible par cette conſtruction que la partie HG de la droite HK eſt toute entiere dans le triangle TBA, & que ſon autre partie GK eſt toute entiere hors de ce triangle. Cela poſé:

La droite CO étant ordonnée au diamétre AH du cercle, nous avons $\overline{CO}^2 = AO \times OH$, & la même droite CO étant auſſi ordonnée au grand axe, nous avons $\overline{CO}^2 = AO \times OG$ (*N.* 693.) donc $AO \times OH = AO \times OG$, & partant OH = OG. Je conçois que de tous les points de la partie OH de l'axe ſoient menées des ordonnées à l'ellipſe telles que PE, & des ordonnées au cercle telles que PQ, nous aurons par la proprieté de l'ellipſe $\overline{PE}^2 = AP \times PV$ (*N.* 693.) & par la proprieté du cercle $\overline{PQ}^2 = AP \times PH$; or les triangles ſemblables GOH, ZPH donnent GO. OH :: ZP. PH, & nous venons de trouver GO = OH; donc ZP = PH; mais ZP eſt moindre que VP, à cauſe que la droite GH étant toute entiere dans le triangle OGB, la droite ZP ne peut couper GB ſans être prolongée; donc PH eſt auſſi moindre que PV, & par conſéquent AP × PH ou $\overline{PQ}^2$ eſt moindre

moindre que AP × PV ou $\overline{PE}^2$, d'où il ſuit que l'ordonnée PQ du cercle eſt moindre que l'ordonnée PE de l'ellipſe, & comme la même choſe arrivera à l'égard de toutes les ordonnées du cercle & de l'ellipſe qui paſſeront par la droite HO; il s'enſuit que l'arc CHD du cercle eſt tout entier dans l'ellipſe, ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je conçois de même que de tous les points de la partie AO du grand axe ſoient menées des ordonnées à l'ellipſe telles que MR, & des ordonnées au cercle telles que MN, nous aurons par la proprieté de l'ellipſe $\overline{MR}^2 = AM \times MS$ (*N.* 693.) & par celle du cercle $\overline{MN}^2 = AM \times MH$; or les triangles ſemblables GOH, XMH donnent GO. OH :: XM. MH; donc XM = MH à cauſe de GO = OH; mais XM eſt plus grand que SM, à cauſe que GK eſt toute entiere hors du triangle TAB; donc MH eſt auſſi plus grand que SM, & par conſéquent AM × MH, ou $\overline{NM}^2$ eſt plus grand que AM × MS ou $\overline{MR}^2$; d'où il ſuit que l'ordonnée NM au cercle eſt plus grande que l'ordonnée MR à l'ellipſe; & comme la même choſe arrivera à l'égard de toutes les ordonnées au cercle & à l'ellipſe que l'on menera de tous les points de AO de part & d'autre, il s'enſuit que l'arc de cercle CAD eſt tout entier hors de l'ellipſe; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

762. PROPOSITION CL. *Si l'on fait paſſer un cercle par les extrêmités* A, B *du grand axe, & par l'une des extrêmités* D *du petit axe* (Fig. 481.) *la portion* AHB *de circonference qui ſera du côte de l'autre extrêmite* C *du petit axe, ſera toute entiere hors de l'ellipſe, & l'autre portion* ADB *ſera toute entiere dans l'ellipſe.*

A cauſe que dans le cercle la droite AB eſt coupée en deux également en O par la droite HD qui lui eſt perpendiculaire, la droite HD eſt le diamétre du cercle; ainſi AO étant ordonnée à ce diamétre, nous avons DO. OA :: OA. OH; mais DO eſt moindre que OA; donc à plus forte raiſon eſt-il moindre que HO, & par conſéquent HO étant plus grand que CO = DO, le point H eſt hors de l'ellipſe.

Je mene par le point D la droite DT perpendiculaire au petit axe & égale à ſon paramétre; ainſi DT ſera plus grand que le petit axe DC, à cauſe que le paramétre du petit axe eſt troiſiéme proportionnelle au petit axe & au grand (*N.* 691.) de l'extrê-

mité T du paramétre, je mene la droite TC à l'autre extrêmité du petit axe, & du point H la droite indéfinie HK qui paſſe par le point G où la droite TC coupe le grand axe prolongé s'il le faut; il eſt viſible que la partie GK de HK ſera toute entiere dans le triangle CTD, & que ſon autre partie HG ſera toute entiere hors de ce triangle: cela poſé.

La droite AO étant ordonnée au cercle donne $\overline{AO}^2 = DO \times OH$, & la même droite étant ordonnée au petit axe de l'ellipſe, nous avons $\overline{AO}^2 = DO \times OG$ (*N.* 701.) donc $DO \times OH = DO \times OG$, & partant $OH = OG$. Je conçois que de tous les points de OC ſoient menées des ordonnées à l'ellipſe telles que PE, & des ordonnées au cercle telles que PQ, nous aurons par la proprieté de l'ellipſe $\overline{PE}^2 = DP \times PV$, & par celle du cercle $\overline{PQ}^2 = DP \times PH$; or les triangles ſemblables GOH, ZPH donnent GO. OH :: ZP. PH; donc $ZP = PH$ à cauſe de $GO = OH$; mais ZP eſt plus grand que PV à cauſe que HG eſt toute entiere hors du triangle TDC, dans lequel VP eſt renfermé; donc PH eſt auſſi plus grand que PV, & par conſéquent $DP \times PH$ ou $\overline{PQ}^2$ eſt plus grand que $DP \times PV$ ou $\overline{PE}^2$; d'où il ſuit que l'ordonnée PQ du cercle eſt plus grande que l'ordonnée PE de l'ellipſe, & comme la même choſe arrivera à l'égard de toutes les ordonnées au cercle & à l'ellipſe menées de tous les points de OC de part & d'autre, il s'enſuit que l'arc du cercle AHB eſt tout entier hors de l'ellipſe; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je conçois de même que de tous les points de DO ſoient menées des ordonnées à l'ellipſe telles que MR, & des ordonnées au cercle telles que MN, nous aurons par la proprieté de l'ellipſe $\overline{MR}^2 = DM \times MS$, & par celle du cercle $\overline{MN}^2 = DM \times MH$; mais les triangles ſemblables GOH, XMH donnent GO. OH :: XM. MH; donc $XM = MH$ à cauſe de $GO = HO$; or XM eſt moindre que MS à cauſe que la droite GXK eſt toute entiere dans le triangle CTD; donc MH eſt moindre auſſi que MS, & par conſéquent $DM \times MH$ ou $\overline{MN}^2$ eſt moindre que $DM \times MS$ ou $\overline{MR}^2$; d'où il ſuit que l'ordonnée MN du cercle eſt moindre que l'ordonnée MR de l'ellipſe; & comme la mê-

me choſe arrivera à l'égard de toutes les ordonnées du cercle & de l'ellipſe menées par tous les points de DO de part & d'autre, il s'enſuit que l'arc du cercle ADB eſt tout entier dans l'ellipſe; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

763. COROLLAIRE I. *De tous les angles tels que* CAD, CPD, *&c.* (Fig. 482.) *qui ont leurs ſommets ſur la courbe d'une ellipſe & qui s'appuyent ſur le petit axe* CD, *le plus petit eſt celui qui a ſon ſommet à l'une ou l'autre des extrêmités* A *du grand axe & de tous les angles tels que* ADB, APB, *&c.* (Fig. 483.) *qui ont leurs ſommets ſur la courbe & qui s'appuyent ſur le grand axe* AB, *le plus grand eſt celui qui a ſon ſommet à l'une ou l'autre des extrêmités du petit axe.*

Je fais paſſer un cercle par les extrêmités C, D du petit axe (*Fig.* 482.) & par le ſommet A du grand axe; ainſi l'arc CARD eſt tout entier hors de l'ellipſe (*N.* 761.) je prolonge CP juſqu'à la circonférence du cercle en R, & du point R je mene la ligne RD, les angles CAD, CRD ont leurs ſommets à la circonférence du cercle & s'appuyent ſur le même arc CHD; donc ces deux angles ſont égaux; mais l'angle CPD étant externe au triangle RPD, eſt plus grand que l'angle interne PRD; donc l'angle CAD égal à l'angle CRD eſt moindre que l'angle CPD, & la même choſe ſe démontrera de tous les angles qui auront leurs ſommets ſur la demi-ellipſe ABD ſi l'on décrit un cercle qui paſſe par les points C, D, B.

De même je fais paſſer par les extrêmités A, B du grand axe (*Fig.* 483.) & par l'extrêmité D du petit axe un cercle ARDH, & par conſéquent l'arc ARDB de ce cercle eſt tout entier dans l'ellipſe (*N.* 762.) je mene par le point R où la droite BP coupe cet arc, la droite RA & les deux angles ARB, ADB ſont égaux à cauſe qu'ils ſont à la circonférence du cercle & qu'ils s'appuyent ſur le même arc AHB; mais ARB étant extérieur au triangle, RPA eſt plus grand que l'angle intérieur BPA; donc l'angle ADB égal à l'angle ARB, eſt plus grand que l'angle BPA, & ainſi des autres.

764. COROLLAIRE II. *De tous les angles aigus que les diamétres font avec leurs ordonnées, le moindre eſt celui que fait l'un ou l'autre des deux diamétres conjugués & égaux.*

Soit l'ellipſe ADBC (*Fig.* 484.) je mene par les extrêmités des axes les droites AD, BD, BC, CA, & par le centre O menant la droite HOS paralelle à AC, cette droite eſt l'un des

deux diamétres conjugués égaux (*N.* 748.) & l'angle aigu OQD qu'il fait avec ſon ordonnée AD eſt égal à l'angle CAD. Soit un autre diamétre quelconque MP différent du diamétre conjugué de HS; par le point D je mene une double ordonnée DR au diamétre MP, laquelle ira aboutir ſur la courbe en un point R différent du ſommet A du grand axe; car ſi elle alloit aboutir en A elle ſeroit ordonnée au diamétre HS & non pas au diamétre MP; du point R je mene la droite RC, & à cauſe de RD diviſée en deux également en T par ſon diamétre, & de DC diviſé en deux également en O, les droites RC, TO ſont paralelles, & l'angle aigu OTD que le diamétre PM fait avec ſon ordonnée DR eſt égal à l'angle DRC; mais l'angle DRC eſt plus grand que l'angle DAC ou ſon égal DQO (*N.* 763.) donc l'angle OTD eſt auſſi plus grand que DQO.

765. COROLLAIRE III. *De tous les angles obtus que les diametres ſont avec leurs ordonnées, le plus grand eſt celui que fait l'un ou l'autre des deux diamétres conjugués égaux.* C'eſt une ſuite évidente du Corollaire précédent; car tous les diamétres ſont avec leurs ordonnées deux angles, l'un aigu & l'autre obtus qui valent enſemble deux droits; ainſi puiſque le diamétre HS qui eſt l'un des deux conjugués égaux fait avec ſes ordonnées un angle aigu moindre que chacun des angles aigus que les autres diamétres font avec leurs ordonnées, il eſt clair que l'angle obtus OQA que le même diamétre HS fait avec ſes ordonnées doit être plus grand que chacun des angles obtus que les autres diamétres font avec leurs ordonnées, & cet angle OQA eſt égal à l'angle ADB qui a ſon ſommet en D, & qui s'appuye ſur le grand axe à cauſe des paralelles SQ, DB, & AD, CB.

766. PROBLEME. *Une Ellipſe* ADBC *étant donnée* (Fig. 486.) *trouver un diamétre qui faſſe avec ſes ordonnées un angle égal à un angle donné* abc.

Si l'angle donné eſt droit, il eſt clair que les deux axes ſatisfont à la queſtion; ſi l'angle donné eſt aigu & égal à l'angle qui auroit ſon ſommet à l'extrêmité A du grand axe & qui s'appuyeroit ſur le petit axe, le diamétre demandé ſeroit l'un ou l'autre des deux conjugués égaux (*N.* 764.) & de même ſi l'angle donné étoit obtus & égal à l'angle qui auroit ſon ſommet à l'extrêmité C du petit axe & qui s'appuyeroit ſur le grand axe, le diamétre demandé ſeroit encore l'un ou l'autre des deux conjugués égaux (*N.* 765.) ainſi la queſtion ſe réduit à trouver un diamétre qui.

faſſe avec ſes ordonnées un angle aigu plus grand que celui qui s'appuyeroit ſur CD & qui auroit ſon ſommet en A ou un angle obtus moindre que celui qui auroit ſon ſommet en C & qui s'appuyeroit ſur le grand axe; & comme l'angle aigu qu'un diamétre fait avec ſes ordonnées étant donné, l'angle obtus qu'il fait avec les mêmes ordonnées eſt connu; la queſtion ſe réduit encore à trouver un diamétre qui faſſe avec ſes ordonnées un angle donné obtus *abc*, moindre que l'angle qui auroit ſon ſommet en C. Cela poſé.

Je fais en A un angle LAB égal à l'angle aigu, *abd* qui eſt le complement de l'angle donné obtus *abc*; j'éleve en A la droite AX perpendiculaire ſur LA, du point X où la droite AX coupe le petit axe CD, je décris avec le rayon XA un cercle HAKB; & par l'un ou l'autre des points R, S où le cercle coupe la courbe, par exemple par le point S, je mene aux extrêmités du grand axe les droites SA, SB. Je coupe ces deux droites chacune en deux également en T & Z, & par les points de diviſion & par le centre O de l'ellipſe, je mene les droites VP, QE qui ſeront deux diamétres conjugués qui feront avec leurs ordonnées un angle obtus égal à l'angle donné; & ſi je fais la même choſe au point R, je trouverai encore deux autres diamétres conjugués qui feront auſſi avec leurs ordonnées le même angle obtus. Et voici la démonſtration.

1°. Le cercle paſſera par l'autre extrêmité B du grand axe; car les triangles rectangles XAO, XBO ſont égaux à cauſe du côté AO égal au côté OB, & du côté commun OX, & par conſéquent XB = AX, ainſi XB eſt rayon du cercle. 2°. L'arc AHB du ſegment AHB paſſe dans l'ellipſe du côté de A & du côté de B; car la tangente LA étant perpendiculaire ſur AX, eſt oblique au grand axe & à ſa tangente AG; d'où il ſuit que LA entre dans l'ellipſe, & à plus forte raiſon l'arc AHB. De même ſi je mene en B la droite BF tangente au cercle, cette tangente entrera auſſi dans l'ellipſe, & à plus forte raiſon BHA. 3°. Tout angle inſcrit dans le ſegment BHA, tel que l'angle ASB eſt égal à l'angle donné *abc*; car l'angle du ſegment LAB étant égal à l'angle aigu *abd*, tout angle inſcrit dans l'autre ſegment tel que l'angle AKB ſera auſſi égal à l'angle aigu *abd*, à cauſe que AKB eſt égal à l'angle LAB; or l'angle ASB & l'angle AKB valent enſemble deux droits à cauſe qu'ils embraſſent enſemble la circonférence entiere; donc puiſque l'angle AKB eſt égal à l'angle *abd*,

l'angle ASB doit être égal à l'angle *abc* qui joint avec *abd* vaut auſſi deux droits. 4°. L'arc AHB doit couper (*Fig.* 486.) le petit axe en un point H hors de l'ellipſe; car s'il le coupoit à l'extrêmité C, l'angle ASB inſcrit dans le ſegment ACB ſeroit égal à l'angle qui a ſon ſommet à l'extrêmité du petit axe & qui s'appuye ſur le grand, ce qui eſt contre la ſuppoſition; & s'il le coupoit en dedans de l'ellipſe en un point H, l'angle AHB inſcrit dans le ſegment ſeroit plus grand que l'angle ACB à cauſe de l'angle externe AHO plus grand que l'interne ACH, & de l'angle externe BHO plus grand que l'interne BCH, ce qui eſt encore contre la ſuppoſition. 5°. donc, puiſque l'arc AHB (*Fig.* 486.) entre dans l'ellipſe du côté de A & de B, & qu'enſuite il coupe le petit axe hors de l'ellipſe, il faut néceſſairement qu'il coupe l'ellipſe en deux points R, S; or tout cela poſé, il eſt clair que les droites QE, SA ſont paralelles à cauſe que BS eſt diviſé en deux également en Z, de même que BA en O, ce qui rend les triangles BOZ, BAS ſemblables entr'eux & l'angle EZB que le diamétre EQ fait avec ſon ordonnée SB égal à l'angle ASB ou à ſon égal *abc*. De même à cauſe de SA diviſé en deux également en T, de même que AB en O, les droites TO, SB ſont paralelles, & l'angle ATP que le diamétre VP fait avec ſon ordonnée SA eſt auſſi égal à l'angle ASB ou à l'angle donné *abc*; ainſi les deux diamétres QE, VP ſatisfont à la queſtion, & ces diamétres ſont conjugués entr'eux, puiſqu'ils ſont mutuellement paralelles à leurs ordonnées, & on prouveroit la même choſe des deux autres diamétres que j'aurois trouvé ſi je m'étois ſervi du point R.

De l'Hyperbole conſiderée dans un Plan hors du Cône.

767. PROBLEME. *Décrire une Hyperbole.*

Je prens deux lignes droites AB, CD (*Fig.* 487.) égales ou inégales; je les mets perpendiculairement l'une ſur l'autre, enſorte qu'elles ſe coupent chacune en deux également en O. Je prolonge indéfiniment l'une des deux AB; je coupe le prolongement BY en parties égales BM, MS, très-petites, & je fais paſſer par les points de diviſion des perpendiculaires RV, LX. Je décris un cercle autour de la ligne AB, & du point M menant la tangente MN, je cherche une quatriéme proportionnelle aux deux lignes AB, CD & à la tangente MN, & je porte cette

quatriéme proportionnelle ſur la perpendiculaire RMV, de M en R & de M en V. De même du point S je mene la tangente ST, & cherchant une quatriéme proportionnelle aux deux lignes AB, CD & à la tangente ST, je la porte ſur la perpendiculaire LX de S en L & de S en X. Je fais la même choſe à l'égard des autres perpendiculaires menées ſur les points de diviſion de RY, & faiſant paſſer une courbe par les points trouvés, & par le point B, les ordonnées de cette courbe ſont RM, LS, &c. les abſciſſes BM, BS, &c. & il reſte à prouver que c'eſt une hyperbole.

Par la conſtruction, nous avons AB. CD :: MN. MR, & AB. CD :: ST. SL; donc MN. MR :: ST. SL, ou MN. ST :: MR. SL, c'eſt-à-dire les ordonnées MR, SL, &c. de notre courbe ſont entr'elles comme les tangentes au cercle menées des points M. S, &c. où ces ordonnées coupent leurs abſciſſes. Donc élevant tout au quarré, nous aurons $\overline{MN}^2$. $\overline{ST}^2$ :: $\overline{MR}^2$. $\overline{SL}^2$. Or $\overline{MN}^2 = MB \times AM$ (*N.* 271.) & $\overline{ST}^2 = SB \times AS$; donc MB × AM. SB × AS :: $\overline{MR}^2$. $\overline{SL}^2$, c'eſt-à-dire les quarrés des ordonnées MR. SL ſont entr'eux comme les rectangles de leurs abſciſſes multipliées par la ligne AB augmentée de ces mêmes abſciſſes, & par conſéquent la courbe eſt une hyperbole (*N.* 634.)

768. *Nota*, 1°. Que les tangentes MN, ST devenant d'autant plus grandes que les points M, S, &c. ſont plus éloignées du point B, les ordonnées MR, SL, &c. qui ſont quatriémes proportionnelles aux droites AB, CD & aux tangentes, deviennent auſſi plus grandes à meſure qu'elles s'éloignent du ſommet B, & que par conſéquent la courbe peut s'étendre à l'infini en s'éloignant de plus en plus de part & d'autre de la ligne BY. 2°. Que ſi l'on fait la même conſtruction du côté de A, on aura une autre courbe QZA ſemblable & égale à la premiere HBP.

769. *Definition.* La droite AB, ſe nomme premier *axe*, la droite CD ſecond *axe*, le point O où ces droites ſe coupent, *centre*, & les deux courbes HBP, QAZ, *Hyperboles oppoſées*. Toute ligne qui paſſe par le centre O, & qui coupe les hyperboles oppoſées, ſe nomme *premier diamétre*, celles qui paſſent par le centre O, & qui ne coupent point les hyperboles, ſe nomment *ſeconds diamétres*. Le *paramétre* du premier axe eſt une ligne troiſiéme proportionnelle au premier axe & au ſecond; & le *para-*

métre du ſecond axe eſt une ligne troiſiéme proportionnelle au ſecond axe & au premier.

Au reſte, la ligne CD eſt nommée ſecond axe, à cauſe qu'elle coupe en deux également toutes les lignes telles que V*u* qui lui ſont perpendiculaires & qui ſe terminent ſur les hyperboles; car il eſt viſible que ſi l'on prend dans ces deux courbes deux ordonnées MV, *mu* également éloignées de leurs ſommets B, A, & par conſéquent égales, la ligne V*u* menée par leurs extrêmités ſera perpendiculaire à CD qui la coupera en deux également, à cauſe que M*m* eſt coupée en deux également par CD.

770. COROLLAIRE Ier. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* LS *au premier axe eſt au rectangle correſpondant* SB × AS, *comme le quarré du petit axe eſt au quarré du grand axe.* Par la conſtruction, nous avons LS. ST :: CD. AB. Donc $\overline{LS}^2$. $\overline{ST}^2$ :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$. Or $\overline{ST}^2$ = SB × AS (*N.* 271.) Donc $\overline{LS}^2$. SB × AS :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$.

771. COROLLAIRE II. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* LS *au premier axe, eſt au rectangle correſpondant* SB × AS *comme le paramétre du premier axe eſt au premier axe* AB. Je nomme P le paramétre du premier axe, & par la définition de ce paramétre, nous avons :: AB. CD. P (*N.* 769.) Donc $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$ :: AB. P (*N.* 393.) ou $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ :: P. AB. Or par le Corollaire précédent nous avons $\overline{LS}^2$. SB × AS :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$. Donc $\overline{LS}^2$. SB × AS :: P. AB.

772. COROLLAIRE III. *Si au ſommet* B *du premier axe* AB (Fig. 488.) *on éleve une perpendiculaire* HB *égale au paramétre de cet axe, & que par l'extrémité* H *de ce paramétre & l'autre extrémité* A *de l'axe* AB, *on mene une droite indéfinie* AT *qui coupe en* T *une ordonnée quelconque* SL *prolongée, s'il le faut, le quarré* LS *de cette ordonnée eſt égal au rectangle de ſon abſciſſe* SB *multipliée par la droite* TS. Les triangles ſemblables ABH, AST donnent AB. BH :: AS. ST; & multipliant les deux derniers termes par BS, nous aurons AB. BH :: AS × BS. TS × BS, ou TS × BS. AS × BS :: BH. AB; or $\overline{LS}^2$. AS × BS :: BH. AB (*N.* 771) donc TS × BS. AS × BS :: $\overline{LS}^2$. AS × BS, & par conſéquent TS × BS = $\overline{LS}^2$. à cauſe des deux conſéquens égaux.

773. COROLLAIRE IV. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* LV

au

au ſecond axe CD (Fig. 489.) *eſt au quarré de ſon abſciſſe* VO. *plus le quarré du demi-ſecond axe* DO, *comme le quarré du premier axe eſt au quarré du ſecond.* Du point L je mene l'ordonnée LS au premier axe, & j'ai $\overline{LS}^2$. SB × SA :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$. (*N.* 770.) or à cauſe que AB eſt diviſé en deux également en O, & que BS lui eſt ajoutée, nous avons SB × SA = $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$; donc $\overline{LS}^2$. $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$ :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$; mais les quarrés $\overline{CD}^2$, $\overline{AB}^2$ des axes ſont entr'eux comme les quarrés $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$ de leurs moitiés; donc $\overline{LS}^2$. $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$, ou $\overline{LS}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$. $\overline{BO}^2$; & compoſant, nous aurons $\overline{LS}^2 + \overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2 + \overline{BO}^2$. $\overline{BO}^2$, c'eſt-à-dire $\overline{LS}^2 + \overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OS}^2$. $\overline{BO}^2$. Mais LS = VO, & OS = VL, à cauſe que VOSL eſt un paralellogramme; donc $\overline{LS}^2 = \overline{VO}^2$ & $\overline{OS}^2 = \overline{VL}^2$, & ſubſtituant ces valeurs dans la derniere proportion, nous aurons $\overline{VO}^2 + \overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{VL}^2$. $\overline{BO}^2$, ou $\overline{VL}^2$. $\overline{VO}^2 + \overline{OD}^2$ :: $\overline{BO}^2$. $\overline{DO}^2$ :: $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$.

Nota. Nous ferons voir dans la ſuite d'où vient que la propriété de l'hyperbole par rapport au ſecond axe, n'eſt pas ici la même que par rapport au premier.

774. COROLLAIRE V. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* LV *au ſecond axe eſt au quarré de ſon abſciſſe* VO, *plus le quarré du demi ſecond axe* CO, *comme le paramétre de cet axe eſt à cet axe* CD. Je nomme *p* le paramétre du ſecond axe, & par la définition de ce paramétre j'ai :: CD. AB. *p*. donc $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ :: CD. *p*. (*N.* 393.) ou *p*. CD :: $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$. Mais nous avons $\overline{LV}^2$. $\overline{VO}^2 + \overline{OC}^2$ :: $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$. Donc $\overline{LV}^2$. $\overline{VO}^2 + \overline{OC}^2$. *p*. CD.

775. VI. *Toute ligne* OZ (Fig. 489.) *qui paſſe par le centre* O, *& qui coupe l'hyperbole ne la coupe qu'en un ſeul point* R. Du point R je mene l'ordonnée RM au premier axe, & d'un autre point quelconque S pris ſur BS en deſſous de M, je mene une autre ordonnée LS qui coupe OZ en T; les triangles ſemblables OMR, OST donnent MR. TS :: OM. OS; donc $\overline{RM}^2$. $\overline{TS}^2$ :: $\overline{OM}^2$. $\overline{OS}^2$. Or par la proprieté de l'hyperbole, nous avons

$\overline{RM}^2 . \overline{LS}^2 :: MB \times AM \times SB \times AS$ (*N.*767.) :: $\overline{MO}^2 - \overline{BO}^2 . \overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$ (*N.* 148.) ; mais $\overline{MO}^2 - \overline{BO}^2$ eſt moindre par rapport à $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$ que $\overline{OM}^2$ par rapport à $\overline{OS}^2$; car afin qu'il y eût proportion entre les quatre termes $\overline{MO}^2 - \overline{BO}^2$, $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$, $\overline{MO}^2$, & $\overline{OS}^2$, il faudroit que la partie $\overline{BO}^2$ qu'on retranche de $\overline{MO}^2$ fût à la partie $\overline{OB}^2$ qu'on retranche de $\overline{SO}^2$ en même raiſon que $\overline{MO}^2$ eſt à $\overline{SO}^2$; & par conſéquent il faudroit que la partie $\overline{BO}^2$ retranchée de $\overline{MO}^2$ fût moindre que la partie $\overline{BO}^2$ retranchée de $\overline{SO}^2$. Donc puiſqu'on retranche de $\overline{MO}^2$ plus qu'il ne faut ; il s'enſuit néceſſairement que $\overline{MO}^2 - \overline{BO}^2$ eſt moindre par rapport à $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$, que $\overline{MO}^2$ par rapport à $\overline{OS}^2$, & par conſéquent $\overline{RM}^2$ eſt auſſi moindre par rapport à $\overline{LS}^2$ que $\overline{RM}^2$ par rapport à $\overline{TS}^2$, d'où il ſuit que $\overline{LS}^2$ eſt plus grand que $\overline{TS}^2$, & partant LS eſt plus grand que TS, & le point T de la droite OT eſt dans l'hyperbole, & comme on prouvera la même choſe à l'égard de tous les points de la droite RZ, il eſt clair que cette droite eſt toute dans l'hyperbole.

776. COROLLAIRE VII. *Si une droite* OR *qui paſſe par le centre* O *coupe l'hyperbole en un point* R, *je dis que cette ligne étant prolongée au-delà du ſommet, coupera l'hyperbole oppoſée en un point* X, *de façon que la ligne entiere* RX *ſera diviſée en deux également par le centre* O. Je mene l'ordonnée RM, je fais OX=OR, & par le point X, je mene XZ paralelle à RM juſqu'à ce qu'elle coupe le premier axe BA prolongé en Z, les triangles ſemblables ORM, OXZ donnent OR. OX :: OM. OZ, & partant OM=OZ ; or, OB=OA, donc l'abſciſſe BM eſt égale à l'abſciſſe AZ, & par conſéquent l'ordonnée RM doit être égale à l'ordonnée menée du point Z, à cauſe que les deux hyperboles oppoſées ſont parfaitement égales ; mais dans les triangles ſemblables & égaux ORM, OXZ, nous avons RM=XZ, donc XZ eſt l'ordonnée menée du point X, & la droite RX coupée en deux également en O, paſſe par l'extrémité X de cette ordonnée, & l'on démontrera qu'elle coupe l'hyperbole oppoſée en X, ou que ſa partie indéfinie XY, eſt toute dans l'hyperbole oppoſée de la même façon que nous avons démontré, que RZ eſt dans l'hyperbole (*N.*775.).

777. PROBLEME. *D'un point* L *pris ſur l'hyperbole* (Fig. 490.), *mener une tangente à la courbe.*

Si le point L étoit au ſommet B, il eſt clair que la tangente ſeroit la ligne BK menée paralellement aux ordonnées, car tous les points de la courbe de part & d'autre ſont en deſſous de cette ligne par la conſtruction de l'hyperbole.

Mais ſi le point L n'eſt pas au ſommet B, je mene l'ordonnée LS au premier axe, & prenant une troiſiéme proportionnelle OT aux deux lignes OS, OB, je mene la droite LT qui eſt la tangente demandée, ce que je prouve ainſi:

Je décris autour du premier axe le cercle AVB, & du point T menant l'ordonnée TV à ce cercle, la droite VS menée de V par S eſt tangente de ce cercle, & j'ai OS. OB :: OB. OT, ou OT. OB :: OB. OS (*N.* 292.). Cela poſé, je mene une autre ordonnée MR au premier axe, entre L & T, laquelle coupe l'hyperbole en R, & la droite LT en quelque point Q, ſans m'embarraſſer ſi ce point eſt dans l'hyperbole ou en dehors; les triangles ſemblables LTS, QTM, donnent LS. QM :: TS. TM, & menant du point M la droite MX paralelle à VS; j'ai TS. TM :: SV. MX, à cauſe des triangles ſemblables TSV, TMX; donc LS. QM :: SV. MX, & partant $\overline{LS}^2$. $\overline{QM}^2$ :: $\overline{SV}^2$. $\overline{MX}^2$; or, $\overline{SV}^2$ = SB×AS, donc $\overline{LS}^2$. $\overline{QM}^2$ :: SB×AS. $\overline{MX}^2$, ou $\overline{LS}^2$. SB×AS :: $\overline{QM}^2$. $\overline{MX}^2$; mais par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{LS}^2$. SB×AS :: $\overline{RM}^2$. MB×AM; donc $\overline{QM}^2$. $\overline{MX}^2$ :: $\overline{RM}^2$. MB × AM; mais $\overline{MX}^2$ eſt plus grand que MB×AM, à cauſe que MX eſt menée paralelle à la tangente SV du cercle (*N.* 306.); donc $\overline{QM}^2$ eſt auſſi plus grand que $\overline{RM}^2$, & partant QM plus grand que RM, d'où il ſuit que le point Q de la ligne LT eſt hors de l'hyperbole, & on prouvera la même choſe de tous les points de cette ligne compris entre L & T.

Je mene une autre ordonnée HP au premier axe en deſſous du point L qui coupe la droite TLZ en Z, & je mene HN paralelle à la tangente SV du cercle, juſqu'à ce qu'elle coupe l'ordonnée TV de ce cercle en un point N. Les triangles ſemblables TLS, TZH, donnent LS. ZH :: ST. HT, & à cauſe des triangles ſemblables TSV, THN, nous avons ST. HT : SV. HN; donc LS. ZH :: SV. HN, & $\overline{LS}^2$. $\overline{ZH}^2$ :: $\overline{SV}^2$. $\overline{HN}^2$, mais $\overline{SV}^2$

$=SB\times AS$, donc $\overline{LS}^2.\ \overline{ZH}^2 :: SB\times AS.\ \overline{HN}^2$, ou $\overline{LS}^2.\ SB\times AS :: \overline{ZH}^2.\ \overline{HN}^2$; or, par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{LS}^2.\ SB\times AS :: \overline{PH}^2.\ HB\times AB$, donc $\overline{PH}^2.\ HB\times AH :: \overline{ZH}^2.\ \overline{HN}^2$, mais $\overline{HN}^2$ eſt plus grand que $HB\times AH$ (*N.* 306.); donc $\overline{ZH}^2$ eſt plus grand que $\overline{PH}^2$, & ZH plus grand que PH; d'où il ſuit que le point Z de la droite ZT eſt hors de la courbe; on prouvera de la même façon que tous les autres points de cette ligne pris en deſſous de L ſont hors de la courbe; mais nous venons de voir que tous les points de la même ligne pris entre L & T, ſont auſſi hors de la courbe, donc TLX ne touche l'hyperbole qu'en L.

778. COROLLAIRE Ier. *Toutes les tangentes qu'on peut mener de tous les points d'une hyperbole* (Fig. 491.) *ſont inclinées entr'elles, & ſe coupent entre leurs points d'attouchement.*

Si les tangentes LT, QP ſont l'une d'un côté du premier axe, & l'autre de l'autre côté, il eſt clair que ces tangentes allant aboutir à l'axe, doivent ſe couper en Z entre leurs points d'attouchement L, Q.

Si les tangentes QP, RH ſont d'un même côté de l'axe; je mene des points d'attouchement les ordonnées QS, RM, & j'ai pour la premiere :: SO. BO. OP (*N.* 777.), & pour la ſeconde :: MO. BO. OH; donc $SO\times OP=\overline{OB}^2$, & $MO\times OH=\overline{OB}^2$, d'où je tire $SO\times OP=MO\times OH$, & SO. MO :: OH. OP, or, SO eſt moindre que MO, donc OH eſt moindre que OP; donc la tangente RH, dont le point d'attouchement R eſt plus éloigné du ſommet B coupe l'axe en un point H auſſi plus éloigné du ſommet, mais cette tangente ne peut paſſer de R en H, ſans couper la tangente PQX, & elle ne peut la couper au point d'attouchement en Q, parce qu'alors elle toucheroit l'hyperbole en deux points R, Q; ce qui eſt impoſſible, elle ne peut pas non plus couper QP entre Q & P, car elle paſſeroit néceſſairement dans l'hyperbole, & ne ſeroit plus tangente; donc il faut que RH coupe PQX en quelque point V entre R & Q.

779. COROLLAIRE II. *D'un même point* L, *on ne peut mener qu'une tangente à l'hyperbole.* Ce qui ſe démontre de même que pour la parabole (*N.* 646.).

780. COROLLAIRE III. *Une tangente* LT (Fig. 492.), *& l'ordonnée* LS *au premier axe, menée du point d'attouchement étant donnée,*

on aura 1°. SB. BT :: AS. AT. 2°. SB. ST :: SO. SA. Je décris autour du premier axe le cercle AVB, & du point T, menant à ce cercle l'ordonnée TV, la droite VS, menée du point V au point S ſera tangente du cercle en V, à cauſe de :: SO. BO. OT (*N.* 292.); donc à l'égard du cercle, nous aurons SB. BT :: AS. AT (*N.* 296.), & SB. ST :: SO. SA (*N.* 294.); or, ces lignes ſont les mêmes à l'égard de l'yperbole. Donc, &c.

781. COROLLAIRE IV. *Poſant les mêmes choſes que dans le Corollaire précédent, ſi du point d'attouchement* L, *on éleve ſur* TL *une perpendiculaire* LP; *je dis que la ſouperpendiculaire* SP *eſt à la diſtance* SO *de l'ordonnée* LS *au centre* O, *comme le parametre du premier axe eſt à cet axe.* Nommant P le paramétre du premier axe, nous avons $\overline{LS}^2$. SB×AS :: P. AB; or, à cauſe de la perpendiculaire LS abaiſſée du ſommet du triangle rectangle TLP ſur ſon hypothenuſe TP, nous avons $\overline{LS}^2$=TS×SP, & à cauſe de SB. ST :: SO. SA (*N.* 780.), nous avons SB×SA=ST×SO; donc TS×SP. TS×SO :: P. AB; mais les deux rectangles TS×SP, TS×SO ayant une dimenſion commune TS, ſont entr'eux comme SP, SO, donc SP. SO :: P. AB.

782. COROLLAIRE V. *Poſant encore les mêmes choſes, ſi du point d'attouchement* L, *on mene l'ordonnée* LX *au ſecond axe, & qu'on prolonge la tangente juſqu'à la rencontre de cet axe en* H, *on aura* HO×OX=$\overline{OC}^2$, *c'eſt-à-dire le rectangle* HO×OX, *égal au quarré du demi-petit axe.* Les triangles ſemblables SLT, HTO donnent ST. OT :: LS. OH, & multipliant les deux premiers termes par OS, & les deux derniers par LS, nous aurons ST×OS. OT×OS :: $\overline{LS}^2$ SL×OH ou OX×OH, à cauſe de OX=SL; or, à cauſe de SO. OB :: OB. OT (*N.* 777.), nous avons OT×OS=$\overline{OB}^2$, & parce que SB. ST :: SO. SA (*N.* 780.), nous aurons SB×AS =ST×SO, donc SB×AS. $\overline{OB}^2$ :: $\overline{SL}^2$. OH×OX, ou $\overline{SL}^2$. SB×AS :: OH×OX. $\overline{OB}^2$; mais par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{SL}^2$. SB×AS :: $\overline{CO}^2$. $\overline{OB}^2$, donc OH×OX. $\overline{OB}^2$ :: $\overline{CO}^2$. $\overline{OB}^2$, & partant OH×OX=$\overline{CO}^2$, à cauſe des conſéquens égaux $\overline{OB}^2$, $\overline{OB}^2$.

783. *DEFINITION.* Si de l'extrémité D du ſecond axe CD (*Fig.* 493.), on mene à l'extrêmité du premier axe la droite DB, & qu'ayant pris avec le compas la droite DB, on la porte ſur le

premier axe prolongé de part & d'autre de O en E, & de O en G, les points E, G, ſe nommeront les *Foyers* des hyperboles oppoſées.

784. COROLLAIRE. *Si de l'un des foyers* E *on mene une ordonnée* EF *au premier axe, le rectangle* EB×AE *correſpondant à cette ordonnée eſt égal au quarré de la moitié* OD *du ſecond axe.* Car dans le triangle rectangle ODB, nous avons $\overline{OD}^2=\overline{DB}^2-\overline{OB}^2=\overline{OE}^2-\overline{OB}^2$; or, EB×AE=$\overline{OE}^2-\overline{OB}^2$ (*N.* 148.), donc $\overline{OD}^2$=EB×AE.

785. COROLLAIRE II. *Si de l'extrêmité* D *du ſecond axe, on mene* DM *paralelle au premier axe, & du point* M, *l'ordonnée* MN *au premier axe, le rectangle* NB×AN *correſpondant eſt égal au quarré de la moitié* OB *du premier axe.* Par la proprieté de la courbe $\overline{NM}^2$. NB×AN :: $\overline{DO}^2$. $\overline{OB}^2$; mais $\overline{NM}^2=\overline{DO}^2$, à cauſe des paralelles, donc NB×AN=$\overline{OB}^2$.

786. PROPOSITION CLI. *Si de l'un des foyers* E (Fig. 494.) *on mene une ordonnée* EF *au premier axe. Cette ordonnée eſt égale à la moitié du parametre du premier axe.* Par la proprieté de la courbe $\overline{EF}^2$. EB×AE :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$; mais EB×AE=$\overline{OD}^2$ (*N.* 784.); donc $\overline{EF}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$, & partant $\overline{OB}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{EF}^2$, & OB. OD :: OD. EF, mais par la définition du parametre du premier axe que je nomme P, nous avons AB. CD :: CD. P; donc en prenant les moitiés de tous les termes, j'ai OB. OD :: OD. $\frac{1}{2}$P, OD. $\frac{1}{2}$P :: OD. EF, & partant $\frac{1}{2}$P=EF.

787. PROPOSITION CLII. *Le premier axe* AB, *& un diametre* KL (Fig. 495.) *étant donnés avec leurs tangentes* BV, LT, *les triangles* TRB, VRL *fait par les tangentes avec l'axe & le diamétre ſont égaux.*

Du point L, je mene l'ordonnée LS au premier axe, j'ai donc OS. OB :: OB. OT (*N.* 777.); or, les triangles ſemblables OBV, OSL donnent OS. OB :: OL. OV, donc OL. OV :: OB. OT, & par conſéquent menant les lignes LB, VT, ces lignes ſont paralelles; or, les triangles LBV, LBT compris entre ces deux paralelles ſont égaux, à cauſe qu'ils ont la baſe commune LB; donc retranchant de part & d'autre le triangle commun LRB, nous aurons TRB=VRL.

788. COROLLAIRE. *Le triangle* LTS *fait par la tangente* LT *du diametre* KL, *avec le premier axe & ſon ordonnée* LS *menée du point*

d'attouchement, eſt égal au trapezoïde fait par la même ordonnée LS, *avec la tangente* BV *du premier axe, compriſe entre le premier axe & le diametre.* Les triangles TRB, VRL ſont égaux (*N.* 787.), ajoutant donc de part & d'autre BRLS, nous aurons LTS =BSLV.

Nota. J'ai démontré ci-deſſus (*N.* 776.) que tout diamétre LK terminé entre les deux courbes oppoſées, étoit diviſé en deux également au centre O : or, pour ne pas rendre les Figures trop grandes, ce qui nous jetteroit dans l'inconvénient de ſurcharger cet Ouvrage de Planches, je ne décrirai point dans les Figures des Propoſitions ſuivantes l'hyperbole oppoſée, & la moitié OK d'un diamétre LK reſtera indéterminée ; mais il faudra toujours ſuppoſer dans le diſcours que le point K eſt le point où le diamétre LK coupe la courbe oppoſée, & ainſi des autres.

789. PROPOSITION CLIII. *Le premier axe* AB, *& un diamétre* KL (Fig. 496.) *étant donnés avec leurs tangentes* BV, LT *qui ſe terminent l'une à l'axe, & l'autre au diametre, ſi d'un point quelconque* X *pris ſur la courbe on mene deux droites* FH, PM *paralelles aux tangentes, & qui ſe terminent au premier axe, & au diamétre. Je dis* 1°. *que le triangle* HXM *fait par ces paralelles avec le premier axe, eſt égal au trapezoïde* VBMP *fait par la tangente* SB *du premier axe, & ſa paralelle* XM *compriſes entre le premier axe & le diametre.* 2°. *Que le triangle* PXF *fait par les deux paralelles & le diametre* OL *eſt égal au trapezoïde* LTHF *fait par la tangente* LT *du diametre & ſa paralelle* FX *compriſes entre le diametre & le premier axe.*

Les triangles ſemblables TLS, HXM, donnent TLS. HXM :: $\overline{LS}^2$. $\overline{XM}^2$; or, par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{LS}^2$. $\overline{XM}^2$ :: SB×AS. MB×AB, & nous ſçavons que SB×AS. MB×AB :: $\overline{SO}^2$—$\overline{OB}^2$. $\overline{MO}^2$—$\overline{OB}^2$ (*N.* 148.) ; donc $\overline{LS}^2$. $\overline{XM}^2$ :: $\overline{SO}^2$—$\overline{OB}^2$. $\overline{MO}^2$—$\overline{OB}^2$; donc TLS. HXM :: $\overline{SO}^2$—$\overline{OB}^2$. $\overline{MO}^2$—$\overline{OB}^2$, & au lieu des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{OB}^2$, $\overline{MO}^2$, mettant les triangles ſemblables OLS, OBV, OPM qui ſont dans la même raiſon (*N.* 392.), nous aurons TLS. HXM :: OLS—OBV. OPM—OBV, c'eſt-à-dire TLS. HXM :: VBSL. VBMP, mais TLS=VBSL (*N.* 788.), donc HXM=VBMP. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Nous avons TLS=VBSL, & retranchant d'une part le triangle HXM, & de l'autre le trapezoïde VBMP égal à HXM, com-

me on vient de voir, il reſtera TLYH+XMSY=PMSL, & retranchant de part & d'autre la partie commune XMSY, nous aurons TLYH=PXYL; enfin, ajoutant de part & d'autre le petit triangle LYF, nous aurons TLFH=PXF. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Nota. Le point X peut ſe trouver ou au-delà du point L ou de l'autre côté de la courbe, mais ces deux cas ſe démontreront de la même façon, ainſi que nous avons fait à l'égard de la parabole. (*N.* 652.).

790. COROLLAIRE Ier. *Toutes les lignes telles que* XZ (Fig. 497.) *paralelles à une tangente quelconque* LT, *& qui coupent l'hyperbole, ſont coupées en deux également par le diametre* KL, *qui paſſe par le point d'attouchement* L. Je prolonge la droite XZ juſqu'à ce qu'elle coupe le premier axe en H, & des points X, Z où cette droite coupe l'hyperbole, je mene des droites MP, ZG paralelles à la tangente BV du premier axe; à cauſe des droites PM, ZH paralelles aux tangentes BV, LT du premier axe & du diamétre KL, le triangle PXF fait avec ces paralelles & le diamétre eſt égal au trapezoïde LTHF (*N.* 789.); de même à cauſe des droites ZH, ZG paralelles aux tangentes BV, LT, le triangle ZFI fait par ces paralelles avec le diamétre OL prolongé eſt auſſi égal au trapezoïde LTHF; donc le triangle PXF eſt égal au triangle ZFI; mais ces deux triangles ſont ſemblables à cauſe des paralelles PM, ZG, donc ils ſont parfaitement égaux, & le côté XF eſt égal au côté FZ, & partant XZ eſt diviſé en deux également en F.

791. COROLLAIRE II. *Donc toute ligne* XZ *paralelle à la tangente* LT *d'un diametre* KL *qui coupe l'hyperbole eſt une double ordonnée au diametre* OL, *& ſa moitié* XF *ou* ZF *eſt l'ordonnée.* Et ceci fait voir que nous avons eu raiſon (*N.* 769.) de nommer *Diametres* toutes les lignes telles que OL qui paſſent par le centre O, & qui coupent l'hyperbole en un point L.

792. COROLLAIRE III. *Les quarrés des ordonnées* XF, EY (Fig. 498.) *à un diametre quelconque* KL *ſont entr'eux comme les rectangles de leurs abſciſſes multipliées par le diametre* KL *augmenté de ces mêmes abſciſſes.* Je mene la tangente BV du premier axe, je prolonge les ordonnées FX, YE juſqu'à la rencontre du premier axe en H & Q, & des points X, E où ces ordonnées coupent l'hyperbole, je mene les droites XP, EZ paralelles à la tangente BV. Le triangle PXF fait avec le diametre OL, & les deux

deux lignes PX, XF paralelles aux tangentes BV, LT eſt égal au trapezoïde LTHF (*N.* 789.), & par la même raiſon le triangle ZEY eſt égal au trapezoïde LTQY; donc PXF. ZEY :: LTHF. LTQY; or, à cauſe que les triangles PXF, ZEY ſont ſemblables, nous avons PXF. ZEY :: $\overline{FX}^2$. $\overline{YE}^2$ (*N.* 392.); donc $\overline{FX}^2$. $\overline{YE}^2$ :: LTHF. LTQY; or, LTHF = OFH — OLT, & LTQY = OYQ — OLT, donc $\overline{FX}^2$. $\overline{YE}^2$ :: OFH — OLT. OYQ — OLT, & au lieu des triangles ſemblables OFH, OLT, OYQ, mettant les quarrés $\overline{OF}^2$, $\overline{OL}^2$, $\overline{OY}^2$ de leurs côtés homologues, leſquels quarrés ſont en même raiſon que ces triangles, nous aurons $\overline{FX}^2$. $\overline{YE}^2$ :: $\overline{OF}^2$ — $\overline{OL}^2$. $\overline{OY}^2$ — $\overline{OL}^2$; mais le diamétre LOK étant diviſé en deux également au centre O (*N.* 776.), & les droites LF, LY, lui étant ajoutées, nous avons FL×FK = $\overline{OF}^2$ — $\overline{OL}^2$ (*N.* 148.), & par la même raiſon YL×YK = $\overline{OY}^2$ — $\overline{OL}^2$; donc $\overline{FX}^2$. $\overline{YE}^2$ :: FL×FK. YL×YK.

Nota. Que la proprieté de l'hyperbole à l'égard de tous les premiers diamétres, tels que KL eſt la même qu'à l'égard du premier axe.

793. PROPOSITION CLIV. *Deux diametres* LK, PZ (Fig. 499.) *avec leurs tangentes* LT, TP *qui ſe coupent en* T *étant donnés, ſi l'on joint les points d'attouchement par la ligne* LP, *& que par le milieu* X *de cette ligne on mene la droite* XT *au point* T, *cette droite* XT *ſera un diametre, & paſſera par conſéquent par le centre* O *de l'hyperbole.*

La démonſtration eſt la même que pour la parabole (*N.* 662.).

794. *REMARQUE.* Par le moyen de cette Propoſition, tout ce que nous avons démontré ci-deſſus à l'égard du premier axe & d'un premier diamétre, peut ſe démontrer auſſi à l'égard de deux premiers diamétres PZ, LK (*Fig.* 499.), ou de leurs moitiés OP, OL.

Car prolongeant les tangentes LT, PT juſqu'à la rencontre des diamétres en H & Q, menant enſuite les droites RL, PM ordonnées aux deux diamétres, c'eſt-à-dire paralelles aux tangentes, la droite LP, & du point T la droite TF qui paſſe par le milieu X de la droite LP, & qui par conſéquent ſera un diamétre, & paſſera par le centre O (*N.* 769.); il eſt clair qu'à cauſe du paralellogramme LTPF, la droite TX qui paſſe par l'un des

angles X, & qui coupe la diagonale LP en deux également, paſſera par l'angle oppoſé F.

Or, les triangles ſemblables OFR, OTP donnent OR OP :: OF. OT, & à cauſe des triangles ſemblables OFP, OTH, nous avons OP. OH :: OF. OT; donc OR. OP :: OP. OH; de même les triangles ſemblables OFM. OTL donnent OM. OL :: OF. OT, & à cauſe des triangles ſemblables OFL, OTQ nous avons OL. OQ :: OF. OT; donc OM. LO :: OL. OQ, ce qui fait voir que les deux droites OR, OM ſont diviſées proportionnellement, & que par conſéquent les lignes QH, LP, MR, qui joignent leurs points de diviſion ſont paralelles entr'elles.

Donc 1°. un diamétre PZ étant donné, ſi d'un point L pris ſur la courbe on veut mener une tangente, il faut mener de ce point une ordonnée LR au diamétre, enſuite chercher une troiſiéme proportionnelle OH aux droites OR, OP, & mener la droite LH qui ſera la tangente demandée, ainſi c'eſt la même choſe qu'à l'égard du premier axe (*N.* 777.).

Donc 2°. le triangle HTP fait par les tangentes & le diamétre PZ eſt égal au triangle QTL fait par les mêmes tangentes avec le diamétre LK, car à cauſe des paralelles QH, LP, les triangles LHP, LPQ qui ont la baſe LP commune ſont égaux, & partant retranchant de part & d'autre le triangle commun LTP, nous aurons HTP=QTL.

Donc 3°. LHR=LQPR, car ajoutant aux triangles égaux HTP, QTL, la partie commune LTPR, nous aurons LHR =LQPR.

Donc 4°. ſi d'un point quelconque S pris ſur la courbe, on mene deux droites VN, IE paralelles aux tangentes, le triangle VSE fait par ces paralelles avec le diamétre ZP ſera égal au trapezoïde QPEI fait par la tangente PQ de ce diamétre, & par ſa paralelle IE terminées entre les deux diamétres, & le triangle ISN fait par les paralelles, & l'autre diamétre ſera égal au trapezoïde LHVN fait par la tangente LH de ce diamétre, & ſa paralelle NV terminées entre les diamétres, ce qui ſe démontre comme ci-deſſus (*N.* 789.).

795. PROPOSITION CLV. *Deux diametres* LK, PZ (Fig. 500.) *étant donnés avec leurs tangentes* LH, PQ; *ſi de deux points* E, F *pris ſur la courbe entre les deux diamétres, on mene deux paralelles* ES, IX, *&* FV, XR *aux tangentes, le trapezoïde* NSFR *fait par deux de ces paralelles avec le diametre* PZ, *& la plus pro-*

che des deux autres paralelles, eſt égal au trapezoïde ENVI *fait par deux autres de ces paralelles avec le diametre* LK, *& la plus proche des deux autres paralelles, de même le trapezoïde* ESRX *fait par deux paralelles avec le diametre* ZP, *& la plus éloignée des deux autres paralelles eſt égal au trapezoïde* FVIX *fait par les deux autres paralelles, & la plus éloignée des deux premieres.*

La démonſtration eſt la même que pour la parabole (*N.* 666, 667.).

796. PROPOSITION CLVI. *Si deux droites* EH, FV (Fig. 501.) *terminées de part & d'autre à l'hyperbole, ſe coupent en un point* G *dans l'hyperbole, le rectangle* EG×GH *des parties de la premiere* EH *eſt au rectangle* FG×GV *des parties de la ſeconde, comme le quarré* $\overline{PT}^2$ *de la tangente du diametre de la premiere eſt au quarré* $\overline{LT}^2$ *de la tangente du diametre de la ſeconde.*

Même démonſtration dans tous les cas que pour la parabole (*N.* 668.).

797. PROPOSITION CLVII. *Si deux droites* EI, FH (Fig. 505.) *terminées de part & d'autre à la courbe, ſe rencontrent en dehors en un point* R *hors de l'hyperbole lorſqu'on les prolonge, le rectangle* RF×RH *de la partie exterieure* RF *de la premiere par la ligne entiere* RH, *eſt au rectangle* RE×RI *de la partie exterieure* RE *de la ſeconde par la ligne entiere* RI, *comme le quarré* $\overline{PT}^2$ *de la tangente du diametre de la premiere eſt au quarré* $\overline{LT}^2$ *de la tangente du diametre de la ſeconde.*

Même démonſtration que pour la parabole (*N.* 669.).

798. PROPOSITION CLVIII. *Une tangente* LT *étant donnée* (Fig. 503.), *avec l'ordonnée* LS *au premier axe; ſi du point* T, *on mene une ſecante* TXZ, *cette ſecante ſera coupée harmoniquement aux points* X, V, Z *où elle eſt coupée par la courbe, & par l'ordonnée* LS.

Même démonſtration que pour la parabole (*N.* 670.); & delà on pourroit tirer les mêmes Propoſitions que nous avons deduites pour la parabole (*N.* 671.); & il faut dire la même choſe à l'égard de l'ellipſe; car nous avons démontré (*N.* 713.) qu'une ſecante menée du point où la tangente coupe l'axe, eſt auſſi diviſée harmoniquement par la courbe, & l'ordonnée à l'axe menée du point d'attouchement.

799. PROPOSITION CLIX. *Deux diametres* LK, ZP (Fig. 504.) *étant donnés avec leurs tangentes* LT, TP; *ſi l'on mene une ordonnée*

XV *à l'un des diametres* LK, *& qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre en* R *la tangente* PT *de l'autre diametre* PZ, *le rectangle* RX×RV *de la partie exterieure* RX *par la ligne entiere* RV *eſt au quarré* $\overline{RP}^2$ *de la partie* RP *que la droite* VX *coupe ſur* PT *comme le quarré* $\overline{LT}^2$ *de la tangente du diametre de* VX *eſt au quarré* $\overline{TP}^2$ *de la tangente de l'autre diametre.*

Même démonſtration que pour la parabole (*N.* 672.).

800. PROPOSITION CLX. *Deux ſegmens* ALB, CPD *étant donnés* (Fig. 505.); *ſi les parties* LX, PS *de leurs diametres compriſes dans ces ſegmens, ſont proportionnelles à leurs diametres* LK, PZ *les plus grands triangles inſcrits dans ces ſegmens ſont égaux.*

Même démonſtration que pour l'ellipſe dans tous les cas (*N.* 737.) en ſubſtituant les proprietés de l'hyperbole au lieu de celle de l'ellipſe.

801. *DEFINITION.* Le premier axe AB, & le ſecond CD étant donnés (*Fig.* 506.); ſi par l'une des extrêmités B du premier axe, on mene une tangente QP, ſur laquelle on prenne la partie BP, & la partie BQ égales chacune à la moitié OD ou OC du ſecond axe, les lignes indefinies OL, OY, menées du centre O par les extrémités P, Q de la droite QP, ſe nomment *Aſymptotes* de l'hyperbole, & ſi on prolonge ces droites de l'autre côté du centre en X & en Z, elles ſeront les aſymptotes de l'hyperbole oppoſée dont le ſommet eſt A.

802. COROLLAIRE. *Si des extrêmités* C, D *du ſecond axe, on mene des lignes à l'extrêmité* B *du premier axe, ces deux lignes ſeront égales à cauſe de* C *&* D *également éloignés de* B, *& elles ſeront coupées chacune en deux également par les aſymptotes aux points* V, T. Car menant la droite DP, la Figure ODPB ſera un rectangle, & la diagonale OP coupera la diagonale BD en deux également, & la même choſe arrivera de CB. De plus DB ſera paralelle à l'aſymptote OY, à cauſe de OD paralelle & égale à QB, & par la même raiſon CB ſera paralelle à l'aſymptote DL.

803. PROPOSITION CLXI. *L'hyperbole eſt toute entiere dans l'angle* YOL (Fig. 506.) *que font les aſymptotes, & elles ne les touche point.*

Concevons une infinité de lignes, telles que MN, &c. menées paralellement à la tangente, & qui coupent une l'hyperbole, & les aſymptotes; les triangles ſemblables NEO, PBO donnent

NE. EO :: PB. BO; donc $\overline{NE}^2$. $\overline{EO}^2$ :: $\overline{PB}^2$ ou $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$; mais par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{EI}^2$. EB×EA :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$, & EB×EA = $\overline{EO}^2$ — $\overline{OB}^2$ (*N.* 148.); donc $\overline{EI}^2$. $\overline{EO}^2$ — $\overline{OB}^2$ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$, & partant $\overline{EI}^2$. $\overline{EO}^2$ — $\overline{OB}^2$ :: $\overline{NE}^2$. $\overline{EO}^2$; mais $\overline{EO}^2$ — $\overline{OB}^2$ eſt moindre que $\overline{EO}^2$; donc $\overline{EI}^2$ eſt auſſi moindre que $\overline{NE}^2$, & EI moindre que NE, c'eſt-à-dire le point I de la courbe eſt entre les aſymptotes ſans les toucher, & comme cela arrivera partout; il s'enſuit que l'hyperbole ne touchera jamais l'aſymptote OL, & on prouvera de la même façon qu'elle ne touchera jamais l'aſymptote OY.

804. COROLLAIRE Ier. *Si l'on conçoit une infinité de lignes, telles que* MN, &c. *paralelles à la tangente* QP *ou au ſecond diametre & qui coupent l'hyperbole & les aſymptotes, les parties* MH, IN *de chacune de ces lignes compriſes entre la courbe & les aſymptotes, ſeront égales entr'elles.* Les triangles ſemblables NEO, PBO donnent NE. PB :: EO. BO, & à cauſe des triangles ſemblables MEO, QBO, nous avons ME. QB :: EO. BO; donc NE. PB :: ME. QB; or PB=QB, donc NE=ME, mais HE=EI, à cauſe que HI eſt une double ordonnée au premier axe; donc NE — EI = ME — HE, c'eſt-à-dire NI=MH.

805. COROLLAIRE II. *Poſant toujours les droites* MN, &c. *paralelles à* QP, *ou* CD, *les rectangles* MH×HN *de la partie* MH *de chacune de ces lignes compriſes entre la courbe & l'aſymptote par le reſte* HN *de ces mêmes lignes, eſt égal au quarré* $\overline{QB}^2$ *ou* $\overline{CO}^2$ *de la moitié du ſecond axe.* A cauſe des triangles ſemblables MEO, QBO, nous avons ME. EO :: QB. BO; donc $\overline{ME}^2$. $\overline{EO}^2$ :: $\overline{QB}^2$. $\overline{BO}^2$; or, par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{HE}^2$. EB×EA ou $\overline{EO}^2$ — $\overline{BO}^2$ (*N.* 148.) :: $\overline{QB}^2$. $\overline{BO}^2$; donc $\overline{ME}^2$. $\overline{EO}^2$ :: $\overline{HE}^2$. $\overline{EO}^2$ — $\overline{BO}^2$, ou $\overline{ME}^2$. $\overline{HE}^2$ :: $\overline{EO}^2$. $\overline{EO}^2$ — $\overline{BO}^2$; donc en diviſant $\overline{ME}^2$ — $\overline{HE}^2$. $\overline{HE}^2$ :: $\overline{EO}^2$ — $\overline{EO}^2$ + $\overline{BO}^2$. $\overline{EO}^2$ — $\overline{BO}^2$; ce qui ſe réduit à $\overline{ME}^2$ — $\overline{HE}^2$. $\overline{HE}^2$ :: $\overline{BO}^2$. $\overline{EO}^2$ — $\overline{BO}^2$; or, à cauſe que HI eſt diviſée en deux également en E, & que MH lui eſt ajoutée, nous avons $\overline{ME}^2$ — $\overline{HE}^2$ = MH×MI = MH×HN, à cauſe de MI=HN;

donc $MH \times HN. \overline{HE}^2 :: \overline{BO}^2. \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$, ou $\overline{HE}^2. \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2 :: MH \times HN. \overline{BO}^2$; or nous avons $\overline{HE}^2. \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2 :: \overline{QB}^2$, ou $\overline{CD}^2. \overline{BO}^2$; donc $MH \times HN. \overline{BO}^2 :: \overline{QB}^2$, ou $\overline{CD}^2. \overline{BO}^2$, & partant $MH \times HN = \overline{QB}^2$.

806. COROLLAIRE III. *Donc tous les rectangles* $MH \times HN$ *ſont égaux entr'eux*, puiſqu'ils ſont tous égaux au quarré $\overline{QB}^2$ ou $\overline{CO}^2$. Et il faut dire la même choſe des rectangles $NI \times IM$.

807. COROLLAIRE IV. *Les parties* MH *ou* IN *des droites* MN *vont en diminuant à meſure que les lignes* MN *s'éloignent du centre* O. Les rectangles $MH \times HN$ ſont tous égaux entr'eux. Or les HN vont en augmentant à meſure qu'ils ſont plus éloignés du centre O, car leurs parties HE étant ordonnées au premier axe augmentent en s'éloignant de O, & leurs parties EN qui ſont les élémens du triangle OEN augmentent auſſi en s'éloignant de O; donc puiſque les HN augmentent, il faut néceſſairement que les HM diminuent ſi l'on veut conſerver l'égalité des rectangles $MH \times HN$.

808. COROLLAIRE V. *Les aſymptotes* OY, OL *approchent de plus en plus de l'hyperbole & ne la touchent jamais.* Les doubles ordonnées HI, &c. au premier axe ſeront toujours moindres que les MN, &c. (*N.* 803.) & les MH ou les IN diminueront à meſure qu'elles s'éloigneront davantage du ſommet O (*N.* 807.) donc les aſymptotes approcheront de plus en plus de la courbe, ſans pouvoir jamais la toucher.

809. COROLLAIRE VI. *Si d'un point quelconque* H *pris ſur la courbe* (Fig. 507.) *on mene une droite* RHT *paralelle à l'aſymptote voiſine* OY, *la partie* RH *de cette paralelle menée du côté du centre* O, *ſera toute entiere hors de l'hyperbole, & l'autre partie* HT *ſera toute entiere dans l'hyperbole.* Je mene par le point H la droite MN paralelle à QP ou au ſecond axe CD, & entre MN & QP je mene une autre paralelle SL, compriſe entre les aſymptotes de même que MN; à cauſe des paralelles MN, SL, & MO, HR, nous avons $MH = SI$; mais la partie SZ de la paralelle SL compriſe entre l'aſymptote OY, & la courbe eſt plus grande que la partie MH de la droite MN (*N.* 807.) donc SI eſt moindre que SZ, & le point I de la droite HR eſt hors de l'hyperbole, & l'on prouvera de la même façon que tous les autres points de HR ſont hors de la courbe.

Je mene entre les aſymptotes en deſſous du point H une autre droite FE paralelle à QP; ainſi nous aurons FX = MH à cauſe des paralelles MN, FE, & FO, TR. Or la partie F*f* de la droite FE compriſe entre l'aſymptote OY, & la courbe eſt moindre que MH (*N.* 807.) donc FX eſt plus grand que F*f*, & le point X de la droite RHT eſt dans l'hyperbole, & on prouvera de la même façon que tous les points de la partie HT ſont dans l'hyperbole.

810. COROLLAIRE VII. *Si par le centre* O *d'une hyperbole* (Fig. 507.) *on mene un droite* OG *qui coupe l'angle* YOE *des aſymptotes* YO, OE, *cette ligne* OG *coupera l'hyperbole & ſera un diamétre.* Plus la ligne OG eſt prolongée, & plus ſes points s'éloignent de l'aſymptote OE avec qui elle fait l'angle GOE; au contraire, plus l'hyperbole eſt prolongée du côté de E, plus ſes points s'approchent de l'aſymptote (*N.* 808.) or la ligne OE & l'hyperbole peuvent être prolongées à l'infini; donc à force de prolonger l'une & l'autre, il ſe trouvera néceſſairement quelque point G de la ligne OG qui ſera plus éloignée de l'aſymptote OE que le point correſpondant *g* de l'hyperbole ne le ſera de la même aſymptote. Ainſi le point G ſera dans l'hyperbole, mais le point O de la ligne OG eſt hors de l'hyperbole; donc cette ligne coupera la courbe en quelque point, après quoi il eſt viſible qu'elle ne le coupera plus.

811. PROPOSITION CLXII. *Si de deux ou pluſieurs points* X, R *pris ſur la courbe* (Fig. 508.) *on mene des droites* XH, XS, *&* RL, RI *paralelles aux aſymptotes, les rectangles* XH × XS, RL × LI *ſeront égaux entr'eux.*

Je mene par les points X, R, des droites HE, MN, paralelles à QP ou CD & qui ſe terminent aux aſymptotes, les triangles ſemblables MHX, HRI donnent MX. HX :: HR. RI; & à cauſe des triangles ſemblables NXS, ERL, nous avons NX. XS :: ER. RL; multipliant donc les termes de cette proportion par ceux de la premiere, nous aurons MX × NX. HX × XS :: HR × ER. RI × RL; mais les rectangles MX × NX, HR × ER, ſont égaux entr'eux (*N.* 806.) donc les rectangles HX × XS, RI × RL le ſont auſſi.

812. COROLLAIRE Ier. *Si du ſommet* B *on mene les droites* BV, BT *paralelles aux aſymptotes* (Fig. 508.) *leſquelles ſeront égales parce qu'elles ſont les moitiés des lignes* BD, BC *menées aux extrêmités* D, C *du petit axe* (N. 802.) *je dis que les rectangles* HX × XS

RL × RI *ſeront égaux chacun au quarré de* VB *ou de ſon égale* BT. Car menant au ſommet B de l'hyperbole la droite QP, laquelle eſt égale au petit axe CD & coupée en deux également en B (*N.* 801.) les triangles ſemblables MXH. QBV donneront MX. XH :: QB. BV; & à cauſe des triangles ſemblables NXS. PBT, nous aurons NX. XS :: PB. BT; donc en multipliant les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons MX × NX. XH × XS :: QB × PB, ou $\overline{QB}^2$. BV × BT ou $\overline{BV}^2$; or MX × NX = $\overline{QB}^2$ (*N.* 802); donc XH × XS = $\overline{BV}^2$; mais XH × XS = RI × RL; donc auſſi RI × RL = $\overline{BV}^2$.

Nota. Il y a bien des Auteurs qui nomment le quarré de BT ou de BV ſon égale *puiſſance* de l'hyperbole, à cauſe que ce quarré eſt toujours égal aux rectangles XH × XS, RI × RL, &c.

813. COROLLAIRE II. *Si d'un point quelconque* X *pris ſur l'hyperbole* (Fig. 508.) *on mene une ligne* XH *paralelle à l'aſymptote* OF *qui eſt de l'autre côté de l'hyperbole, le rectangle* XH, OH *de la ligne* XH *par la partie* OH *qu'elle coupe ſur l'aſymptote* OY *eſt toujours égal au quarré de* BV, *c'eſt-à-dire à la puiſſance de l'hyperbole.* Car menant du point X la droite XS paralelle à l'aſymptote OY, nous aurons HX × XS = $\overline{BV}^2$ (*N.* 812.) Or à cauſe des paralelles HX, OS & HO, XS, nous avons HO = XS; donc HX × XS = HX × XO, & partant HX × HO = $\overline{BV}^2$. Ceci eſt la proprieté de l'hyperbole entre ſes aſymptotes.

814. PROPOSITION CLXIII. *Si de deux ou pluſieurs points* X, R, &c. (Fig. 509.) *pris ſur l'hyperbole, on mene des lignes* XT, RS, &c. *paralelles entr'elles, & qui faſſent avec l'aſymptote* OY *tel angle que l'on voudra, & que des mêmes points on mene d'autres lignes* XH, RL, &c. *auſſi paralelles entr'elles, & qui faſſent avec l'autre aſymptote* OF *un angle quelconque, je dis que les rectangles* TX × XH, SR × RL, &c. *ſont tous égaux entr'eux.*

Je mene par les points X, R, &c. des droites MN, EI entre les aſymptotes & paralelles au ſecond axe CD. Les triangles ſemblables MTX, ERS donnent TX. MX :: SR. ER, & à cauſe des triangles ſemblables HXN, LRI, nous avons HX. XN :: LR. RI; multipliant donc les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons TX × HX. MX × XN :: SR × LR. ER × RI, mais MX × XN = ER × RI; donc TX × HX = SR × RL.

815. PROPOSITION CLXIV. *Si l'on mene entre les aſymptotes une ligne* MN (Fig. 510.) *qui coupe l'hyperbole & qui ſoit inclinée au premier axe, les parties* MX, RN *de cette ligne compriſes entre la courbe & les aſymptotes ſont égales.*

Je prens ſur la droite MN une partie NR égale à la partie MX, ſans m'embarraſſer ſi l'extrêmité R de cette partie eſt en dedans ou en dehors de l'hyperbole; du point R je mene les lignes RT, RH paralelles aux aſymptotes, & du point X les droites XE, XS paralelles auſſi aux aſymptotes. C'eſt pourquoi ſi le point R eſt véritablement ſur la courbe, il s'enſuivra néceſſairement que les rectangles RH × RT, SX × XE ſeront égaux (*N.* 811.) Voyons donc ſi nous trouverons cette égalité.

Les triangles ſemblables MSX, RHN ayant le côté MX égal au côté NR par la conſtruction ſont égaux & MS = RH, SX = HN; or à cauſe des paralelles, nous avons SX = OE & RH = TO; donc OE = HN, & partant OH ou TR = EN; de même MS = TO. Les triangles ſemblables MSX, XEN donnent MS ou TO. SX :: XE. EN ou OH; donc TO × OH ou RH × RT = SX × XE, par conſéquent le point R eſt véritablement ſur la courbe.

816. COROLLAIRE Ier. *Pluſieurs lignes* MN, SL (Fig. 511.) *paralelles entr'elles & obliques à l'axe, étant menées entre les aſymptotes, ſi du centre* O *l'on mene leur diamétre* OT, *& du ſommet* Z *la tangente* HV *qui ſera paralelle aux* MN, SL, &c. *je dis que cette tangente ſera diviſée en deux également en* Z. Les doubles ordonnées XR, YI au diamétre OT ſont coupées en deux également en E, T par ce diamétre; donc ſi on leur ajoute de part & d'autre les parties égales MX, RN, & SY, IL (*N.* 815.) nous aurons ME = EN, & ST = TL; or les triangles ſemblables OEN, OZV donnent EN. ZV :: OE. OZ, & à cauſe des triangles ſemblables OEM. OZH, nous avons ME. HZ :: OE. OZ; donc EN. ZV :: ME. HZ; mais EN = ME; donc ZV = ZH.

817. COROLLAIRE II. *Poſant les mêmes choſes que dans le Corollaire précédent, les rectangles* MX × XN, SY × YL, &c. *des parties* MX, SY *des droites* MN, SL, *par les reſtes* XN, YL *de ces mêmes droites ſont égaux entr'eux & au quarré de la moitié* ZV *ou* ZH *de la tangente du diamétre* OT. Par les points Y, X, Z je mene les droites Q*q*, P*p*, F*f* paralelles entr'elles & au ſecond axe. Les triangles ſemblables SYQ, MXP donnent SY. QY

:: MX. PX, & à cauſe des triangles ſemblables LYq, NXp, nous avons LY. Yq :: NX. Xp; multipliant donc les termes de ces deux proportions les uns par les autres, nous aurons SY × LY. QY × Yp :: MX × NX. PX × XP; or QY × Yq = PX × Xp (*N.* 806.) donc SY × LY = MX × NX.

Maintenant la droite Ff n'étant pas tangente au point Z coupera l'hyperbole en deux points, & à cauſe des triangles ſemblables MXP, HZF, & NXp, VZf, nous aurons MX. PX :: HZ. FZ, & NX. Xp. VZ. Zf. Donc en multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous aurons MX × NX. PX × Xp. HZ × VZ, ou $\overline{HZ}^2$. FZ × Zf; mais PX × Xp = FZ × Zf (*N.* 806.) donc MX × NX = $\overline{HZ}^2$; or MX × NX = SY × YL; donc SY × YL = $\overline{HZ}^2$.

818. Corollaire III. *Donc toutes les tangentes terminées entre les deux aſymptotes, ſont coupées en deux également aux points d'attouchement.* Ce qui eſt viſible par le précédent Corollaire.

819. Corollaire IV. *Deux ou pluſieurs tangentes* MT, LR (Fig. 512.) *étant menées entre les aſymptotes, les triangles* MTO, RLO *qu'elles font avec les aſymptotes ſont égaux entr'eux.* Des points d'attouchement N, S je mene les droites NP, NV, SX, SZ paralelles aux aſymptotes, ce qui donne PN × NV = XS × ZS (*N.* 811.) d'où je tire NV. ZS :: XS. PN; or les paralellogrammes PNVO, XSZO ayant l'angle POX commun ſont équiangles, & à cauſe que leurs baſes NV, ZS ſont réciproques à leurs côtés XS, PN, leurs hauteurs, c'eſt-à-dire les perpendiculaires Xx, Pp ſeront auſſi réciproques aux baſes, car les triangles ſemblables XxS, PpN donneront Xx. Pp :: XS. PN, & partant Xx. Pp :: NV. ZS; donc nous aurons Xx × ZS = Pp × NV, c'eſt-à-dire les paralellogrammes XSZO, PNVO égaux entr'eux; or à cauſe que la tangente MT eſt diviſée en deux également en N, & que PN eſt paralelle à OR, le côté MO du triangle MOT eſt double du côté PO du paralellogramme PNVO, & ſa baſe OT eſt auſſi double de la baſe OV ou PN du même paralellogramme; donc le triangle MOT eſt double du paralellogramme PNVO, & par la même raiſon le triangle LRO eſt double du paralellogramme XSZO; donc puiſque les paralellogrammes PNVO, XSZO ſont égaux, les triangles MOV, RML ſont auſſi égaux.

820. COROLLAIRE V. *Les triangles* MTO, RLO (Fig. 512.) *faits par deux tangentes* MT, LR *avec les aſymptotes, ont les côtés autour de l'angle commun* O *réciproques entr'eux.* Nous venons de trouver (*N.* 819.) NV ou PO. ZS ou OX :: SX, ou OZ. PN ou VO, c'eſt-à-dire PO. OX :: OZ. OV; donc en doublant tous les termes, nous aurons MO. OR :: OL. OT.

821. *DEFINITION.* Deux hyperboles oppoſées étant décrites avec leurs aſymptotes *Yy*, *Tt* (*Fig.* 513.) ſi l'on prend le ſecond axe CD de ces hyperboles pour le premier axe de deux autres hyperboles MC*m*, ND*n* qui auront leurs ſommets en C & D, & dont le ſecond axe ſera le premier AB, ces deux nouvelles hyperboles ſe nommeront *conjuguées* des deux hyperboles oppoſées.

822. PROPOSITION CLXV. *Les hyperboles conjuguées ont les mêmes aſymptotes que les hyperboles oppoſées* (Fig. 513.)

Je mene par les ſommets A, B des hyperboles oppoſées & entre les aſymptotes les tangentes HL, RS, leſquelles ſeront paralelles & égales chacune au ſecond axe CD de ces hyperboles (*N.* 781.) & diviſées chacune en deux également en A, & B de même que CD eſt diviſé en O. Donc en joignant leurs extrêmités par les droites HR, LS, ces droites ſeront paralelles & égales chacune au premier axe AO des hyperboles oppoſées, & elles ſeront diviſées en deux également en C & D par les extrêmités de CD; or CD eſt le premier axe des hyperboles conjuguées, AB eſt le ſecond, & les droites HR, SL qui paſſent par le ſommet de ces hyperboles ſont égales & paralelles à AB, & de plus elles ſont diviſées également en C & D de même que AB l'eſt en O; donc ſi du centre O on mene *Yy*, *Tt* qui paſſent par les extrêmités R, L, S, H de ces lignes, les droites *Yy*, *Tt* ſeront les aſymptotes des conjuguées (*N.* 801.) or elles ſont auſſi les aſymptotes des hyperboles oppoſées, puiſqu'elles paſſent par les extrêmités des droites RS, HL. Donc, &c.

823. COROLLAIRE Ier. *La puiſſance des hyperboles conjuguées eſt la même que celle des hyperboles oppoſées.* Je mene les lignes AC, CB, BD, DA, leſquelles ſeront égales entr'elles à cauſe des extrêmités A, B de l'axe AB également éloignées des extrêmités C, D de l'axe CD, & de plus elles ſeront diviſées chacune en deux également par les aſymptotes & BV = VD; or $\overline{BV}^2$ eſt la

puiſſance des hyperboles oppoſées (*N.* 812.) & $\overline{DV}^2$ eſt la puiſſance des conjuguées. Donc, &c.

824. COROLLAIRE II. *Tout ce que nous avons dit touchant les hyperboles oppoſées doit ſe dire auſſi touchant les conjuguées.* Ce qui eſt évident.

825. *REMARQUE.* Ceci peut nous faire voir aiſément d'où vient que dans l'hyperbole la proprieté des ordonnées au ſecond axe, n'eſt pas la même que la proprieté des ordonnées au premier; car nous avons vû que le quarré d'une ordonnée F*f* au premier axe AB eſt au rectangle FB × AF ou au quarré $\overline{OF}^2$ de ſa diſtance au centre moins le quarré $\overline{OB}^2$ du demi premier axe, comme le quarré du ſecond axe CD eſt au quarré du premier AB (*N.* 770.) & qu'au contraire le quarré $\overline{fm}^2$ d'une ordonnée au ſecond axe CD eſt au quarré de ſa diſtance *m*O au centre plus le quarré OD du demi ſecond axe, comme le quarré du premier axe AB au quarré du ſecond (*N.* 773.) ce qui eſt bien différent. Mais ſi nous rapportons cette ordonnée *fm* dans ſon véritable lieu, c'eſt-à-dire dans l'hyperbole conjuguée en prolongeant F*f* juſqu'à ce qu'elle coupe la conjuguée en N, & menant enſuite l'ordonnée N*d* qui ſera égale à *fm*; on trouvera que le quarré de cette ordonnée eſt au rectangle *d*D × CD ou à $\overline{Od}^2 - OD$, comme le quarré $\overline{BA}^2$ eſt au quarré $\overline{CD}^2$, & par conſéquent la proprieté de l'ordonnée N*d* au ſecond axe CD de l'hyperbole PBQ ſera ſemblable à la proprieté de l'ordonnée F*f* au premier axe de cette hyperbole.

826. COROLLAIRE III. *Tous les premiers diamétres des hyperboles oppoſées* PBQ, ZAX (Fig. 514.) *ſont des ſeconds diamétres des hyperboles conjuguées, & tous les premiers diamétres des hyperboles conjuguées ſont des ſeconds diamétres des hyperboles oppoſées.*

Nous avons déja dit que les premiers diamétres d'une hyperbole ſont ceux qui la coupent, & que les ſeconds ſont ceux qui ne la coupent pas, & que les uns & les autres doivent paſſer par le centre O. Cela poſé, tout diamétre V*u* des hyperboles oppoſées doit paſſer par les angles YOT, *t*OI des aſymptotes qui embraſſent ces hyperboles, car autrement il eſt viſible qu'il ne les couperoit pas. Donc ce diamétre ne paſſe point TOY, IO*t* qui embraſſent les hyperboles conjuguées, & par conſéquent il ne les coupe pas; donc V*u* eſt un ſecond diamétre des hyper-

boles conjuguées. On prouvera de la même façon que la droite Ff qui eſt un premier diamétre des conjuguées eſt un ſecond diamétre des oppoſées.

827. COROLLAIRE IV. *Si par les extrêmités d'un premier diamétre* V*u* (Fig. 514.) *de deux hyperboles oppoſées ou de deux hyperboles conjuguées, on mene des tangentes* Y*b*, I*n qui ſe terminent aux aſymptotes, ces deux tangentes ſont égales.* Je mene les ordonnées ux, Vd au premier axe, & à cauſe de $uO = VO$ (*N.* 776. les triangles ſemblables uOx, VOd ſont parfaitement égaux & $xO = dO$; or pour trouver les points g, G où les tangentes coupent le premier axe, il faut faire :: xO. BO. Og & :: dO. AO. OG, & dans ces deux proportions les deux premiers termes xO. BO d'une part ſont égaux chacun à chacun aux deux premiers termes dO, AO de l'autre; donc le troiſiéme Og eſt égal au troiſiéme OG; ainſi les deux triangles gOu, GOV ſont égaux, puiſqu'ils ont les côtés gO, Ou égaux chacun à chacun aux côtés GO, OV, & l'angle compris gOu égal à l'angle compris GOV, à cauſe que ces angles ſont oppoſés au ſommet; donc $ug = VG$; de même les triangles ſemblables gbO, GnO étant égaux à cauſe de $gO = GO$, donnent $gb = Gn$; donc $ug + gb = VG + Gn$, ou $ub = Vn$. Mais $Yb = 2ub$ (*N.* 818.) & $In = 2Vn$; donc $Yb = In$, & à cauſe des triangles égaux & ſemblables gOu, GOV l'angle guO eſt égal à ſon alterne GVO, & les tangentes ſont paralelles.

Et on prouvera de la même façon que les tangentes menées aux extrêmités d'un premier diamétre des hyperboles conjuguées & terminées entre les aſymptotes, ſont égales & paralelles.

828. PROPOSITION CLXVI. *Un premier diamétre* VP *des hyperboles oppoſées* (Fig. 515.) *étant donné avec ſes deux tangentes* YN, IG *terminées aux aſymptotes, je dis que ſi de l'un des points d'attouchement* P *on mene deux droites* PS, PX *paralelles aux aſymptotes, & qui ſe terminent aux hyperboles conjuguées, ces deux lignes ſeront coupées chacune en deux également par les aſymptotes aux points* H, E.

Dans l'hyperbole B le rectangle PH × HO eſt égal à ſa puiſſance (*N.* 812.) & par la même raiſon dans l'hyperbole C le rectangle SH × HO eſt égal à ſa puiſſance; or les puiſſances de ces deux hyperboles ſont égales (*N.* 823.) donc PH × HO = SH × HO; & par conſéquent à cauſe de la hauteur commune HO, nous aurons PH = SH.

On démontrera de la même façon que PX eſt diviſé en deux également en E.

829. COROLLAIRE Ier. *Poſant les mêmes choſes, ſi du point* S *on mene par le centre le diamétre* SX, *ce diamétre eſt égal & paralelle à l'une ou l'autre des tangentes* YN, IG *du diamétre* PV. A cauſe de la tangente YN diviſée en deux également en P (*N.* 818.) & de PH paralelle à ON, nous avons dans le triangle YON la baſe ON double de HP, de même que YN eſt double de YP; or HS = HP (*N.* 828.) donc SP = 2HP = ON, & par conſéquent à cauſe que SP eſt paralelle à ON, nous aurons SO égal & paralelle à PN & le double de SO, c'eſt-à-dire le diamétre SX égal au double de PN, c'eſt-à-dire à la tangente YN.

Nota. Toute tangente YN compriſe entre les aſymptotes eſt égale & paralelle au diamétre conjugué SX de ſon diamétre PV.

830. COROLLAIRE II. *Poſant encore les mêmes choſes, ſi par les extrêmités des tangentes* YN, IG *on mene les droites* YG, NI, *ces droites ſeront chacune égale & paralelle au diamétre* VP, *& elles toucheront les hyperboles conjuguées aux extrêmités* S, X *du diamétre* SX. Elles ſeront égales & paralelles chacune au diamétre VP; cela eſt évident, à cauſe que les tangentes YN, GI ſont paralelles & égales entr'elles & au diamétre SX, & que de plus ces tangentes & le diamétre ſont coupées en deux également par le diamétre VP. D'autre côté, les mêmes droites YG, NI ſeront tangentes en S & X, car il eſt clair qu'elles paſſeront par ces points & qu'elles y ſeront coupées en deux également, à cauſe que le diamétre SX eſt également éloigné des deux tangentes YN, IG; or elles ne peuvent être coupées en deux également en S & X ſans être tangentes en ces points; car ſi elles coupoient les hyperboles en deux points, elles auroient chacune une partie en dedans des courbes, & deux parties entre la courbe & les aſymptotes qui ſeroient égales entr'elles, ce qui empêcheroit que l'une des parties compriſe entre la courbe & les aſymptotes ne fût égale aux deux autres; donc il faut néceſſairement que ces droites YG, NI ſoient tangentes en S & X.

831. *DEFINITION.* Lorſque deux diamétres VP, SX (*Fig.* 515.) ſont réciproquement paralelles à leurs tangentes, c'eſt-à-dire le diamétre VP paralelle aux tangentes YG, NI du diamétre SX, & le diamétre SX paralelles aux tangentes YN, IG du diamétre PV; ces deux diamétres ſe nomment *Diamétres conjugués.*

832. COROLLAIRE III. *Le paralellogramme de deux diamétres conjugués quelconques* VP, SX (Fig. 516.) *c'eſt-à-dire le paralellogramme* YNIG *fait par leurs tangentes, eſt égal au rectangle des deux axes, c'eſt-à-dire au rectangle* HTRQ *fait par les tangentes de ces axes.* Le triangle ONY fait par la tangente YN du diamétre PV avec les aſymptotes, eſt égal au triangle QOR fait avec les mêmes aſymptotes par la tangente QR de l'axe AB (*N.* 819.) or le triangle ONY eſt le quart du paralellogramme YNIG, & le triangle QOR eſt le quart du rectangle HTRQ; donc le paralellogramme & le rectangle ſont égaux.

833. COROLLAIRE IV. *Tous les paralellogrammes des diamétres conjugués ſont égaux entr'eux.* Ils ſont égaux chacun au rectangle des axes. Donc, &c.

834. COROLLAIRE V. *La difference des quarrés de deux diamétres conjugués quelconques eſt égale à la difference des quarrés des deux axes de l'hyperbole.*

Soit un demi-diamétre quelconque OR (*Fig.* 517.) le demi premier axe OB, & la tangente PQ au ſommet B, laquelle eſt égale au ſecond axe (*N.* 801.) ainſi QB ſera la moitié de ce ſecond axe. Je mene en R la tangente YN, laquelle eſt égale au diamétre conjugué du demi-diamétre RO (*N.* 829.) & partant YR eſt la moitié de ce diamétre conjugué. Je mene par les points R, B, P, N des droites RS, BV, PM, NH perpendiculaires à l'aſymptote OY. Le quarré de OR eſt donc égal au quarré de OS, plus le quarré de RS à cauſe du triangle rectangle OSR, & par la même raiſon le quarré de YR eſt égal au quarré de YS, plus le quarré de SR, & retranchant de part & d'autre le quarré de SR, la différence des quarrés des demi-diamétres conjugués, OR, YR ſera la même que celle des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{YS}^2$. Or à cauſe de YN diviſé en deux également en R (*N.* 818.) & de SR paralelle à NH, nous avons YS = SH; donc la différence des quarrés $\overline{SO}^2$. $\overline{YS}^2$ eſt la même que celle des quarrés $\overline{SO}^2$. $\overline{SH}^2$; mais $\overline{SO}^2 = \overline{OH}^2 + 2OH \times SH + \overline{SH}^2$ (*N.* 140.) donc la différence des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{SH}^2$ eſt $\overline{OH}^2 + 2SH \times OH$, ou $\overline{OH}^2 + YH \times OH$, ou enfin $YO \times OH$, & cette différence eſt la même que celle des quarrés des demi-diamétres conjugués OR, YR.

De même nous avons $\overline{OB}^2 = \overline{OV}^2 + \overline{VB}^2$ à cauſe du triangle rectangle OVB, & $\overline{QB}^2 = \overline{QV}^2 + \overline{VB}^2$ à cauſe du triangle rectangle QVB, & retranchant de part & d'autre le quarré $\overline{VB}^2$, la différence des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{QB}^2$ du premier axe & du demi ſecond axe, ſera la même que celle des quarrés $\overline{QV}^2$, $\overline{VO}^2$; or à cauſe de QP diviſé en deux également en B & des paralelles BV, PM nous avons QV = VM; donc la différence des quarés $\overline{QV}^2$, $\overline{VO}^2$ eſt la même que celle des quarrés $\overline{VM}^2$, $\overline{VO}^2$; mais $\overline{VO}^2 = \overline{MO}^2 + 2VM \times MO + \overline{VM}^2$; donc la différence des quarrés $\overline{VM}^2$, $\overline{VO}^2$ eſt $2VM \times MO + \overline{MO}^2$, ou $MQ \times MO + \overline{MO}^2$, ou enfin $OQ \times MO$, & cette différence eſt la même que celle des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{BQ}^2$ des deux demi-axes.

Il reſte donc à faire voir que la différence $YO \times OH$ des quarrés $\overline{OR}^2$, $\overline{RY}^2$ des deux demi-diamétres conjugués eſt égale à la différence $OQ \times MO$ des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{BQ}^2$ des demi-axes, les triangles ſemblables OHN, OMP donnent OH. HN :: OM. MP; donc en multipliant les deux premiers termes par OY; & les deux autres par QO, nous aurons $OH \times OY$. $HN \times OY$ :: $QO \times OM$. $QO \times MP$, ou $OH \times OY$. $QO \times OM$ :: $HN \times OY$. $QO \times MP$; or $HN \times OY$ eſt double du triangle YON, à cauſe que HN eſt la perpendiculaire menée de ſon ſommet N ſur la baſe OY, & par la même raiſon $QO \times MP$ eſt double du triangle QOP, & ces deux triangles ſont en même raiſon que leurs doubles; donc $OH \times OY$ :: $QO \times OM$ :: YON. QOP; mais YON = QOP (*N.* 819.) donc $OH \times OY = QO \times OM$, c'eſt-à-dire la différence des quarrés $\overline{OR}^2$, $\overline{RY}^2$ des deux demi-diamétres conjugués eſt la même que celle des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{QB}^2$ des deux demi-axes, & par conſéquent la différence des quarrés des diamétres conjugués eſt la même que celle des quarrés des deux axes.

835. PROPOSITION CLXVII. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* RS *à un diamétre* VP (Fig. 518.) *eſt au rectangle* PS × SV *de ſon abſciſſe par le diamétre prolongé juſqu'à l'ordonnée, comme le quarré du*

du diamétre EF *conjugué du diamétre* VP *eſt au quarré du diamétre* VP.

Je mene les aſymptotes & la tangente HL au ſommet P du diamétre VP, laquelle tangente eſt égale au diamétre EF (*N.* 829.) & je prolonge l'ordonnée RS de part & d'autre juſqu'aux aſymptotes en M & en N. Les triangles ſemblables MSO, HPO donnent MS. HP. SO. PO; donc $\overline{MS}^2$. $\overline{HP}^2$ :: $\overline{SO}^2$. $\overline{PO}^2$; donc $\overline{MS}^2 - \overline{HP}^2$. $\overline{HP}^2$ :: $\overline{SO}^2 - \overline{PO}^2$. $\overline{PO}^2$. Or à cauſe de $\overline{HP}^2 = MR \times RN$ (*N.* 817.) nous avons $\overline{MS}^2 - \overline{HP}^2 = \overline{MS}^2 - MR \times RN$; & à cauſe de MN diviſé en deux également en S, & en deux inégalement en R, nous avons $\overline{MS}^2 - MR \times RN = \overline{RS}^2$; donc $\overline{RS}^2$. $\overline{HP}^2$ :: $\overline{SO}^2 - \overline{PO}^2$. $\overline{PO}^2$, ou $\overline{RS}^2$. $\overline{SO}^2 - \overline{PO}^2$ :: $\overline{HP}^2$. $\overline{PO}^2$. Or $\overline{SO}^2 - \overline{PO}^2 = SP \times SV$ (*N.* 148.) donc $\overline{RS}^2$. $SP \times SV$ :: $\overline{HP}^2$, ou $\overline{EO}^2$. $\overline{PO}^2$ :: $\overline{EF}^2$. $\overline{VP}^2$.

836. COROLLAIRE. *Le quarré d'une ordonnée* RL *au diamétre* EF *conjugué du premier diamétre* PV *eſt au quarré* $\overline{LO}^2$, *plus le quarré* $\overline{EO}^2$ *comme le quarré du diamétre* PV *eſt au quarré du diametre* EF. Ce qui ſe démontre de même qu'à l'égard des ordonnées au ſecond axe (*N.* 773.)

837. *DEFINITION.* Deux diamétres conjugués PV, EF (*Fig.* 518.) étant donnés, la troiſiéme proportionnelle au premier & au ſecond eſt le *paramétre* du premier, & la troiſiéme proportionnelle au ſecond & au premier eſt le *paramétre* du ſecond.

838. COROLLAIRE II. *Le quarré d'une ordonnée* RS *à un premier diamétre* VP, *eſt au rectangle* $SP \times SV$ *comme le paramétre de ce diamétre eſt au même diamétre, & le quarré d'une ordonnée* RL *au ſecond diamétre* EF *conjugué de* VP *eſt au quarré* $\overline{LO}^2$, *plus le quarré* $\overline{EO}^2$, *comme le paramétre de ce ſecond diamétre eſt à ce ſecond diamétre.* Ce qui ſe démontre de même qu'à l'égard des deux axes (*N.* 771. 774.)

839. PROPOSITION CLXVIII. *Un premier diamétre* PV (Fig. 519.) *étant donné avec ſes tangentes* PX, VL *& ſon diamétre conjugué* EF, *ſi l'on mene d'un point quelconque pris ſur la courbe une ordonnée* MR *au diamétre* PV, *& une tangente* MX, *laquelle coupera les tangentes* LV, PX *& le diamétre conjugué* EF; *je dis*, 1°.

Que la droite PR, c'eſt-à-dire *le diamétre* VP *prolongé juſqu'à l'ordonnée, eſt diviſé harmoniquement aux points* P, S, V. 2°. *Que le rectangle* MR × OH *de l'ordonnée* MR *par la partie* OH *du diamétre conjugué que la tangente* MX *coupe eſt égal au quarré* $\overline{OF}^2$ *de la moitié de l'axe conjugué* EF. 3°. *Que le rectangle* LV × PX *des parties.* LV, PX *des tangentes du diamétre* PV *que la tangente* MX *coupe eſt encore égal au quarré* $\overline{OF}^2$ *de la moitié de l'axe conjugué.*

A cauſe que l'ordonnée MR eſt menée du point d'atrouchement M, nous avons OR. OV :: OV. OS; or la ligne OP ajoutée à la droite OR eſt égale à la moyenne proportionnelle OV. Donc nous avons RV. VS :: RP. PS. (*N.* 753.) ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Et il faut obſerver qu'on a auſſi RV. RS :: RO. RP, comme il a été obſervé dans l'endroit que je viens de citer (*N.* 753.)

Les triangles ſemblables MSR, HSO donnent SR. SO :: MR. OH, & multipliant les deux premiers termes par OR, & les deux autres par MR, nous aurons SR × OR. SO × OR :: $\overline{MR}^2$. OH × MR; or à cauſe de RV. RS :: RO. RP, nous avons SR × OR = RV × RP, & à cauſe de :: OR. OV. OS, nous avons OR × OS = $\overline{OV}^2$; donc RV × RP. $\overline{OV}^2$ :: $\overline{MR}^2$. OH × MR, ou $\overline{MR}^2$. RV × RP :: OH × MR. $\overline{OV}^2$; mais par la proprieté de l'hyperbole nous avons $\overline{MR}^2$. RV × RP :: $\overline{OF}^2$. $\overline{OV}^2$ (*N.* 835.) donc OH × MR. $\overline{OV}^2$ :: $\overline{OF}^2$. $\overline{OV}^2$, & par conſéquent OH × MR = $\overline{OF}^2$, ce qu'il falloit 2°. démontrer.

A cauſe de :: OR. OV. OS, nous avons OR — OV. OV :: OV — OS. OS, c'eſt-à-dire RV. SV :: OV ou OP. OS; donc RV + SV. SV :: OP + OS. OS, c'eſt-à-dire SR. SV :: PS. OS; mais à cauſe des triangles ſemblables MSR, LSV, nous avons SR. SV :: MR. LV, & à cauſe des triangles ſemblables PSX, OSH, nous avons PS. OS :: PX. OH; donc MR. LV :: PX. OH, d'où je tire MR × OH = LV × PX; mais MR × OH = $\overline{OF}^2$; donc auſſi LV × PX = $\overline{OF}^2$, ce qu'il falloit 3°. démontrer.

840. Proposition CLXIX. *Une tangente* TPM (Fig. 520.) *étant donnée, ſi l'on décrit autour du premier axe* AB *un cercle* ARBH, *& que des points* R, H *où la tangente* TM *coupe le cercle,*

on éleve des perpendiculaires IZ, HX *ſur cette tangente, ces perpendiculaires paſſeront par les foyers* X, Z *des hyperboles oppoſées.*

Les parties IR, LH des perpendiculaires IZ, HX ſont deux cordes du cercle égales & partant également éloignées du centre O (*N.* 265.) c'eſt pourquoi ſi du centre O, je mene la droite FV perpendiculaire ſur ces cordes, j'aurai FO = OV; ainſi les triangles rectangles OVX, OFZ étant ſemblables & égaux, j'ai FZ = VX, & retranchant d'une part FR moitié de la corde IR, & de l'autre VL moitié de la corde HL, j'ai RZ = LX. Cela poſé,

Je mene en A & B les tangentes AM, BN qui coupent en M & N la tangente TM; les triangles rectangles PHX, PAM ſont ſemblables à cauſe de l'angle aigu HPX qui leur eſt commun; donc PH. HX :: PA. AM; de même à cauſe des triangles ſemblables PRZ, PBN, nous avons PR. RZ :: PB. BN; donc en multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous avons PH × PR. HX × RZ :: PA × PB. AM × BN; mais à cauſe que les cordes AB, RH ſe coupent en P, nous avons PH × PR = PA × PB (*N.* 279.) donc HX × RZ = AM × BN; or AM × BN = $\overline{OD}^2$ (*N.* 839.) donc HX × RZ = $\overline{OD}^2$, & à cauſe que RZ = XL, nous aurons HX × LX = $\overline{OD}^2$; mais XH, XB étant ſecantes du cercle, donnent XA × XB = HX × XL (*N.* 273.) donc XA × XB = $\overline{OD}^2$; donc le point X eſt l'un des foyers, (*N.* 784.) de même à cauſe de IZ = HX & de RZ = XL, nous avons IZ × ZR = HX × LX = $\overline{OD}^2$; or les ſecantes ZI, ZA donnent ZB × ZA = IZ × ZR; donc ZB × ZA = $\overline{OD}^2$, & par conſéquent le point Z eſt l'autre foyer (*N.* 784.)

841. COROLLAIRE Ier. *Si d'un point quelconque* T *pris ſur l'une des hyperboles oppoſées* (Fig. 521.) *on mene une tangente* TM, *& des droites* TZ, TX *aux deux foyers, les angles* ZTM, XTM *faits par ces deux droites & la tangente* TM *ſont égaux.* Je mene l'ordonnée TS au premier axe & l'ordonnée PE dans le cercle; ainſi à cauſe de SO, BO :: BO. PO (*N.* 777.) la tangente SE au cercle menée du point S touchera au point E (*N.* 292.) & comme TS eſt perpendiculaire ſur AS en S, & que la droite TH qui part de l'un des points de TS paſſe par le point P, où l'ordonnée EP du cercle menée du point d'attouchement coupe le diamétre AB de ce cercle, il s'enſuit que cette droite TH eſt

coupée harmoniquement en R, P (*N.* 302.) & nous avons TR; RP :: TH. PH, ou TR. TH :: RP. PH; mais en menant par les points R, H les perpendiculaires IZ, XH ſur TH, les triangles ſemblables PRZ, PHX donnent RP. PH :: RZ. HX; donc TR. TH :: RZ. HX, d'où il ſuit que les deux triangles rectangles TRZ, THX ſont ſemblables à cauſe qu'ils ont les côtés TR, RZ autour de l'angle droit dans le premier proportionnel aux côtés TH, HX autour de l'angle droit dans le ſecond, & par conſéquent l'angle ZTR eſt égal à l'angle XTH.

842. COROLLAIRE II. *Poſant les mêmes choſes, la difference des lignes* XT, TZ *menées des deux foyers au point d'attouchement* T, *eſt égale au premier axe* BA. Je mene du centre O au point R la droite OR, laquelle par conſéquent eſt égale à la moitié du premier axe AB; or à cauſe des angles égaux XTR, ZTR (*N.* 841.) & de la droite TR perpendiculaire ſur ZI par la conſtruction, les triangles rectangles FTR, ZTR qui ont la hauteur commune TR ſont égaux, & nous avons FR = RZ, & TZ = TF; ainſi XF eſt la différence des deux lignes XT, TZ menées du point T aux foyers; or à cauſe de XZ diviſé en deux également en O, & de FZ diviſé en deux également en R, les triangles ſemblables ZFX, ZRO donnent FX double de RO; donc FX = 2RO = AB.

843. PROPOSITION CLXX. *De tous les premiers diamétres d'une hyperbole ou de deux hyperboles oppoſées* (Fig. 522.) *menés d'un même côté* BS *de l'une des hyperboles, le plus petit eſt le premier axe* AB, *& les autres ſont d'autant plus grands qu'ils s'éloignent davantage de celui-ci. Et de tous les ſeconds diamétres, le plus petit eſt le ſecond axe* CD, *& les autres ſont d'autant plus grands qu'ils ſont plus éloignés du ſecond axe.*

Je mene dans l'hyperbole B pluſieurs ordonnées TM, SN au premier axe, & de leurs extrêmités T, S, je mene des diamétres TP, SR; dans le triangle rectangle OTM, nous avons $\overline{OT}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{TM}^2$, & le triangle rectangle OSN donne $\overline{OS}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{SN}^2$; or, $\overline{ON}^2$ eſt plus grand que $\overline{OM}^2$, à cauſe que l'ordonnée SN eſt plus éloignée du centre O que l'ordonnée TM, & $\overline{SN}^2$ eſt plus grand que $\overline{TM}^2$ par la même raiſon. Donc $\overline{ON}^2 + \overline{SN}^2$ eſt plus grand que $\overline{OM}^2 + \overline{TM}^2$, & partant $\overline{OS}^2$ eſt plus

grand que $\overline{OT}^2$, & OS plus grand que OT ; ainſi 2OS ou SR eſt plus grand que 2OT ou TP, c'eſt-à-dire le diamétre SR plus éloigné du premier axe, ou qui fait avec cet axe un angle plus grand, eſt plus grand que le diamétre TP qui fait un angle moindre avec le premier axe ; & il eſt viſible que AB doit être le moindre de tous les premiers diamétres ; car le ſommet B de l'hyperbole étant plus proche du centre O, que tous les autres points de la courbe, la droite OB eſt plus courte que la droite OT, & par conſéquent AB eſt plus petit que TP.

Et la même choſe ſe démontrera à l'égard des ſeconds diamétres CD, LV, QX, en décrivant les hyperboles conjuguées.

844. PROPOSITION CLXXI. *Si du centre* O (Fig. 523.), *& avec un rayon* OH *plus grand que le demi-premier axe* OB, *on décrit un cercle* HMPRTV, *la circonference de ce cercle ne coupera l'hyperbole qu'en quatre points* M, R, T, V ; *& ſi l'on joint ces quatre points par des droites* MR, RT, TV, VM, *deux de ces droites* TR, VM *ſeront des doubles ordonnées au premier axe égales entr'elles, & les deux autres* MR, TV *ſeront des doubles ordonnées au ſecond axe égales entr'elles.*

1°. Il eſt évident que la circonférence du cercle doit couper l'hyperbole en quatre points, car l'extrémité H du rayon OH ne peut décrire le quart de circonférence HP ſans couper la demi-hyperbole BZ tout au moins en un point M, & la même choſe doit arriver à l'égard des autres demi-hyperboles AR, AT, VB. 2°. Le point H en décrivant le quart de la circonférence HP, ne peut couper la demi-hyperbole BZ qu'en un point M, car s'il le coupoit en deux points, menant de ces deux points des droites au centre O, leſquelles ſeroient égales, puiſqu'elles ſeroient rayons du même cercle, ces deux droites ſeroient auſſi des demi-diamétres de l'hyperbole, & par conſéquent les doubles de ces droites, c'eſt-à-dire les deux diamétres ſeroient égaux ; d'où il s'enſuivroit que d'un même côté BMZ de l'hyperbole, on pourroit mener deux diamétres égaux, ce qui eſt impoſſible, (*N.* 843.). 3°. Du point M, où le quart de cercle HP coupe la demi-hyperbole, je mene dans le cercle une corde paralelle au premier axe, cette corde ſera donc perpendiculaire ſur le ſecond axe, & par conſéquent elle ſera coupée en deux également en Q, à cauſe que ce ſecond axe paſſe par le centre O ; or, la double ordonnée au ſecond axe menée du point M, eſt auſſi coupée

en deux également en Q ; donc la corde du cercle & la double ordonnée ſont égales, & par conſéquent le point R où la corde coupe le cercle, eſt le même que celui où le cercle coupe la demi-hyperbole AR ; on prouvera de même que la corde menée du point R paralellement au ſecond axe, eſt égale à la double ordonnée TR menée du point R au premier axe, que la corde menée du point T paralellement au premier axe, eſt égale à la double ordonnée TV au petit axe menée du même point ; & enfin, que la corde menée du point V paralellement au ſecond axe, eſt égale à la double ordonnée au premier axe menée du même point V ; donc à cauſe des paralelles TV, RM, & TR, VM, les deux doubles ordonnées TR, VM au premier axe ſont égales, & les deux doubles ordonnées RM, TV au ſecond axe, le ſont auſſi.

845. PROPOSITION CLXXII. *Si l'on prend ſur le demi-ſecond axe* OD *prolongé, s'il le faut* (Fig. 524.), *la partie* OP *égale au demi-premier axe* OB ; *& qu'on porte enſuite la diſtance* PB *ſur le demi-premier axe prolongé de* O *en* V, *l'ordonnée* TV *menée du point* V *au premier axe ſera égale à la moitié* CO, *ou* OD *du ſecond axe.*

Dans le triangle rectangle iſoſcele POB, nous avons $\overline{PB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 = 2\overline{OB}^2$, & par conſéquent $\overline{OV}^2 = 2\overline{OB}^2$; or, par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{TV}^2$. VB×VA ou $\overline{VO}^2 - \overline{OB}^2$ :: $\overline{CO}^2$. $\overline{OB}^2$, & $\overline{VO}^2 - \overline{OB}^2 = 2\overline{OB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OB}^2$; donc $\overline{TV}^2$. $\overline{OB}^2$ :: $\overline{CO}^2$. $\overline{OB}^2$, & par conſéquent $\overline{TV}^2 = \overline{CO}^2$, & TV=CO.

846. PROBLEME. *Une hyperbole* XBZ (Fig. 525.) *étant donnée, trouver ſes deux axes, ſes foyers, ſes aſymptotes, &c.*

Je mene pluſieurs lignes paralelles MB, NR, &c. terminées de part & d'autre à la courbe, je les diviſe chacune en deux également, & par les points de diviſion, je fais paſſer une ligne droite TL, laquelle eſt un diamétre. Je cherche de la même façon un autre diamétre HV, & le point O où les deux diamétres ſe coupent, eſt le centre de l'hyperbole.

Du centre O, & avec une ouverture de compas aſſez grande pour pouvoir couper l'hyperbole, je décris un arc de cercle, & des points E, I où cet arc coupe la courbe, je mene la droite EI, laquelle eſt une double ordonnée au premier axe (*N.* 844.) ; coupant donc cette droite EI en deux également en G, je mene

du centre O la droite OG qui coupe l'hyperbole en B, & par conſéquent la droite OB eſt la moitié du premier axe.

J'éleve en O la droite OS égale & perpendiculaire à OB, & prenant la diſtance SB & la portant de O en G, l'ordonnée GI menée du point G eſt égale à la moitié OD du ſecond axe (*N.* 845.).

Ayant donc porté GI de O en D, & de O en C perpendiculairement ſur CD pour avoir la poſition du ſecond axe CD; je mene les droites CB, DB, & les diviſant chacune en deux également aux points *m*, *n*, je mene par le centre O, & par les points de diviſion *m*, *n*, les droites indéfinies O*m*L, O*nl* qui ſont les aſymptotes demandées (*N.* 802.).

Enfin, prenant CB, ou DB, & le portant ſur l'axe prolongé de part & d'autre de O en X, & de O en *x* les points X, *x* ſont les deux foyers (*N.* 783.).

847. PROBLEME. *Une hyperbole ou deux hyperboles oppoſées étant données* (Fig. 526.), *trouver un premier diamétre qui faſſe avec ſes ordonnées un angle égal à un angle donné* abc.

Je mene les aſymptotes OT, OV, je décris un cercle MNL avec un rayon quelconque, & d'un point quelconque M, menant une tangente MZ à ce cercle; je fais en M avec la tangente MZ un angle ZML égal à l'angle TOV des aſymptotes. Ainſi l'angle ZML eſt l'angle du ſegment MIL, je coupe la corde ML en deux également en X, & je fais dans l'autre ſegment un angle MXN égal à l'angle donné *abc*. Je mene les cordes MN, NL, & je porte la premiere MN ſur l'aſymptote OT de O en E, & l'autre NL ſur l'aſymptote OV de O en F; je mene la droite EF, & la coupant en deux également en R, je mene du centre O la droite OR, & ſa partie OS compriſe entre le centre O de l'hyperbole, & la courbe ſera la moitié du diamétre demandé. Ce que je prouve ainſi.

L'angle du ſegment ZML vaut la moitié de l'arc MIL, or, l'angle MNL à la circonférence vaut auſſi la moitié de l'arc MIL, donc MNL=ZML; mais ZML=EOF, donc MNL =EOF, & par conſéquent les deux triangles MNL, EOF ſont égaux, à cauſe qu'ils ont les côtés MN, NL égaux chacun à chacun aux côtés EO, OF, & l'angle compris MNL égal à l'angle compris EOF. Donc l'angle NML eſt égal à l'angle OEF, & le côté ML égal au côté EF, d'où il ſuit que $\frac{1}{2}$ML, ou MX eſt égal à $\frac{1}{2}$EF ou ER, & que par conſéquent les trian-

gles MXN, ERO ſont égaux & ſemblables à cauſe des côtés MN, MX égaux chacun à chacun aux côtés EO, ER, & de l'angle compris NMX égal à l'angle compris OER; donc l'an-l'angle NXM eſt égal à l'angle ORE; or, à cauſe de EF diviſé en deux également en R, & de EP = HE (*N.* 815.), nous avons PR=RH; donc la ligne OR menée du centre O eſt un diamétre, puiſqu'elle coupe PH en deux également, & ce diamétre fait avec ſa double ordonnée un angle ORP égal à l'angle MNX, lequel a été fait égal à l'angle demandé *abc*.

848. PROBLEME. *Un diamétre ou un demi-diamétre* OR *étant donné* (Fig. 527.), *trouver ſon diamétre conjugué.*

Je mene les aſymptotes OX, OY, & la tangente PH au ſommet R du diamétre donné, cette tangente eſt égale au diamétre conjugué qu'on demande (*N.* 829.), menant donc par le centre O une paralelle à cette tangente, & faiſant OT=RH, & OL =PR, on aura la poſition de ce diamétre.

849. PROPOSITION CLXXIII. *Si du point* T *pris ſur l'une des hyperboles oppoſées* (Fig. 528.), *on mene une droite* TP *à l'autre hyperbole, les parties* TS, RP *de cette droite compriſes entre les courbes & les aſymptotes ſont égales.*

Par les points T, P, je mene entre les aſymptotes les droites MN, HL paralelles au ſecond axe CD. Les triangles ſemblables MTR, LPR donnent MT. TR :: LP. PR, & à cauſe des triangles ſemblables TNS, PHS, nous avons TN. TS :: PH. PS; donc en multipliant les termes de ces deux proportions les uns par les autres, nous aurons MT × TN. TR×TS :: LP × PH. PR×PS, mais MT×TN=LP×PH, à cauſe que ces deux rectangles ſont égaux au quarré de la moitié CD du ſecond axe (*N.* 805.); donc TR×TS=PR×PS, & partant TR. PR :: PS. TS; donc en compoſant TR+PR. PR :: PS+TS. TS, ou TP. PR :: TP. TS, & par conſéquent PR=TS.

850. COROLLAIRE Ier. *Si entre deux hyperboles oppoſées* (Fig. 529.) *on mene pluſieurs lignes* TP, HL, &c. *paralelles entr'elles & au premier axe, ou à un premier diamétre* EF, *les rectangles* TS×SP, HZ×ZL, *des parties* TS, HZ *de ces droites compriſes entre l'une des courbes, & la plus prochaine aſymptote multipliées par les reſtes* SP, ZL *de ces lignes ſont égaux entr'eux, & au quarré de la moitié* OE *du diamétre, auquel ces lignes ſont paralelles.*

Par les extrêmités T, P, H, L des lignes TP, HL, je mene entre les aſymptotes des droites MN, *mn*, XV, *xu* paralelles au ſecond

ſecond axe. Les triangles ſemblables NTS, VHZ donnent TN. TS :: HV. HZ, & à cauſe des triangles ſemblables MTR, XH*r*, nous avons MT. TR :: XH. H*r*; donc en multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous aurons TN×MT. TS×TR :: HV×XH. HZ×H*r*; or, TN×MT=HV×XH (*N.* 817.); donc TS×TR=HZ×H*r*, mais à cauſe de PR=ST, & de L*r*=HZ (*N.* 849.), nous avons TR=PS, & LZ=H*r*; donc TS×TR =TS×PS, & HZ×H*r*=HZ×LZ, & partant les rectangles TS×PS, HZ×LZ ſont égaux entr'eux, & comme à meſure que les lignes TP, HL ſont plus proches du diamétre EF, leurs parties Z*r*, RS, &c. compriſes entre les aſymptotes diminuent de plus en plus; il eſt évident que lorſque cette partie diſparoîtra, on aura EO×OF=TS×PS=HZ×LZ.

848. COROLLAIRE II. *Les droites* TP, HL *menées paralellement à un premier diamétre* EF *ſont coupées chacune en deux également par le diamétre conjugué de ce diamétre.*

Le diamétre conjugué de EF, c'eſt-à-dire la droite *pq* eſt un premier diamétre de l'hyperbole conjuguée G*g*, & les ordonnées G*g*, &c. de ce diamétre ſont paralelles au diamétre EF, & par conſéquent aux droites TP, &c. prolongeant donc G*g* juſqu'aux aſymptotes la droite *ab* ſera encore diviſée en deux également de même que G*g* l'eſt par ſon diamétre *pq*, & cela à cauſe de *a*G=*bg*. Or les triangles O*ba*, ORS ſont ſemblables, & le diamétre *pq* qui paſſe par leur ſommet O diviſe en deux également la baſe *ba* du triangle O*ba*, donc le même diamétre coupe auſſi en deux également en *t* la baſe RS du triangle ORS. Ainſi ajoutant à R*t* la partie RP, & à la droite RS, la partie ST égale à RP, nous aurons T*t*=*t*P, & partant la droite TP eſt diviſée en deux également en *t* par le diamétre *pq* conjugué du diamétre EF, & ainſi des autres.

849. PROBLEME. *Les aſymptotes* YI, LV (Fig. 530.) *étant données, & un point* R *de l'une des hyperboles oppoſées, décrire l'hyperbole.*

Je diviſe l'angle YOL des aſymptotes en deux également par la droite OS, & cette droite eſt dans la poſition du premier axe. Je mene par le point donné R une droite RX paralelle à OS juſqu'à ce qu'elle rencontre l'aſymptote LV en X, & alors je la prolonge juſqu'à ce que XT ſoit égal à NR; ainſi j'ai RX×XT égal au quarré de la moitié du premier axe (*N.* 850.); car il eſt viſible que le point T doit être un point de l'hyperbole oppoſée

à celle qu'on me demande, c'eſt pourquoi prenant une moyenne proportionnelle entre RX & XT, & la portant ſur OS de O en B, & de O en A; j'ai le premier axe AB. Par le point donné R, je mene entre les aſymptotes la droite HM perpendiculaire au premier axe, & j'ai HR×RM égal au quarré de la moitié du ſecond axe (*N.* 805.), car ce ſecond axe doit être paralelle à HM. Prenant donc une moyenne proportionnelle entre HR, & RM, & l'élevant perpendiculairement de part & d'autre du grand axe au centre O; j'ai le ſecond axe CD, & les deux axes étant trouvés, je décris l'hyperbole, comme il a été enſeigné ci-deſſus.

Après avoir trouvé le premier axe AB on pourroit encore plus aiſément trouver le ſecond CD, en menant par le ſommet B la tangente PQ, laquelle eſt égale au ſecond axe (*N.* 801.); c'eſt pourquoi ſi par le milieu O du premier axe AB, on mene une droite CD perpendiculaire ſur AB, & qu'on prenne ſur cette perpendiculaire la partie OC égale à PB, & la partie OD égale à BQ, on aura le ſecond axe CD dans ſa poſition.

Fin du premier Tome.

609453

TABLE DES CHAPITRES ET DES TITRES CONTENUS DANS CE PREMIER VOLUME.

LIVRE PREMIER,

Contenant les Elemens de l'Arithmétique & de l'Algébre.

CHAP. I. *DEFINITIONS & Principes.* Page 1
Axiôme. 6
CHAP. II. *Contenant l'explication des quatre premieres Régles d'Arithmétique. Addition ſimple.* ibid.
Addition compoſée. 7
Souſtraction ſimple. 9
Souſtraction compoſée. 10
Multiplication ſimple. 12
Diviſion ſimple. 14
CHAP. III. *Des Fractions.* 20
Réduire deux ou pluſieurs fractions à un même dénominateur. 22
Reduire un entier en fraction dont le dénominateur ſoit donné. 24
Reduire en entier une fraction improprement dite, ou dont le numerateur eſt plus grand que le dénominateur. ibid.
Reduire une fraction aux plus petits nombres qui puiſſent l'exprimer. 25
Evaluer une fraction. 26
Ajouter enſemble deux ou pluſieurs fractions. 27
Souſtraire une fraction d'une autre. 28

Multiplier une fraction par un autre. 29
Diviſer une fraction par une autre. ibid.
Des fractions de fractions. 30
CHAP. IV. *De la Multiplication & de la Diviſion compoſée.* ibid.
De la Diviſion compoſée. 36
CHAP. V. *De l'Algebre.* 41
Des ſignes de l'Algebre. 42
Des grandeurs complexes & incomplexes, poſitives & négatives. 43
De l'Adition des grandeurs litérales. 45
De la Souſtraction des grandeurs littérales. 46
De la Multiplication des grandeurs littérales. 48
De la Diviſion des grandeurs littérales. 50
Des Puiſſances des grandeurs incomplexes. 55
Des Puiſſances des grandeurs complexes. 56
Table des Puiſſances d'un Binome. 57
De l'Extraction des Racines des grandeurs littérales. 60
De l'Extraction de la racine quarrée des grandeurs numériques. 65
De l'Extraction de la racine quarrée des grandeurs numériques par approximation. 76
De l'Extraction de la racine cubique des quantités numériques. 78
De l'Extraction de la racine cubique des grandeurs numériques par approximation. 82
Du calcul des grandeurs radicales. 85
Changer une grandeur non radicale en une autre qui ſoit radicale & dont l'expoſant ſoit donné. 87
Tirer une grandeur hors du ſigne radical. ibid.
Reduire à un même ſigne deux ou pluſieurs grandeurs radicales qui ont différens ſignes. 89
Ajouter les grandeurs radicales. 90
Souſtraire les grandeurs radicales. 91
Multiplier les grandeurs radicales. ibid.
Diviſer les grandeurs radicales. 92
Du calcul des expoſans. 93
Du calcul des expoſans des puiſſances des multinomes. 97
CHAP. VI. *De l'Analyſe.* 99
Principes ou axiômes. ibid.
De la nature des Problêmes, & de la façon de les reſoudre par l'Analyſe. 100
Maniere de dégager une inconnue qui ſe trouve ſeule dans une équation. 103

Exemples des Problêmes déterminés. 106
Des Equations compoſées qui ne contiennent qu'une inconnue. 113
De la formation des Equation compoſées. 115
De la reſolution des Equations du ſecond degré. 118
De la réſolution des Equations du troiſiéme, quatriéme, cinquiéme degré, &c. 123
CHAP. VII. *Des raiſons, proportions & progreſſions Arithmétiques.* 134
De la maniere de compter les Piles de Boulets. 145
CHAP. VIII. *Des Raiſons, Proportions & Progreſſions Géométriques.* 154
De la proportion inverſe. 162
De la Regle de Trois directe. ibid.
De la Regle de Trois indirecte. 163
De la Regle de Compagnie ou de Societé. ibid.
De la Regle d'Alliage. 164
Des progreſſions Géométriques. 168
CHAP. IX. *Des Raiſons compoſées.* 174
Des Regles que les Arithméticiens nomment Regles de cinq, de ſept, de neuf, &c. 180
CHAP. X. *Des Incommenſurables.* 182
CHAP. XI. *Des Logarithmes.* 186

LIVRE SECOND,

Qui contient les Elémens de la Géométrie, Théorique & Pratique des lignes, des Surfaces & des Solides, de la Trigonométrie, des Sections Coniques, du Toiſé de la Maçonnerie & des bois, & du Calcul des Fractions décimales.

CHAP. I. *Définitions & principes.* 194
CHAP. II. *Des lignes droites, des angles qu'elles forment, des lignes perpendiculaires & des lignes paralleles.* 202
CHAP. III. *Des Triangles & des Figures de pluſieurs côtés, conſiderés par rapport à leurs côtés & à leurs angles.* 231
Des Figures compriſes ſous plus de trois côtés. 241
CHAP. IV. *De la puiſſance Lignes.* 249
CHAP. V. *Des raiſons, proportions & progreſſions Géométriques des Lignes.* 259
CHAP. VI. *Des proprietés du Cercle.* 296
Proprietés du Cercle, utiles pour l'intelligence des Sections Coniques. 330

CHAP. VII. *De l'inſcription des Polygones réguliers dans un cercle, & de leur circonſcription autour du cercle.* 341
CHAP. VII. *De la Trigonométrie, de la Longimétrie & du Nivellement.* 346
De la réſolution des triangles rectangles. 350
De la réſolution des triangles obliquangles, ou qui ne ſont pas rectangles. 352
De la Longimétrie. 354
Du Nivellement. 360
Table des hauſſemens du niveau apparent. 364
CHAP. IX. *De la Planimétrie ou Meſure des ſurfaces planes, & de leur rapport entr'elles.* 366
Du changement des Figures & de leur réduction de grand en petit & de petit en grand. 380
De la Géodeſie ou diviſion des Figures ſur le terrein. 390
Des Figures Iſopérimétres. 396
CHAP. X. *De la Stéréométrie, ou de la Meſure des Solides, de leurs ſurfaces & de leurs rapports. Des différentes poſitions des lignes à l'égard des plans, & de celles des plans entr'eux.* 406
De la meſure des ſolides, & de leurs rapports. 414
Du changement des ſolides. 443
Des ſurfaces des ſolides. 447
De quelques uſages du Compas de proportion néceſſaire pour l'intelligence de ce qui a été dit dans le cours de ce Livre. 458
CHAP. XI. *Du Toiſé de la Maçonnerie, & du Toiſés des bois.* 460
Du toiſé des Bois de Charpente, de Menuiſerie, de Charonnage, &c. 468
Des Fractions décimales. 472
CHAP. XII. *Des Sections Coniques. Définitions & principes.* 474
De la parabole conſiderée dans un plan hors du cône. 478
De l'Ellipſe conſiderée ſur un plan hors du cône. 506
De l'hyperbole conſiderée dans un plan hors du cône. 550

Fin de la Table.

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monſeigneur le Chancelier, *Elémens des principales Parties des Mathématiques*, & le *Traité de Perſpective*, par M. l'Abbé Deidier, & je n'ai rien trouvé qui puiſſe en empêcher l'impreſſion. Fait à Paris le 19 Juillet 1744.

MONTCARVILLE.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre; A nos amés & feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de Notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra; SALUT. Notre bien-amé Charles-Ant. JOMBERT, Libraire à Paris, & ordinaire pour notre Artillerie & pour le Génie, nous a fait expoſer qu'il deſireroit faire imprimer & donner au Public pluſieurs Ouvrages, qui ont pour Titres *Elémens de la Guerre, des Siéges, &c. contenans l'Artillerie, l'Attaque & la Défenſe des Places*, par M. LE BLOND; *Principes du Syſtéme des Petits Tourbillons de Deſcartes*, par *l'Abbe* DELAUNAY; *Geographie Phyſique ou Introduction à la Connoiſſance de l'Univers*, par STRUYCK, *traduit en François*; *les Elémens de la Phyſique-Mathematique*, par s'GRAVESANDE, *traduit en François*; *Dictionnaire de Mathématique de* WOLFIUS, *traduit en François*; *Cours de Mathematique de* WOLFIUS, *traduit en François*; *Maniere de graver en Taille-douce & à l'Eau Forte*, par *Abraham* BOSSE; *les Régles du Deſſein & du Lavis*; *Traité de Phyſique expérimentale*, *traduit de l'Anglois de* DESAGULIERS; *Elémens Généraux des Parties des Mathematiques neceſſaires à l'Artillerie & au Génie*, par *M. l'Abbé* DEIDIER; s'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce néceſſaire. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces préſentes de faire imprimer leſdits Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés en un ou pluſieurs volume, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de *quinze* années conſécutives, à compter du jour de la datte deſdites Préſentes; Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangére dans aucun lieu de notre obéïſſance; comme auſſi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre ni contrefaire leſdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentation, correction, changemens ou autres, ſans la permiſſion ex-

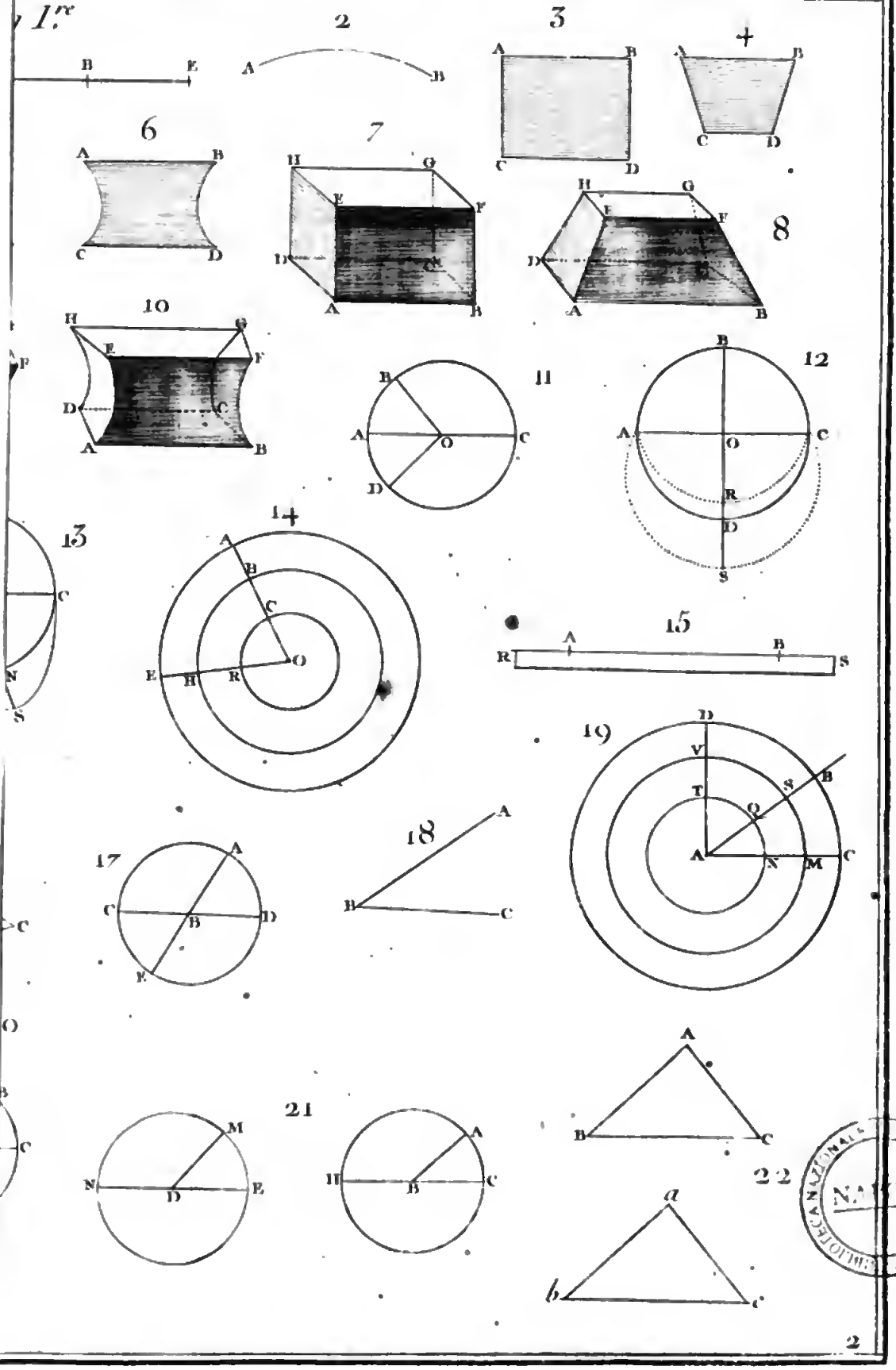
preſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des exemplaires contrefaits, & de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & intérêts : A la charge que ces préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caractéres, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modéle ſous le contreſcel deſdites préſentes; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notament à celui du dix Avril 1725; & qu'avant de les expoſer en vente, le manuſcrit ou imprimé qui aura ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Livres ſera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Dagueſſeau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur Dagueſſeau, Chancellier de France, le tout à peine de nullité des préſentes : Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie deſdites préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenu pour duëment ſignifiée, & qu'aux copies collationnés par l'un de nos amés & feaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion & nonobſtant clameur de Haro, Charte Nomande & Lettres à ce contraires : Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Verſailles le vingt-ſixiéme jour du mois d'Avril, l'an de grace mil ſept cens quarante-trois, & de notre Regne le vingt-huitiéme. Par le Roi en ſon Conſeil,

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre XI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris N°. 185. fol. 155. conformement aux anciens Reglemens, confirmés par celui du 28 Fevrier 1723. A Paris le 23 Mai 1743.

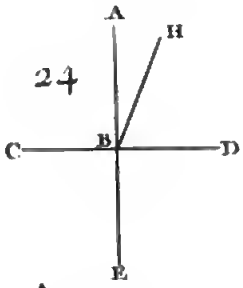
SAUGRAIN, *Syndic.*

De l'Imprimerie de J. CHARDON.

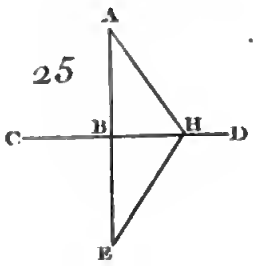


BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE DI FIRENZE

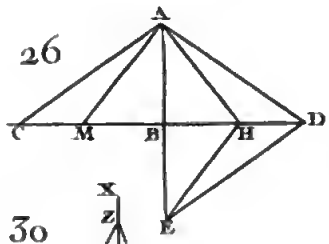
24



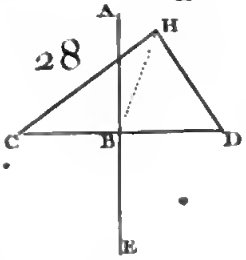
25



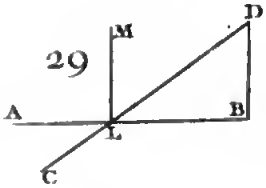
26



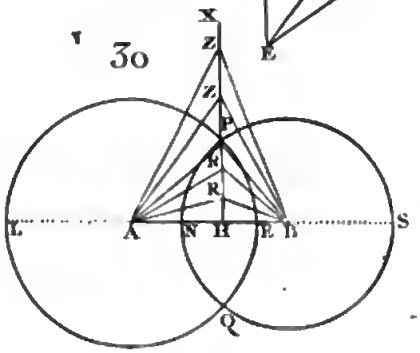
28

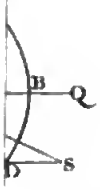


29

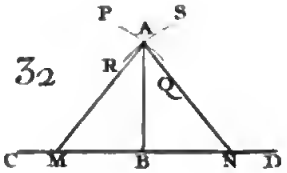


30

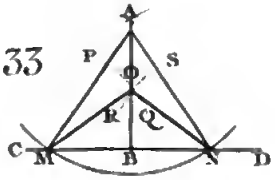




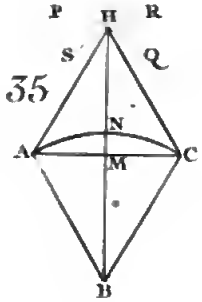
32



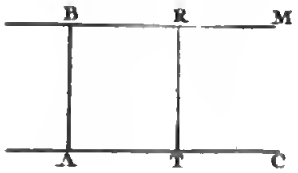
33



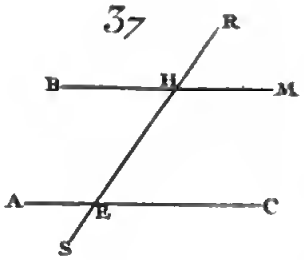
35



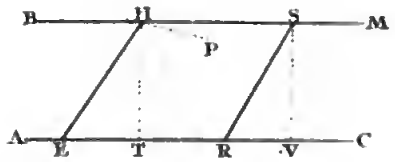
36



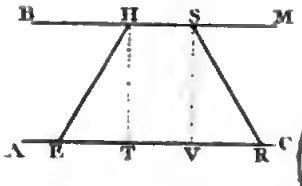
37

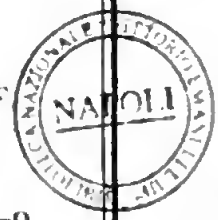


39

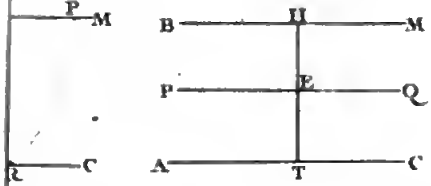


40

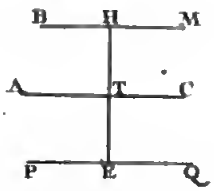




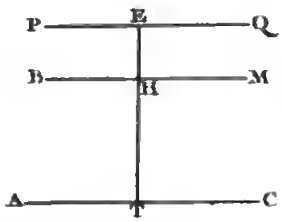
42

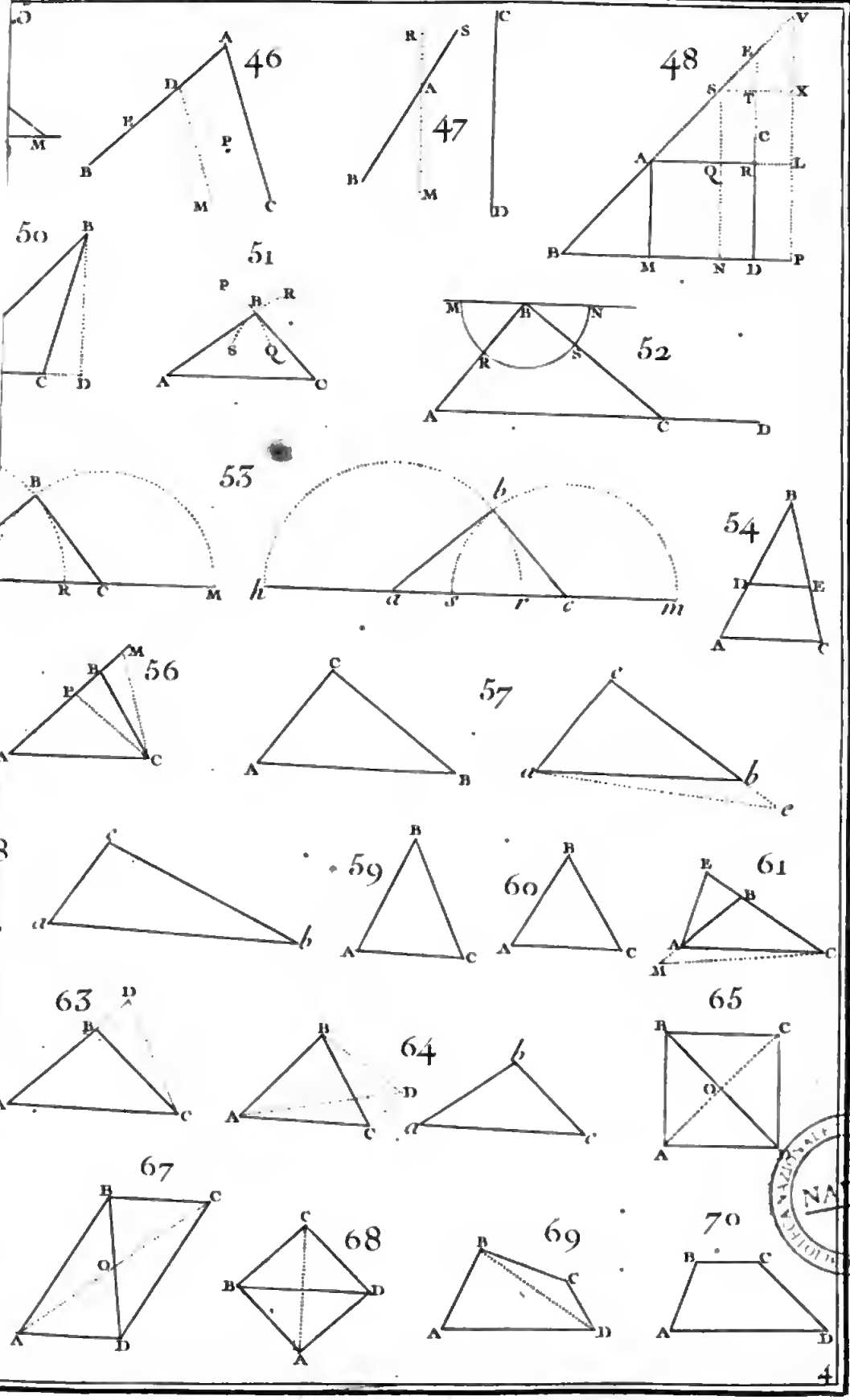


43

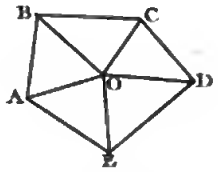


44

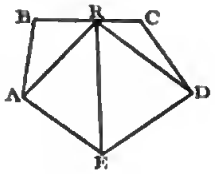



46
47
48
50
51
52
53
54
56
57
59
60
61
63
64
65
67
68
69
70

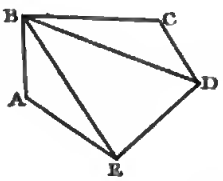
72



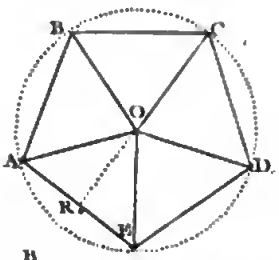
73



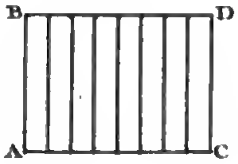
74



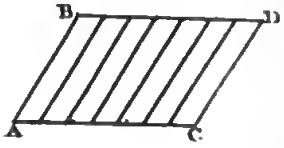
76



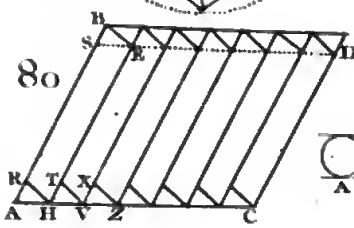
77



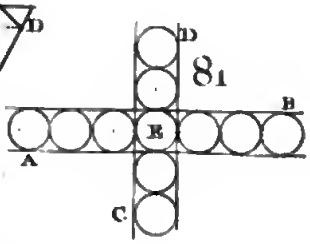
78



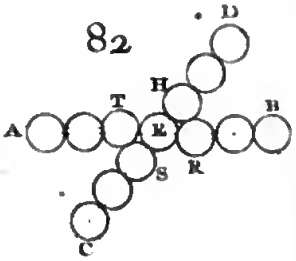
80



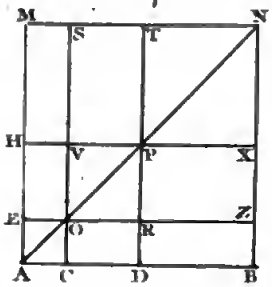
81



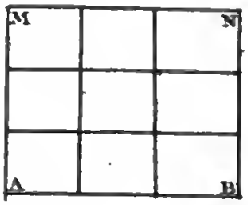
82



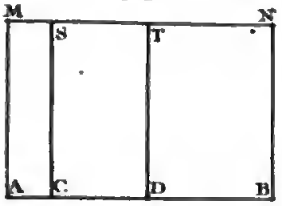
84

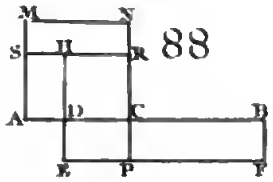


85



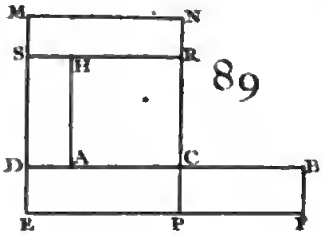
86



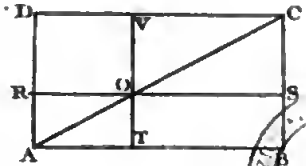


88

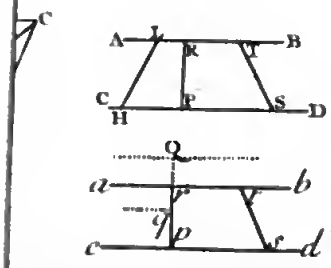
89



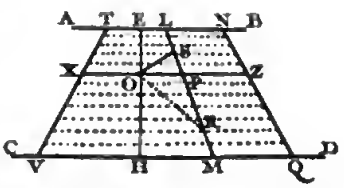
90



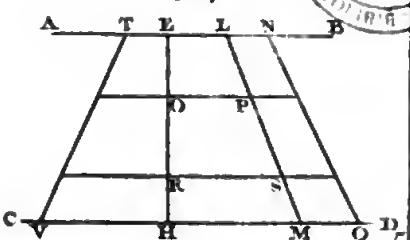
92



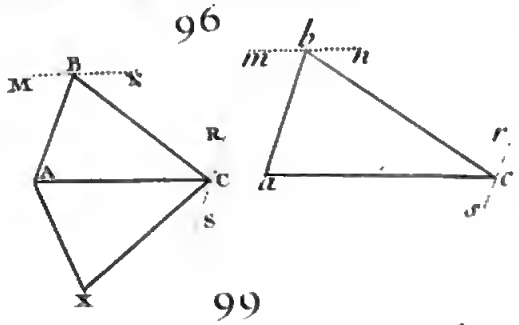
93



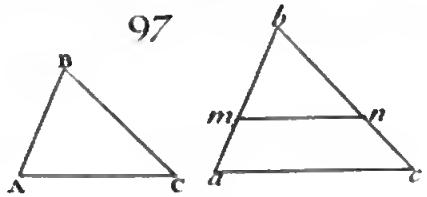
94



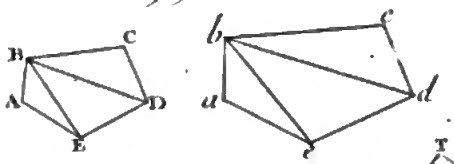
96



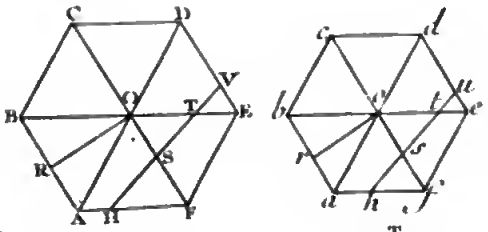
97



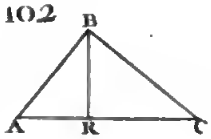
99



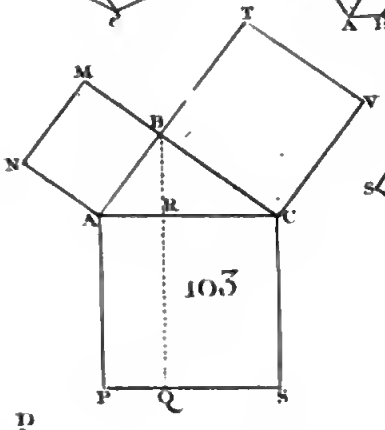
100



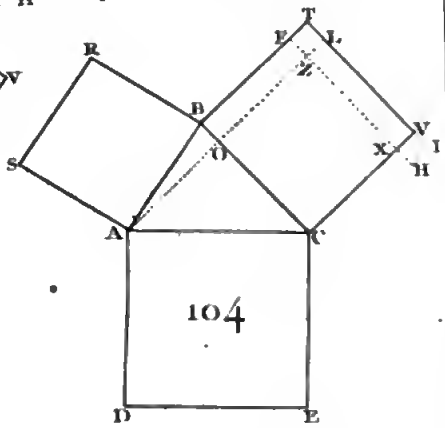
102

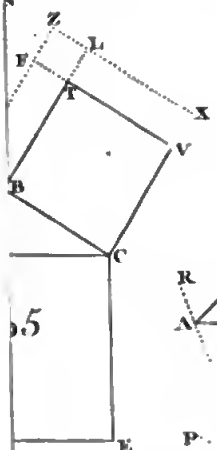


103

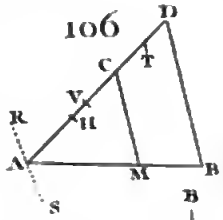


104

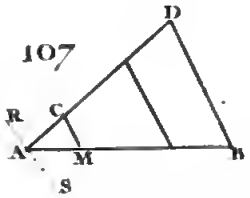




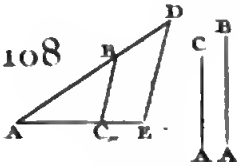
106



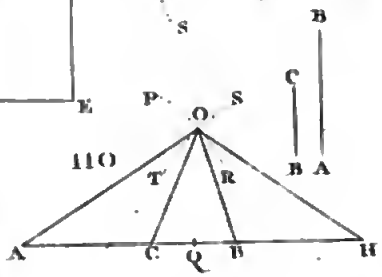
107

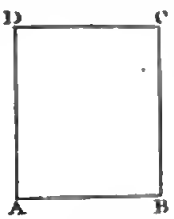


108

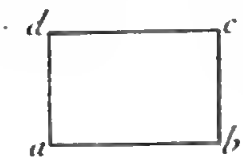


110

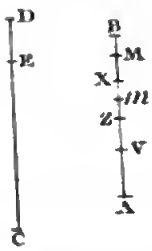




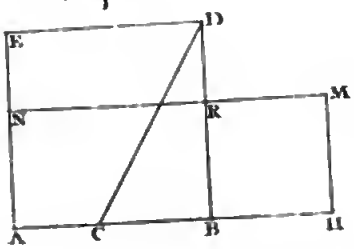
111



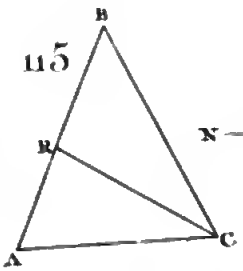
113



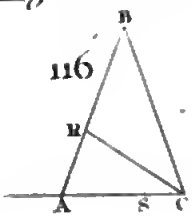
114

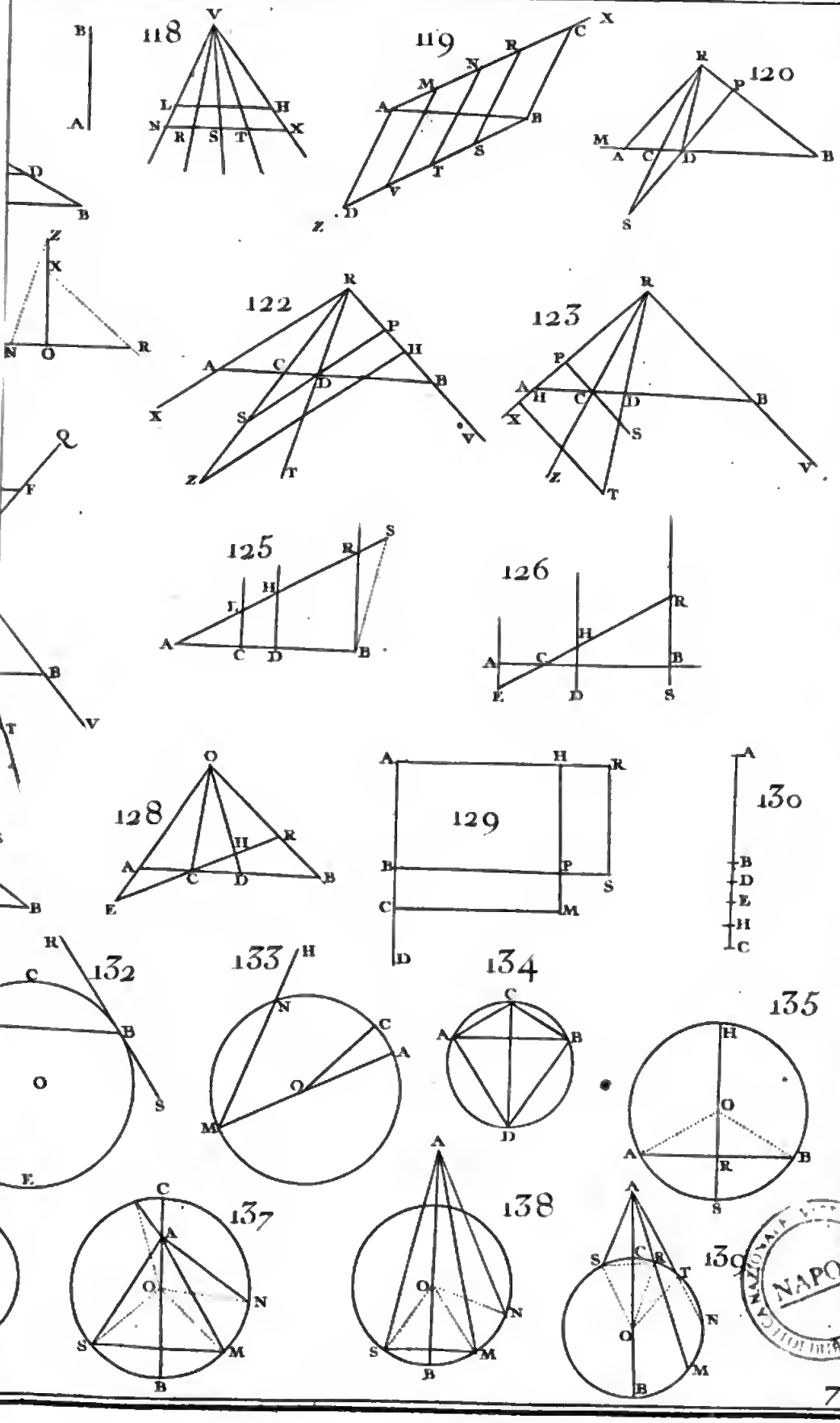


115

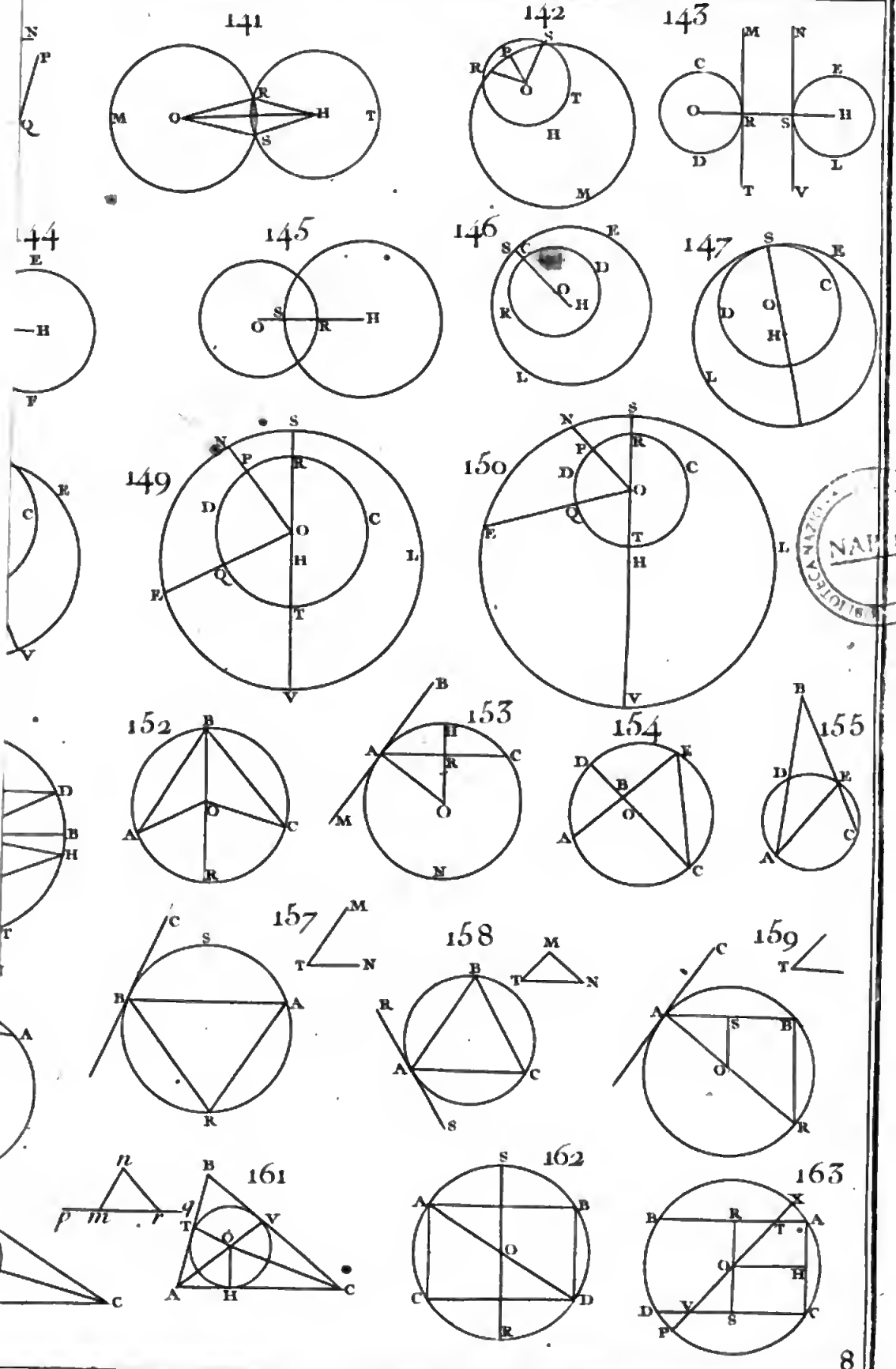


116

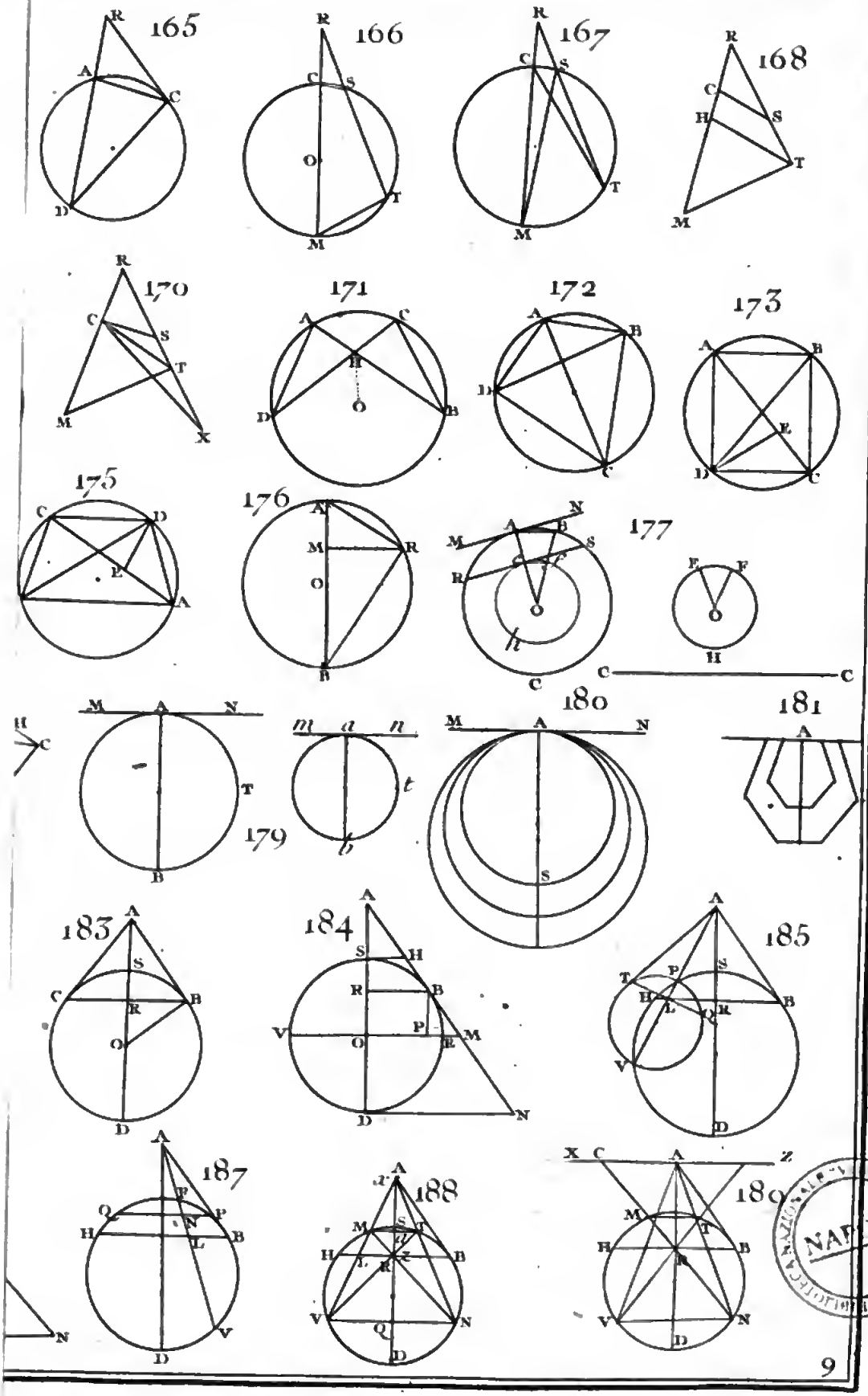



118
119
120
122
123
125
126
128
129
130
132
133
134
135
137
138
139

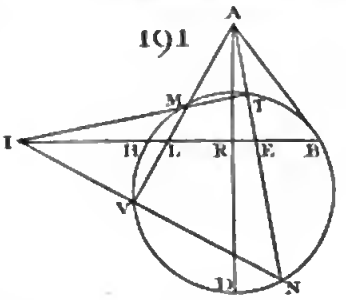
NAPOLI

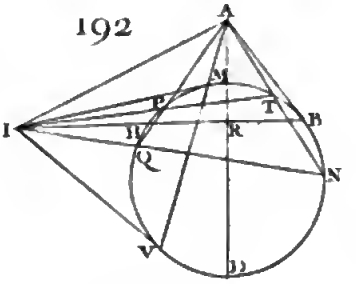


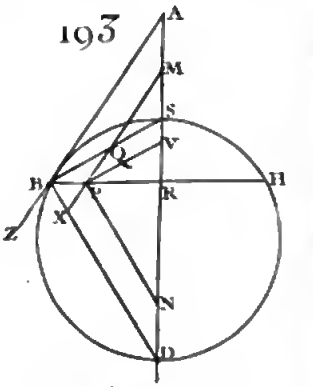
BIBLIOTECA NAZIONALE

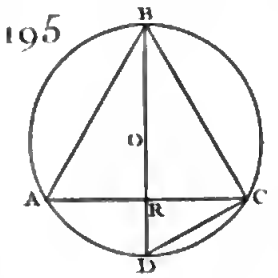

165
166
167
168
170
171
172
173
175
176
177
179
180
181
183
184
185
187
188
189

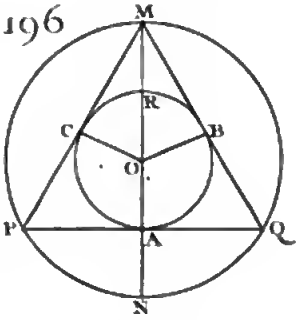
NAPOLI

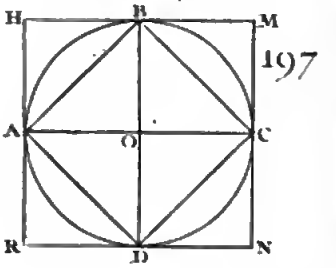

191
A
M
T
I
H
L
R
E
B
V
D
N


192
A
M
P
T
B
I
H
R
Q
N
V
D

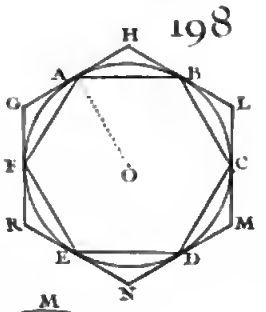

193
A
M
S
V
Q
B
P
R
H
Z
X
N
D

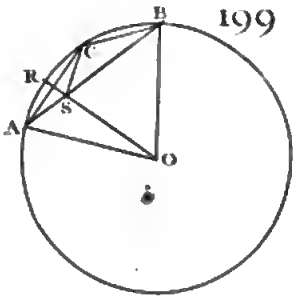

195
B
O
A
R
C
D

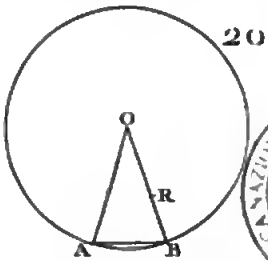

196
M
R
C
B
O
P
A
Q
N

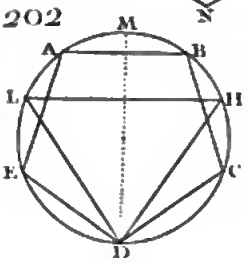

197
H
B
M
A
O
C
R
D
N

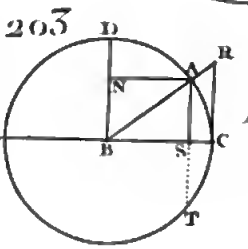
H

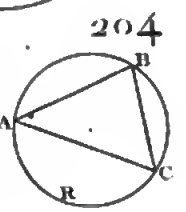

198
H
A
B
G
L
F
O
C
R
M
E
D
N

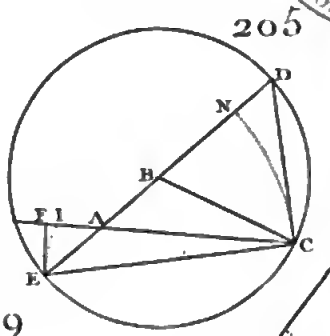

199
B
C
R
S
A
O

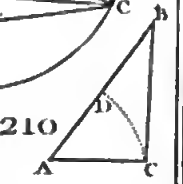

200
O
R
A
B

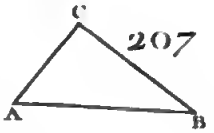

202
M
A
B
L
H
E
C
D

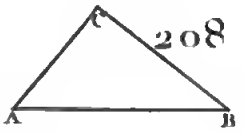

203
D
R
N
A
F
B
S
C
T

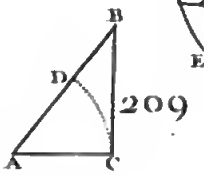

204
B
A
C
R

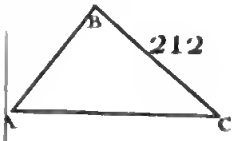

205
D
N
B
F I
A
C
E

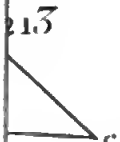

B
D
A
C

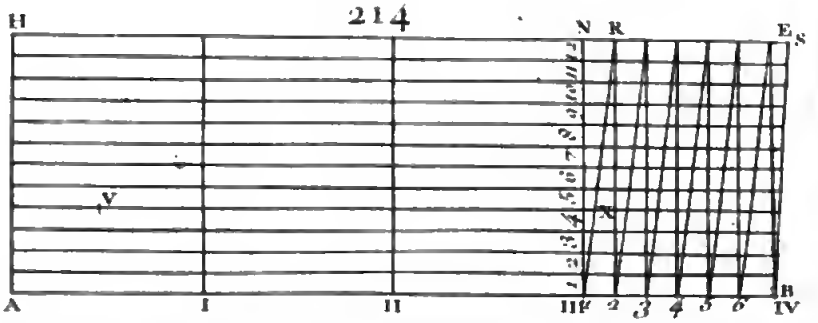

C
207
A
A
B

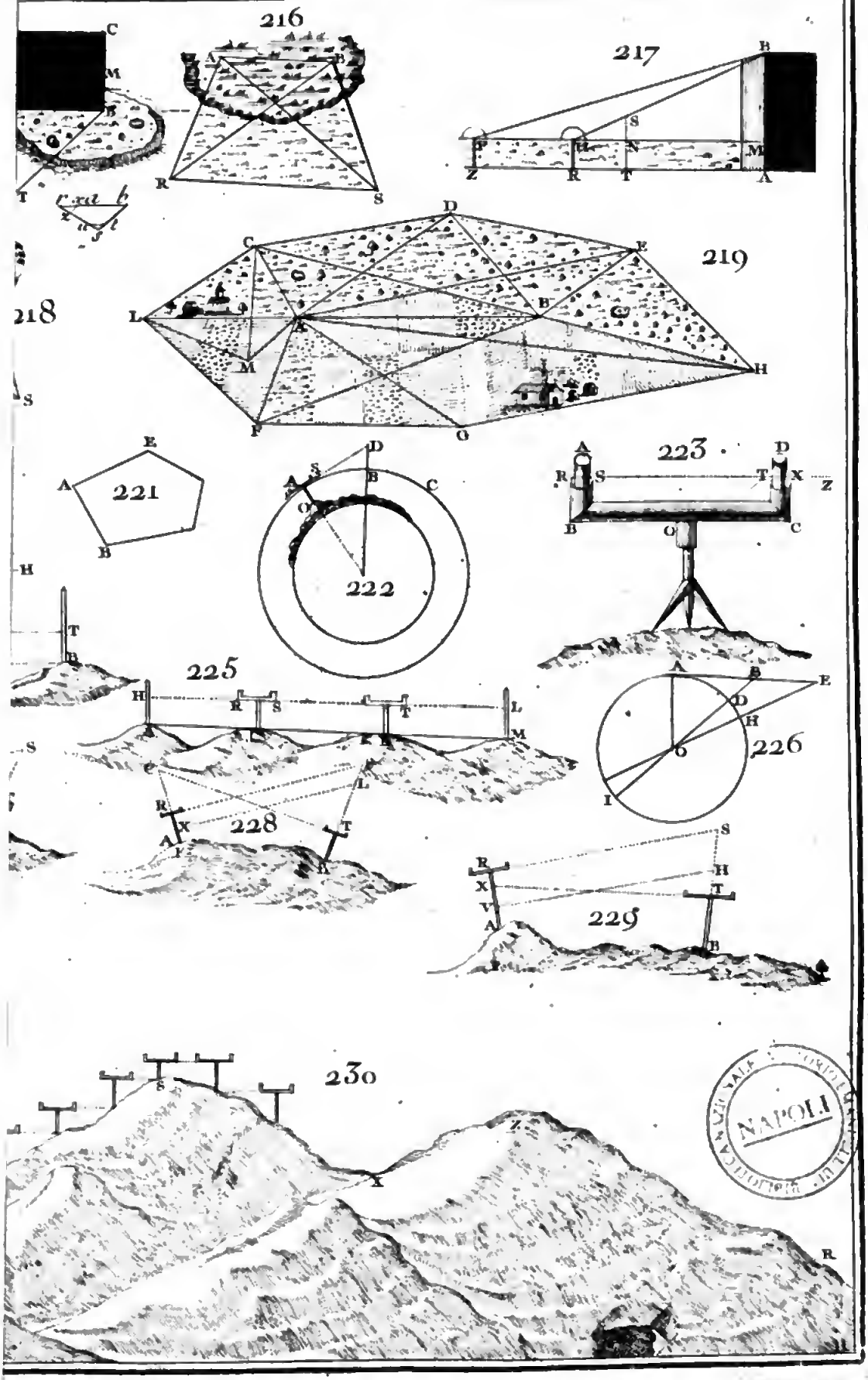

C
208
A
B

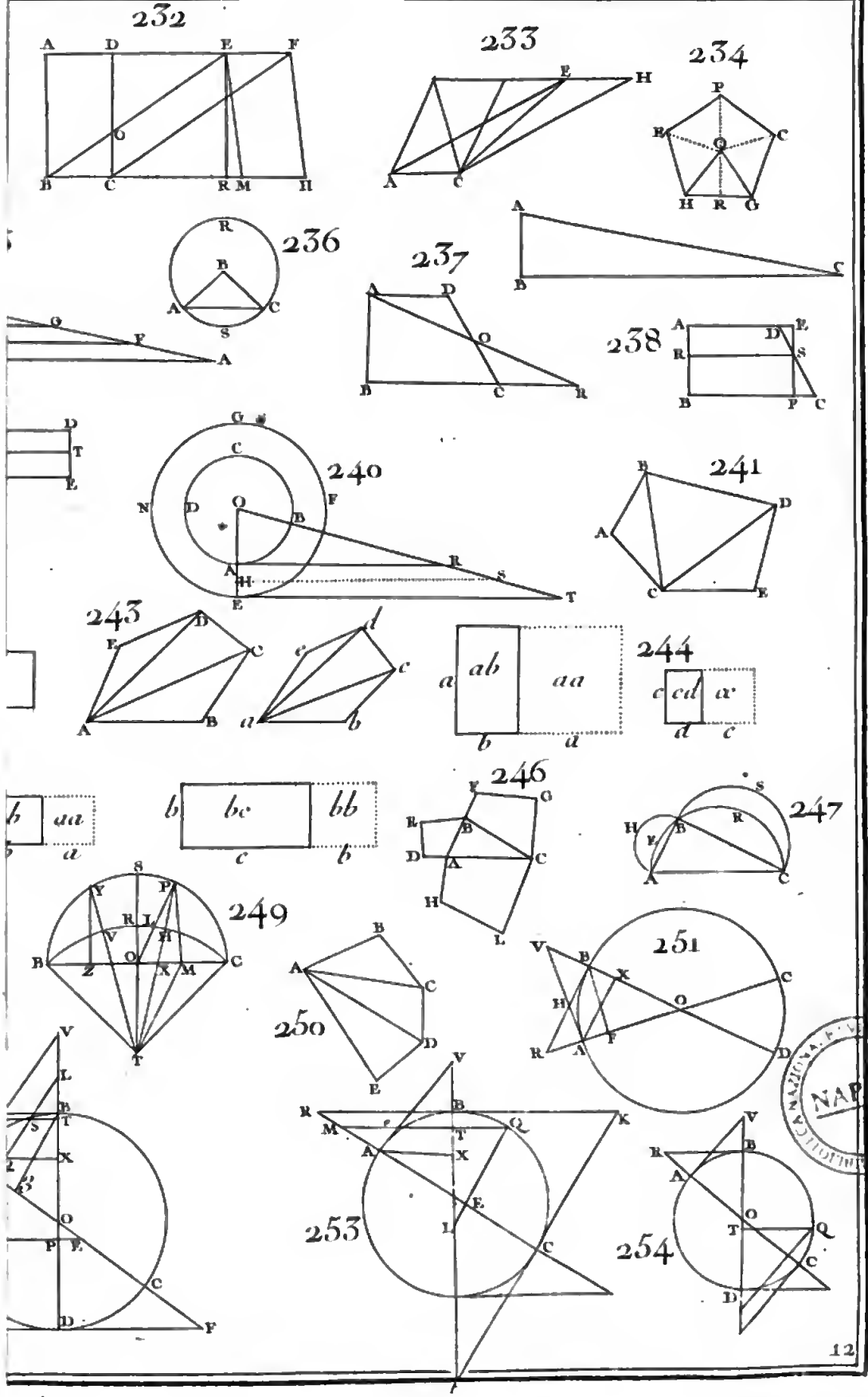

B
D
209
A
C

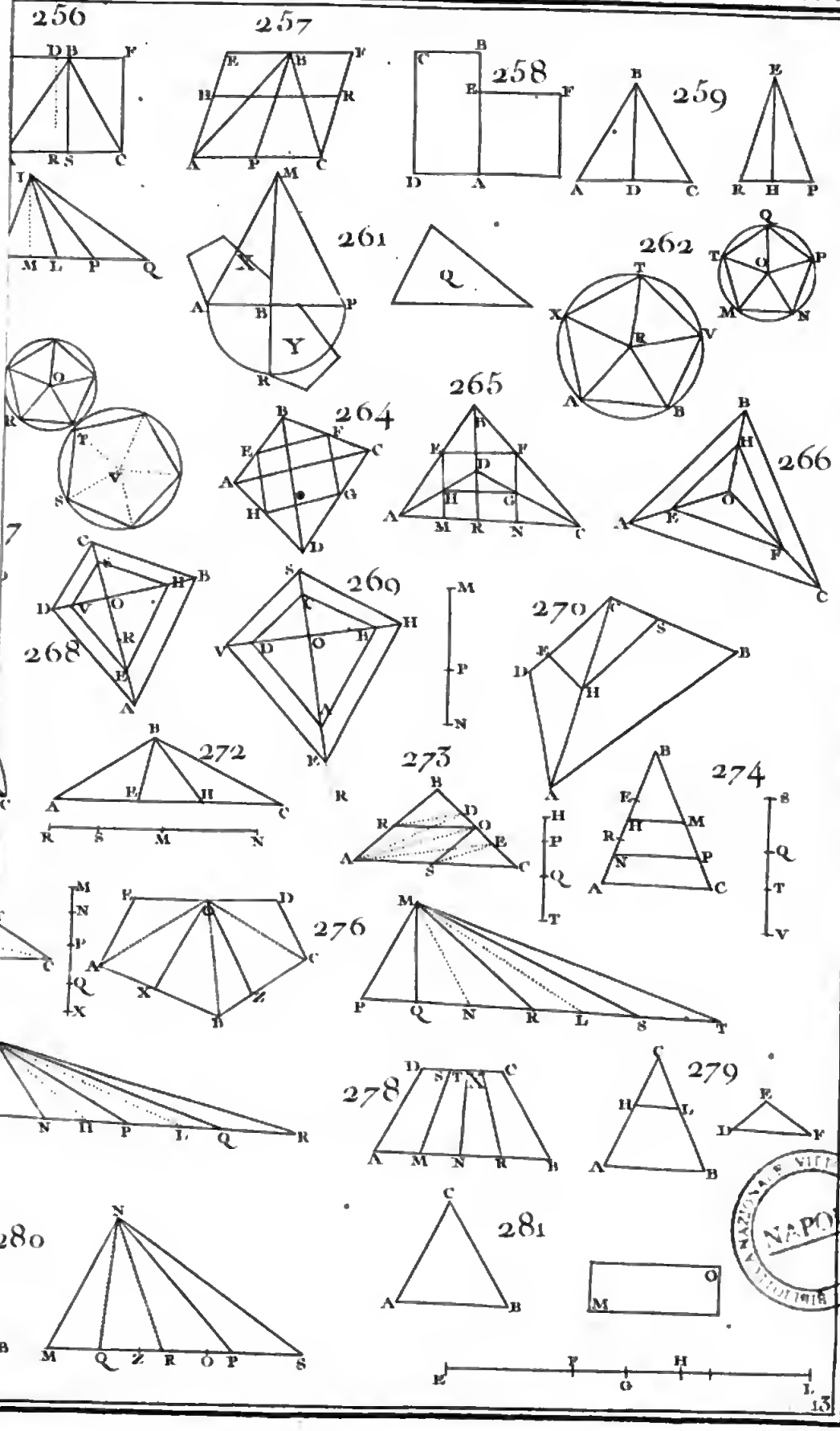

B
212
A
C

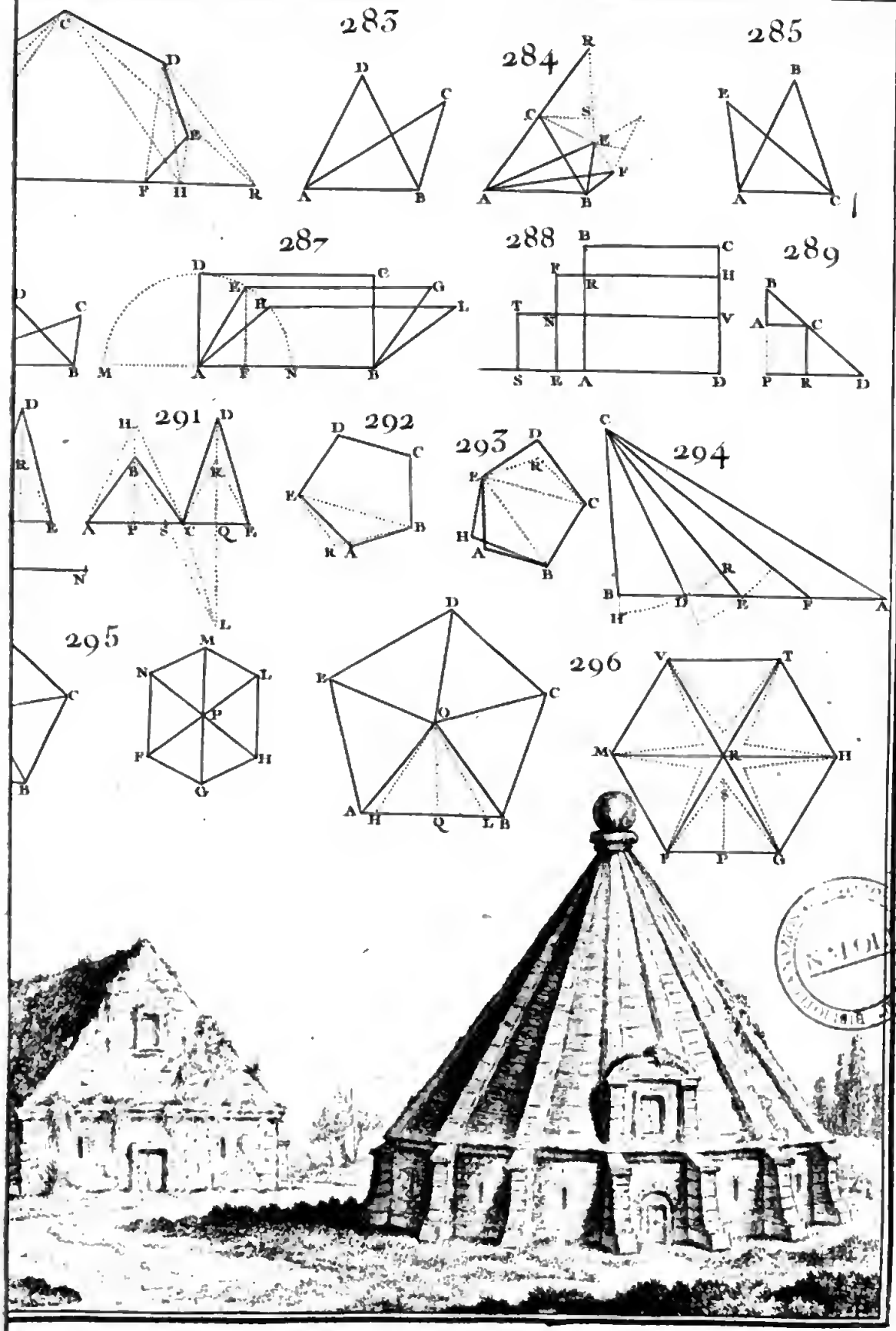

213
C

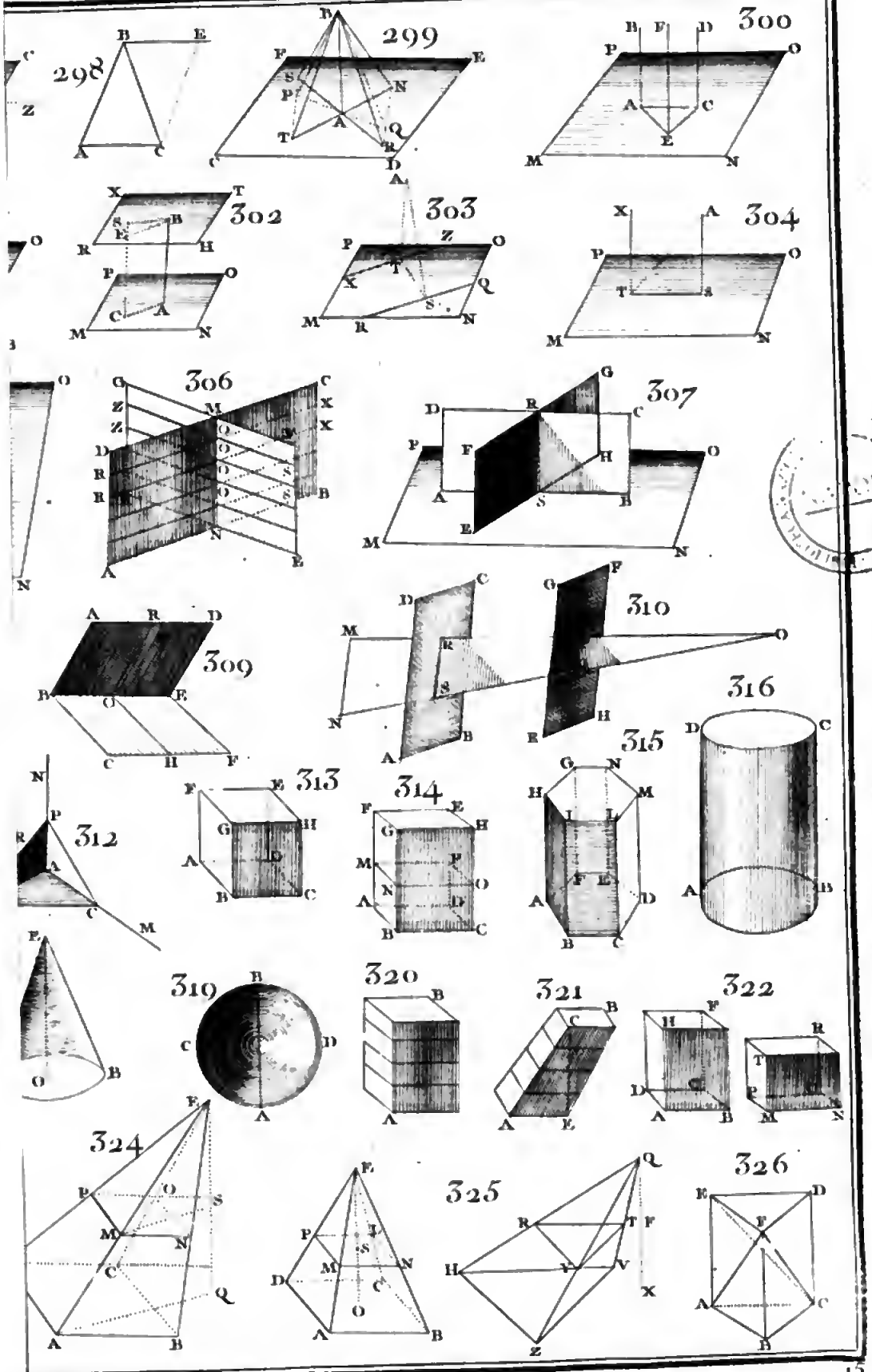

H
214
N
R
E
S
V
A
I
II
III
2
3
4
5
6
IV
B

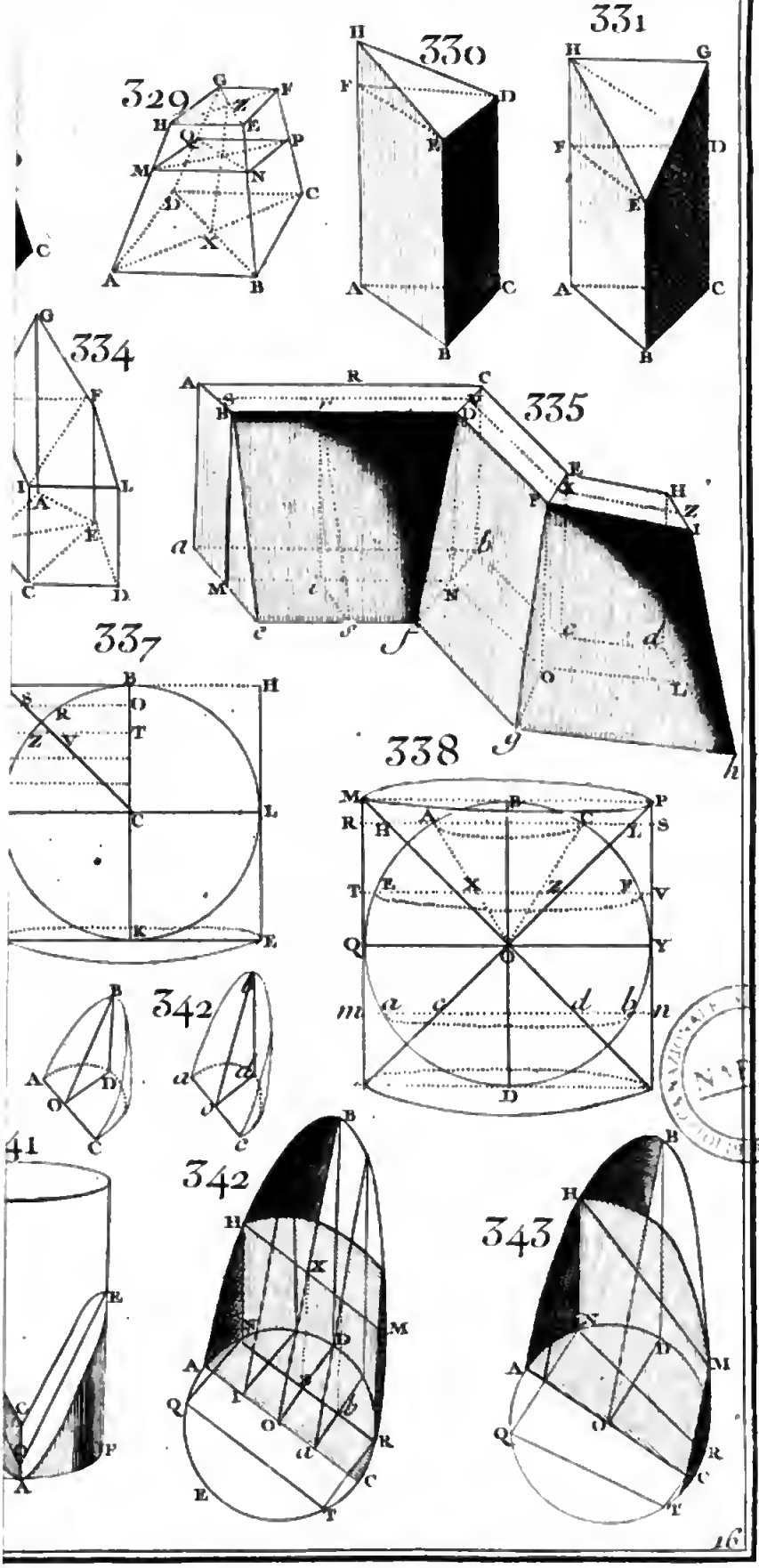

216
217
218
219
221
222
223
225
226
228
229
230
NAPOLI

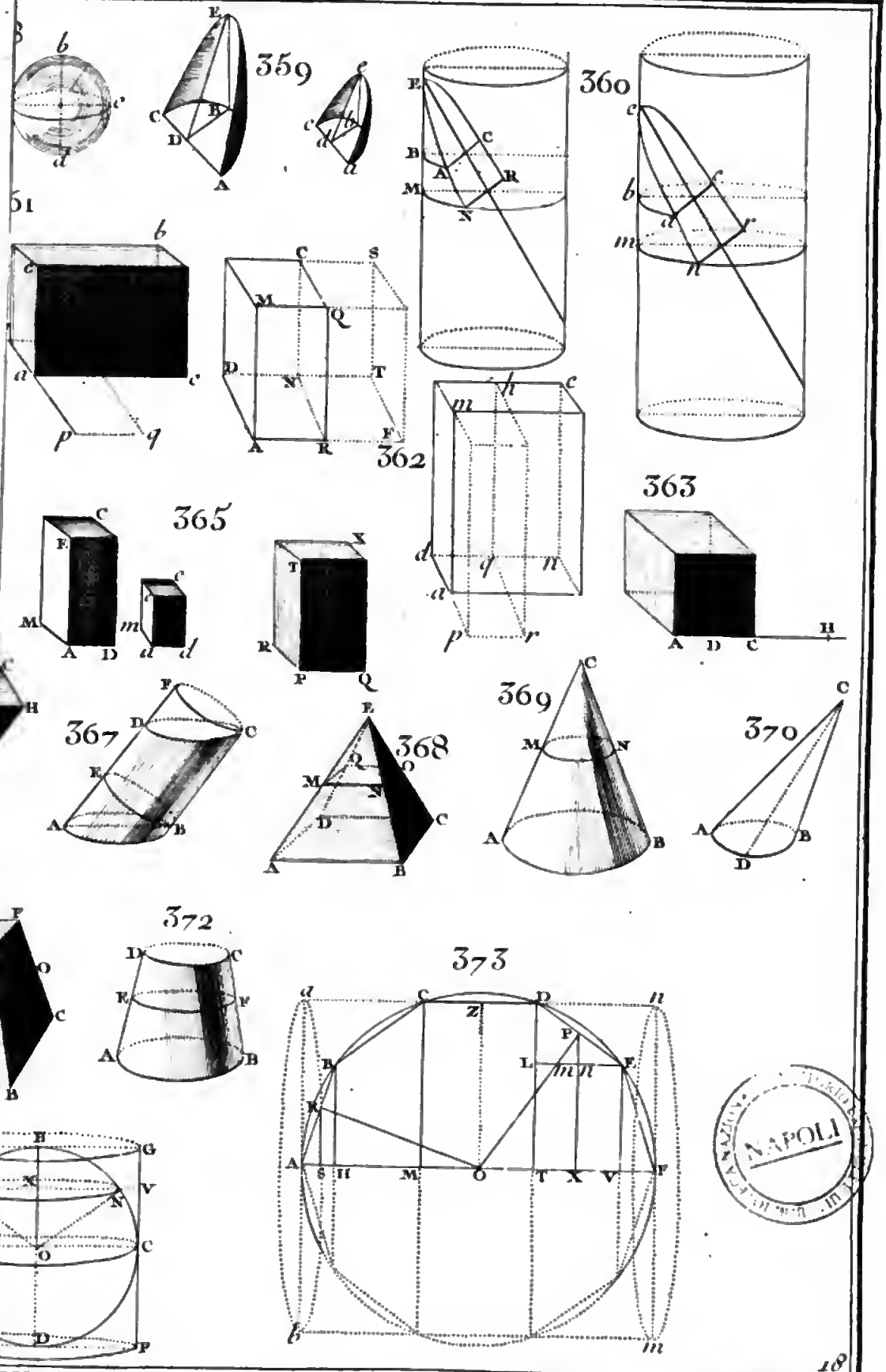

232
233
234
236
237
238
240
241
243
244
246
247
249
250
251
253
254
A D E F
B C R M H
E H
P E C H R G
R B A C S
A C B
A D O B C R
A D E R S B F C
D T E
G C N D O B F A H R S T E
B A D C E
D E C A B
d e c a b
a ab aa b
c cd a d c
b bc bb c b
S V P R I H B Z O X M C T
B A C D E
V B X C H O R A F D
V L B S T X O P F C D F
V B R M e T Q K A X E L C
R B A T O Q C D
NAPOLI


256
257
258
259
261
262
264
265
266
268
269
270
272
273
274
276
278
279
280
281
Y
NAPOLI


283
284
285
287
288
289
291
292
293
294
295
296

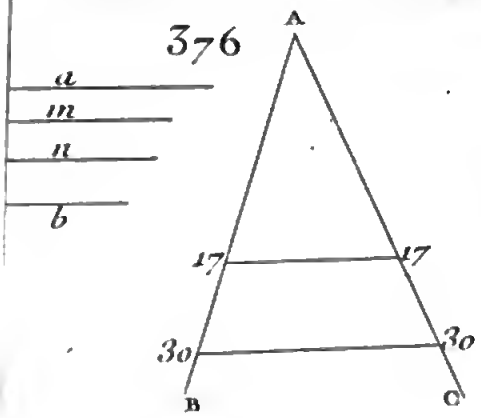

298
299
300
302
303
304
306
307
309
310
312
313
314
315
316
319
320
321
322
324
325
326


329
330
331
334
335
337
338
341
342
342
343

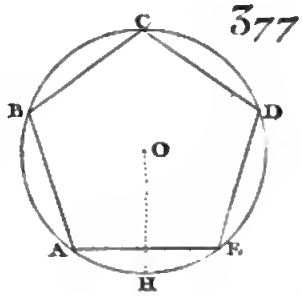


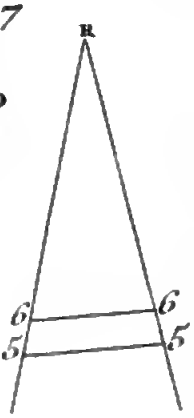
NAPOLI

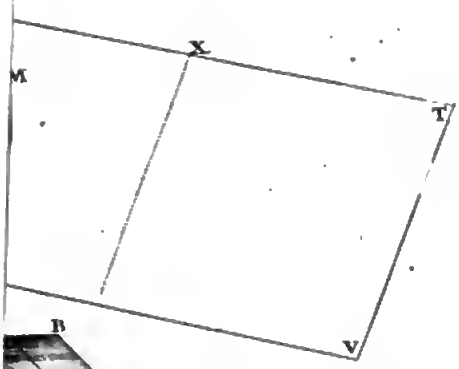
376

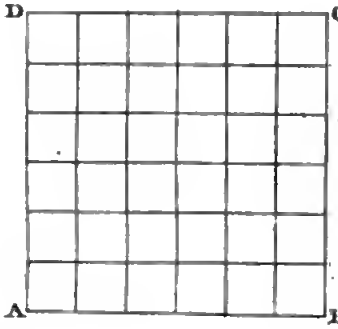


377

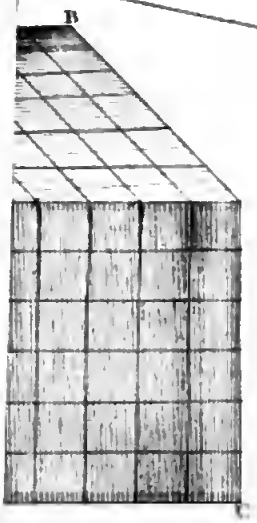




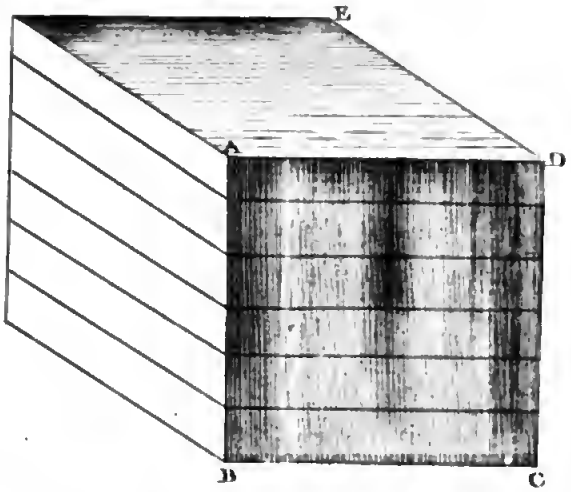


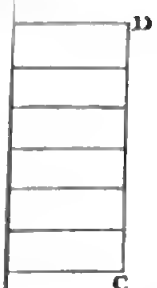


378

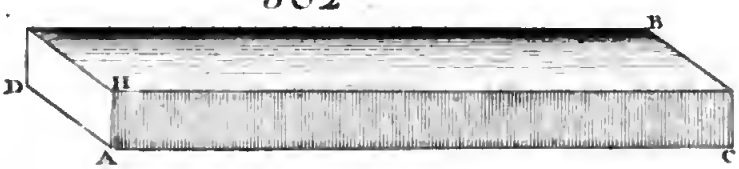


381



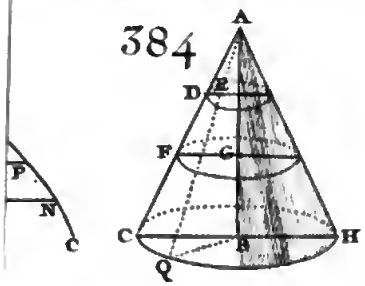


382

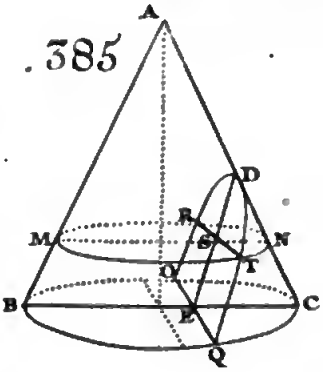


NAPOLI

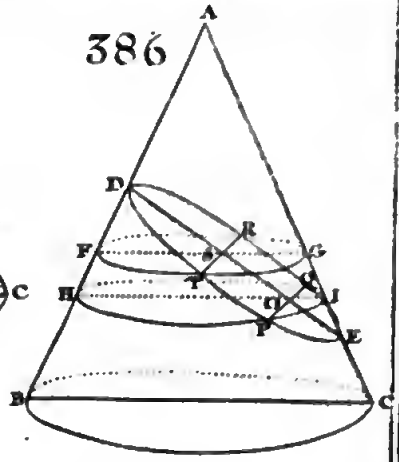
384



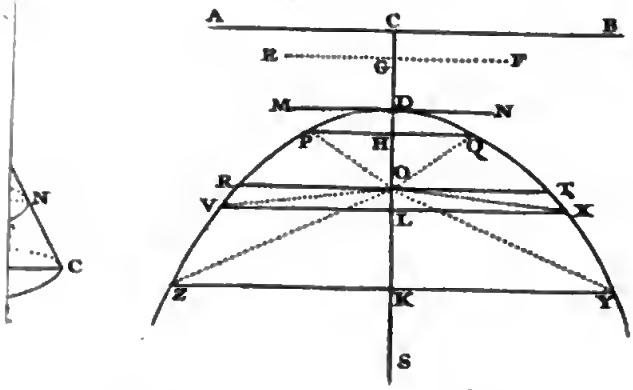
385



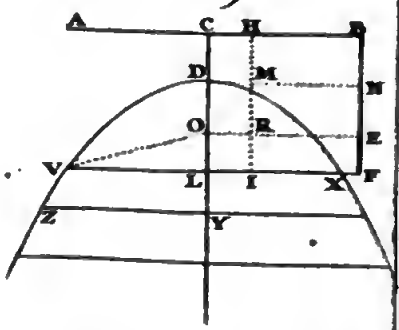
386



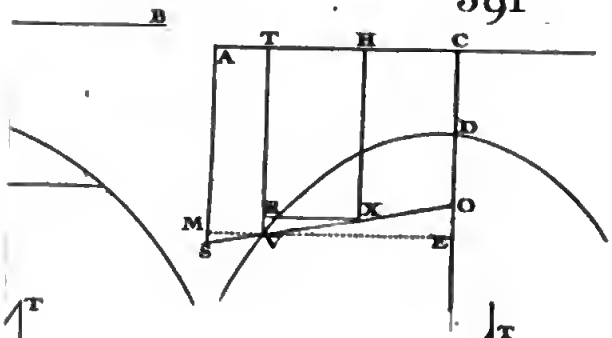
388



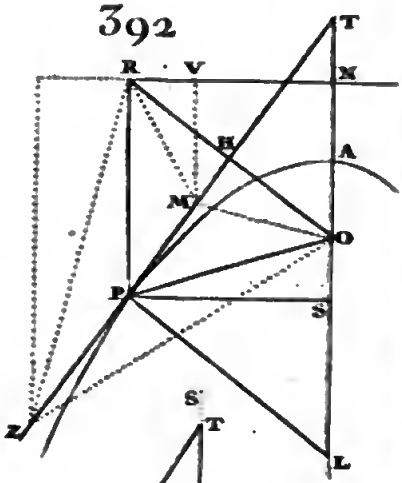
389

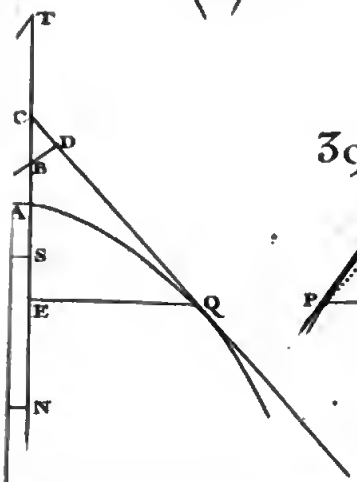


391

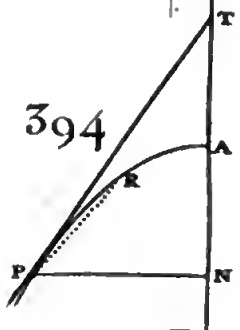


392

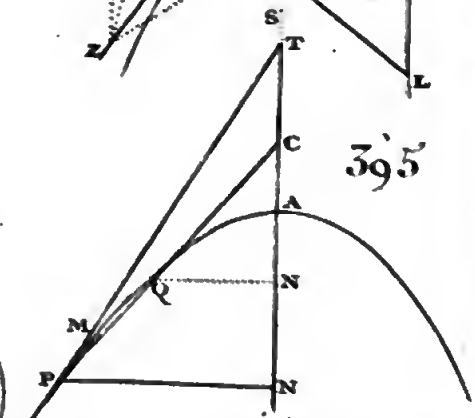




394

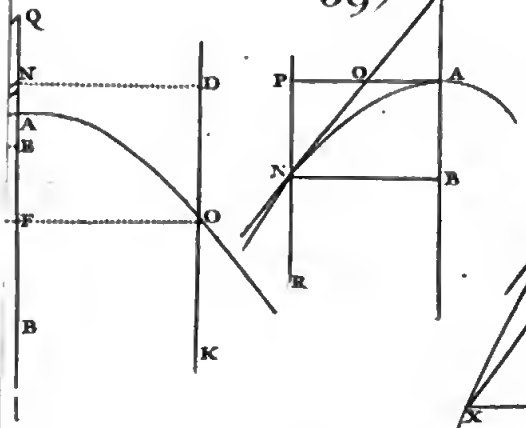


395

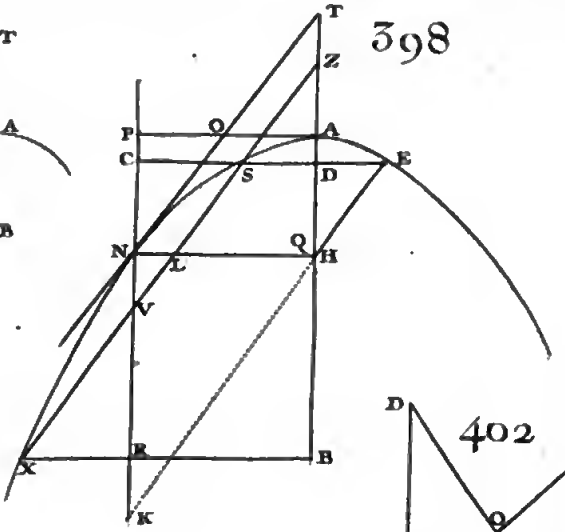


NAPOLI

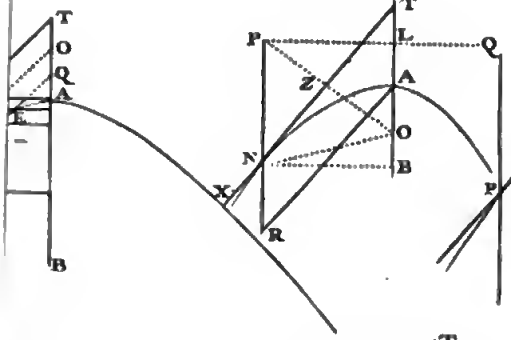
397



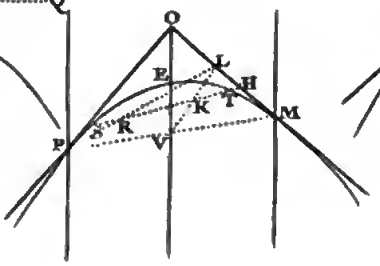
398



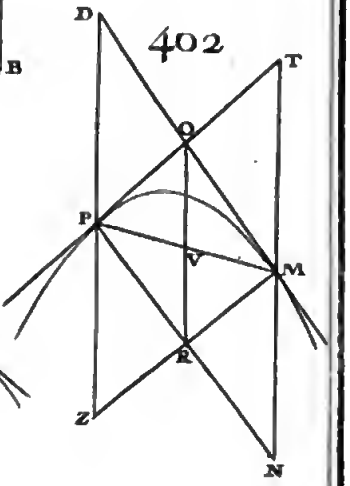
400



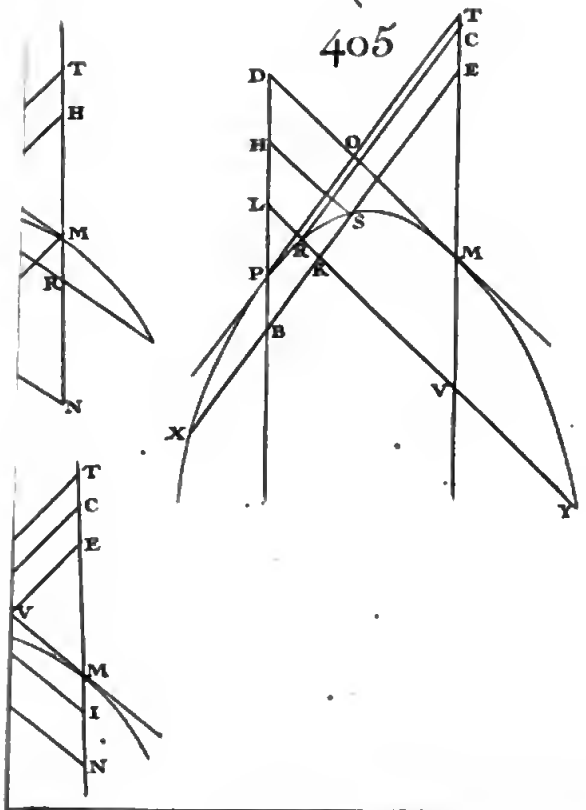
401



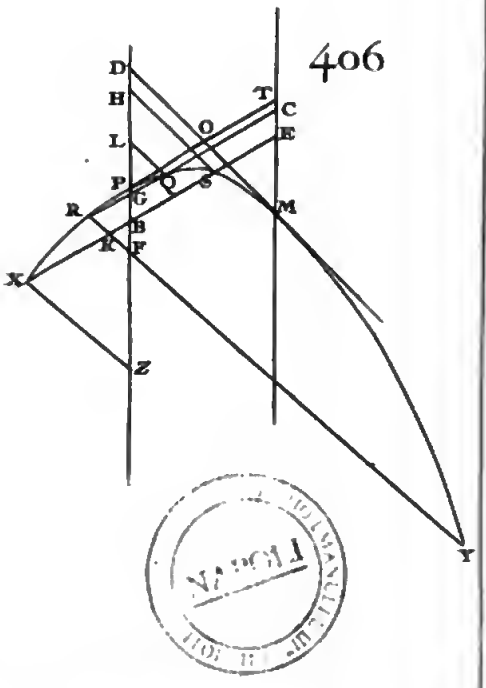
402

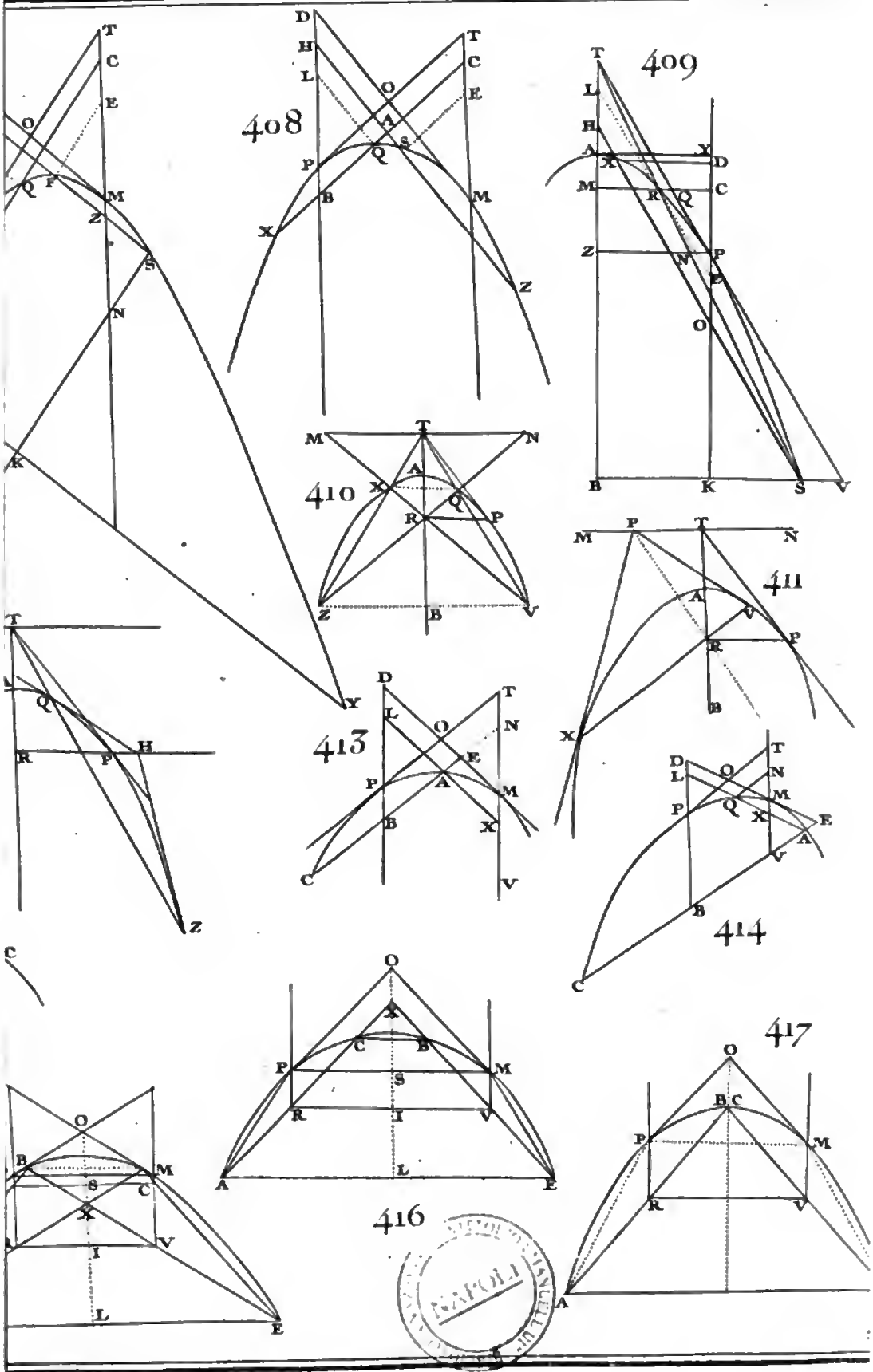


405

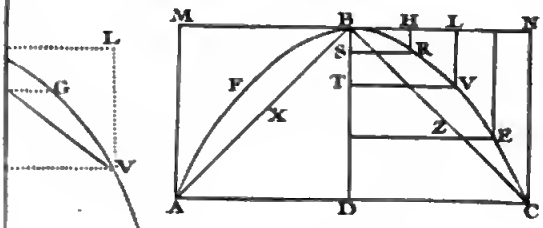


406

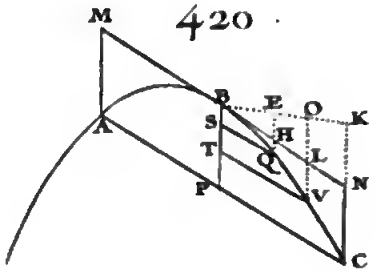


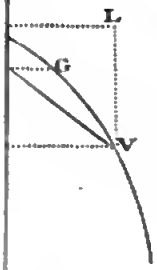

408
409
410
411
413
414
416
417

419

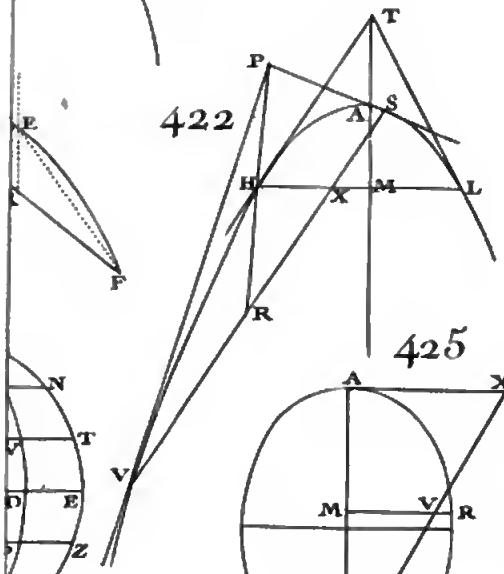


420

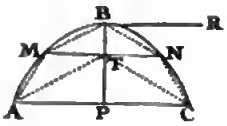


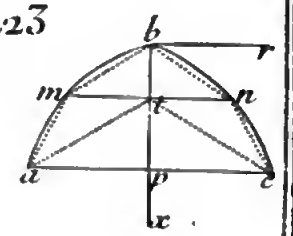


422

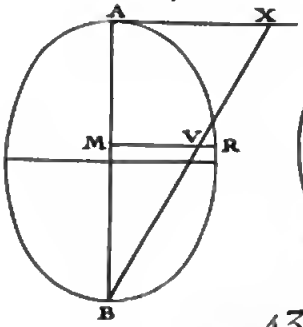


423

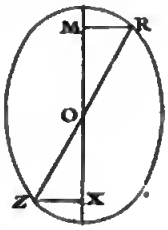




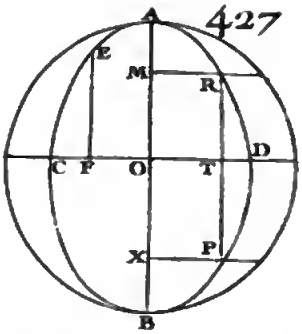
425



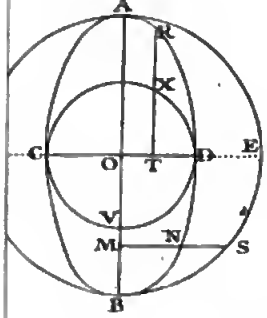
426



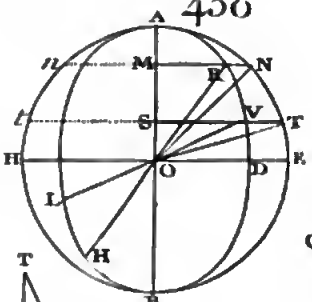
427



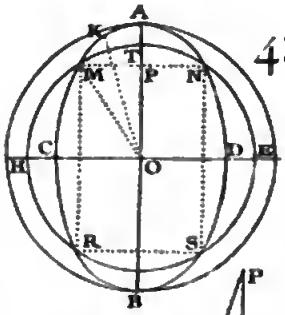
429

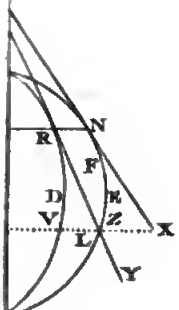


430

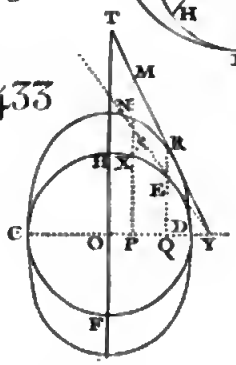


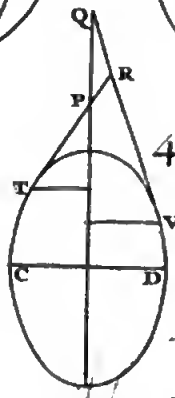
431





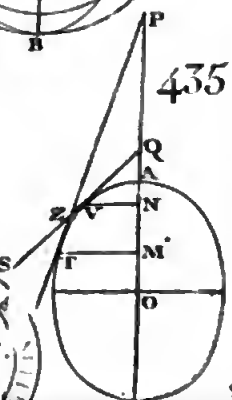
433



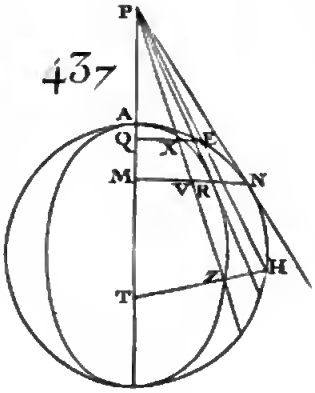


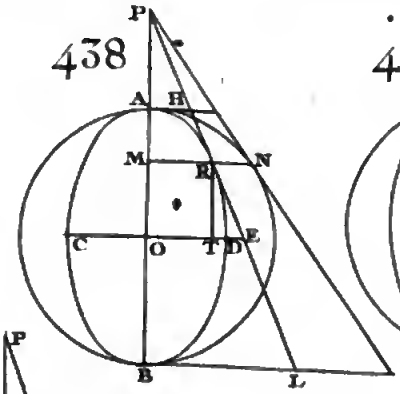
434

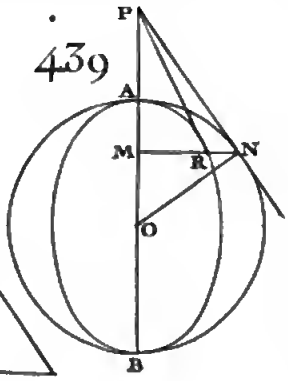
435

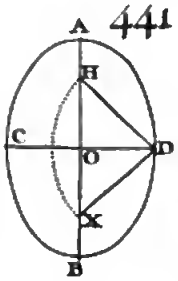


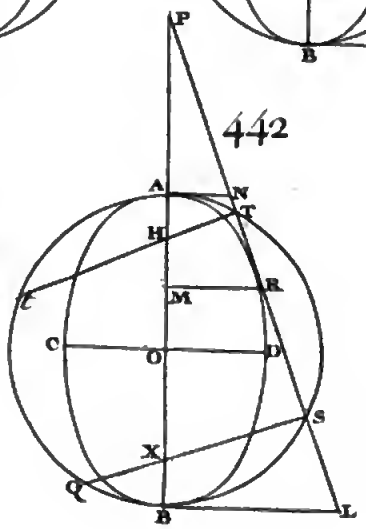
NAPOLI

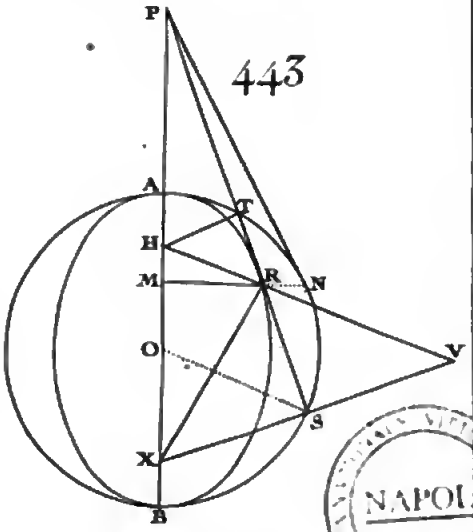

437
P
A
Q
X
E
M
V
R
N
Z
H
T

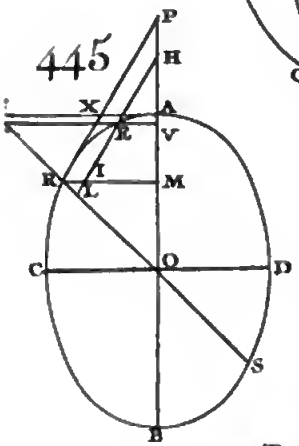

438
P
A
H
M
E
N
C
O
T
D
B
L

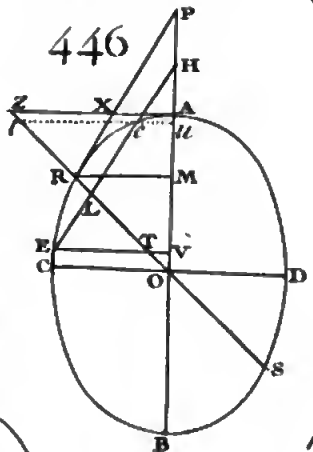

439
P
A
M
R
N
O
B

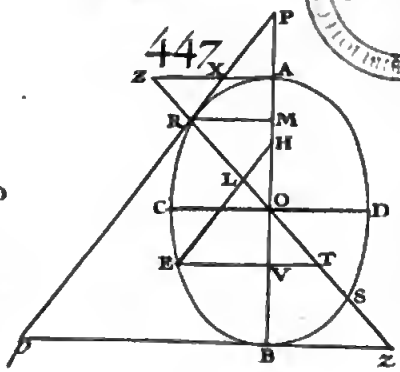

441
A
H
C
O
D
X
B

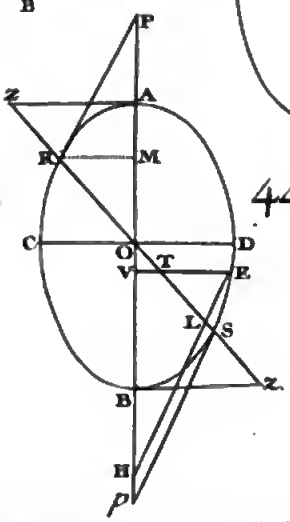

442
P
A
N
T
H
M
R
C
O
D
S
X
Q
B
L

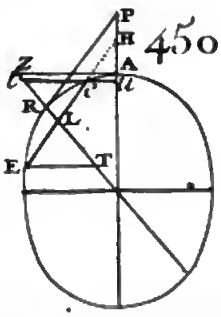

443
P
A
T
H
M
R
N
O
V
S
X
B

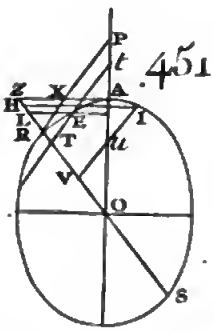

445
P
H
X
A
E
V
R
I
M
L
C
O
D
S
B


446
P
H
Z
X
A
R
M
L
E
T
V
C
O
D
S
B


447
P
Z
X
A
R
M
H
L
C
O
D
E
T
V
S
B
z

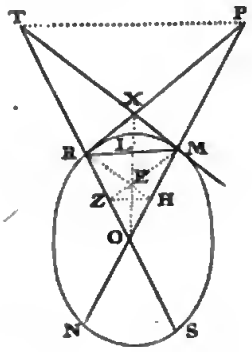

449
P
z
A
R
M
C
O
T
D
V
E
L
S
B
z
H
p


450
P
H
Z
A
R
L
E
T

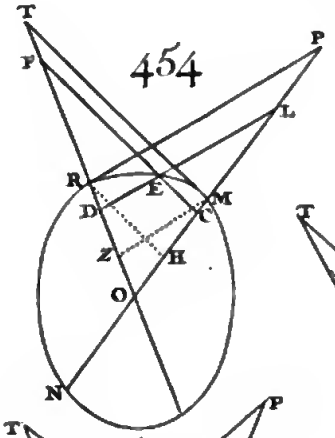

451
P
t
z
X
A
H
L
E
I
R
T
u
V
O
S

NAPOLI

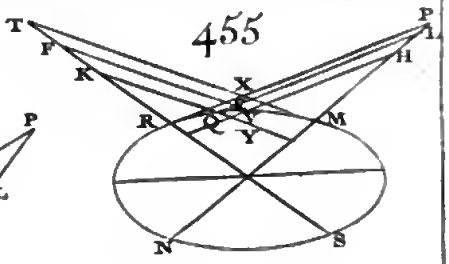
453



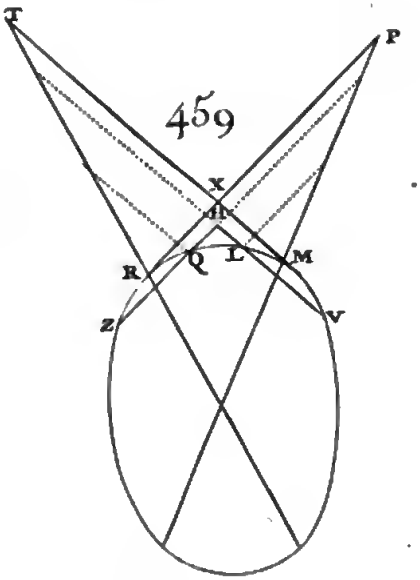
454



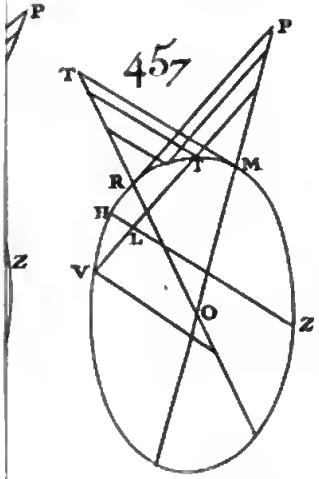
455



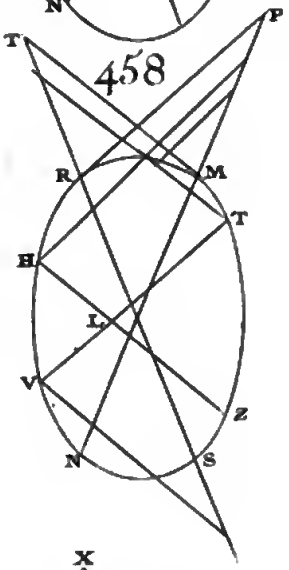
459



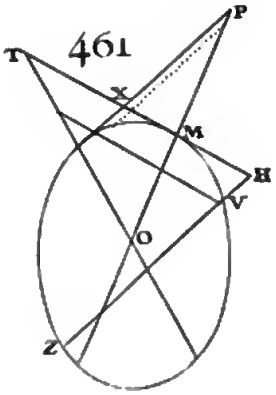
457



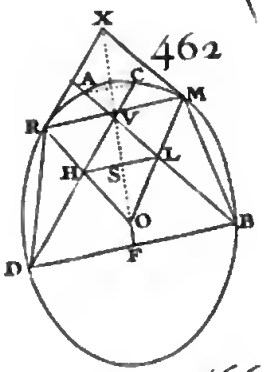
458



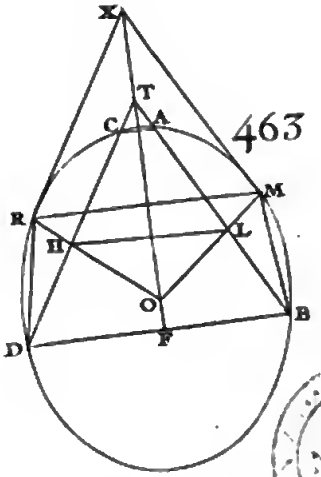
461



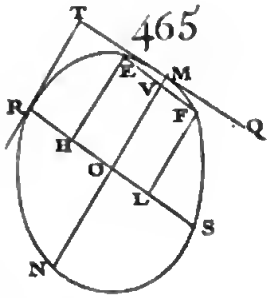
462



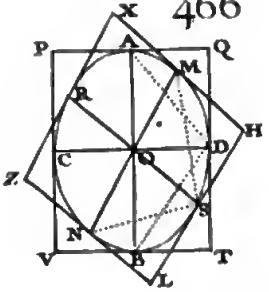
463



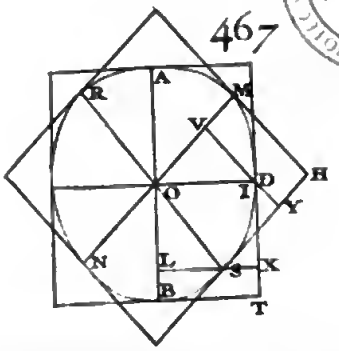
465



466

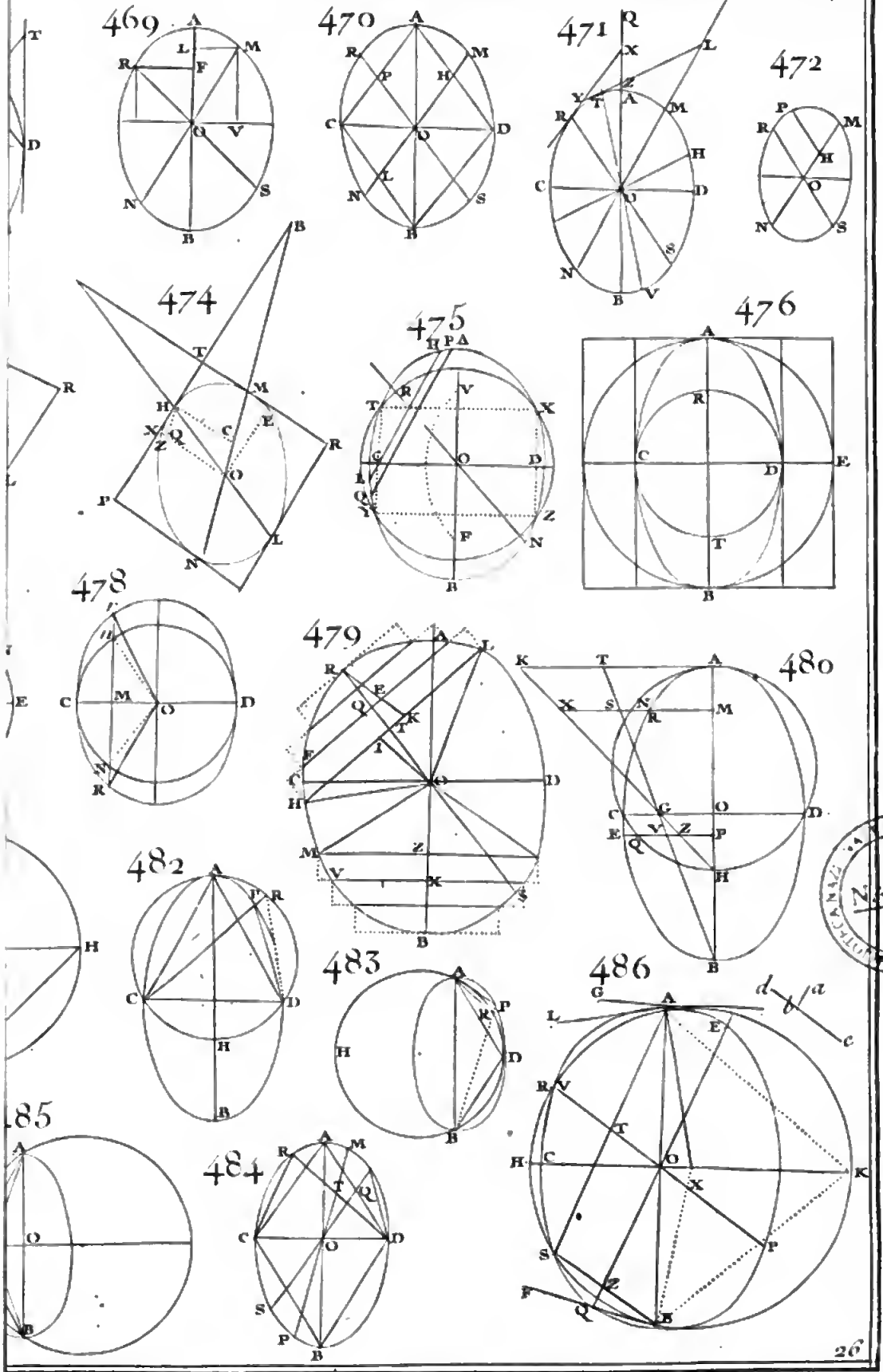


467

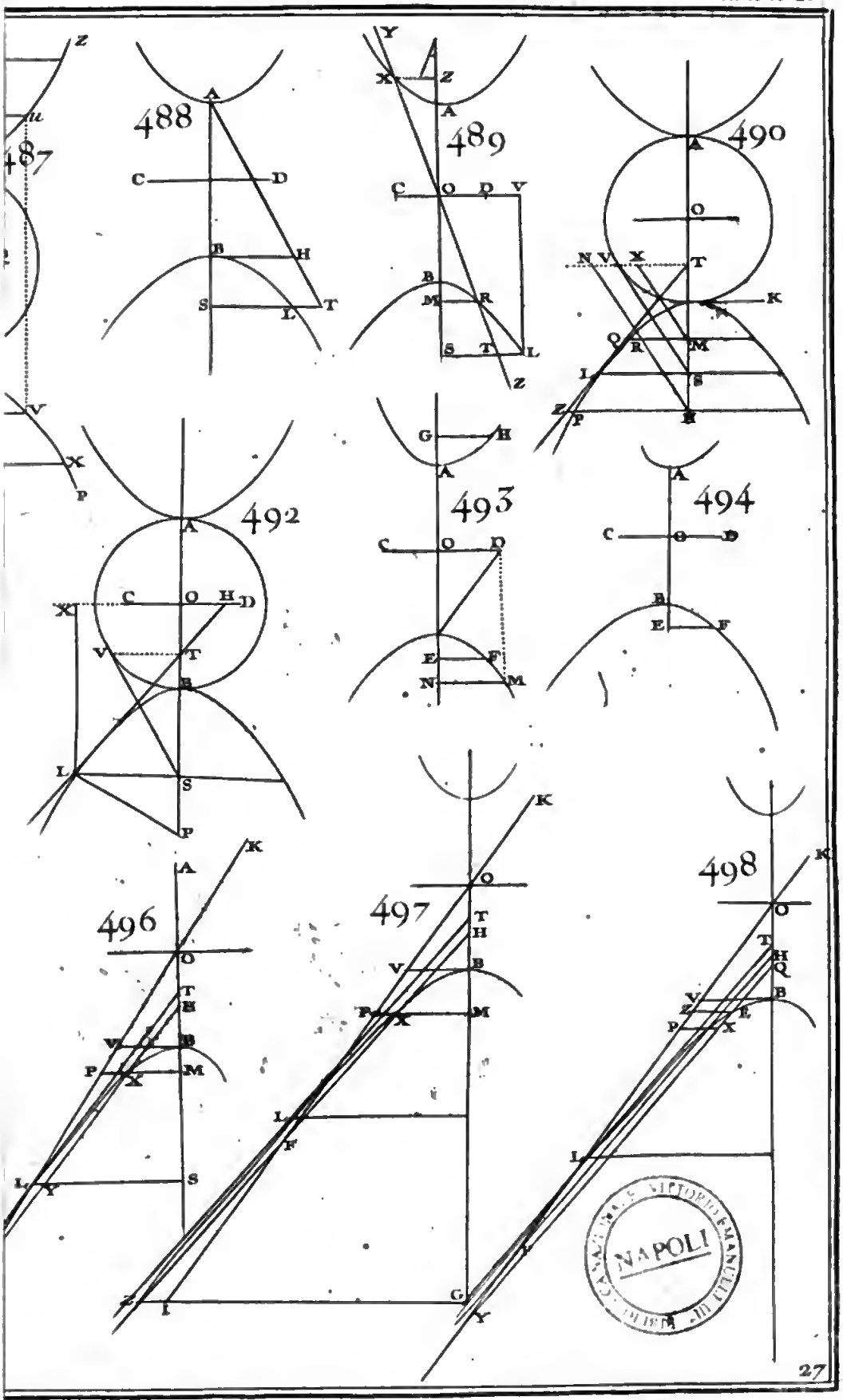


NAPOL

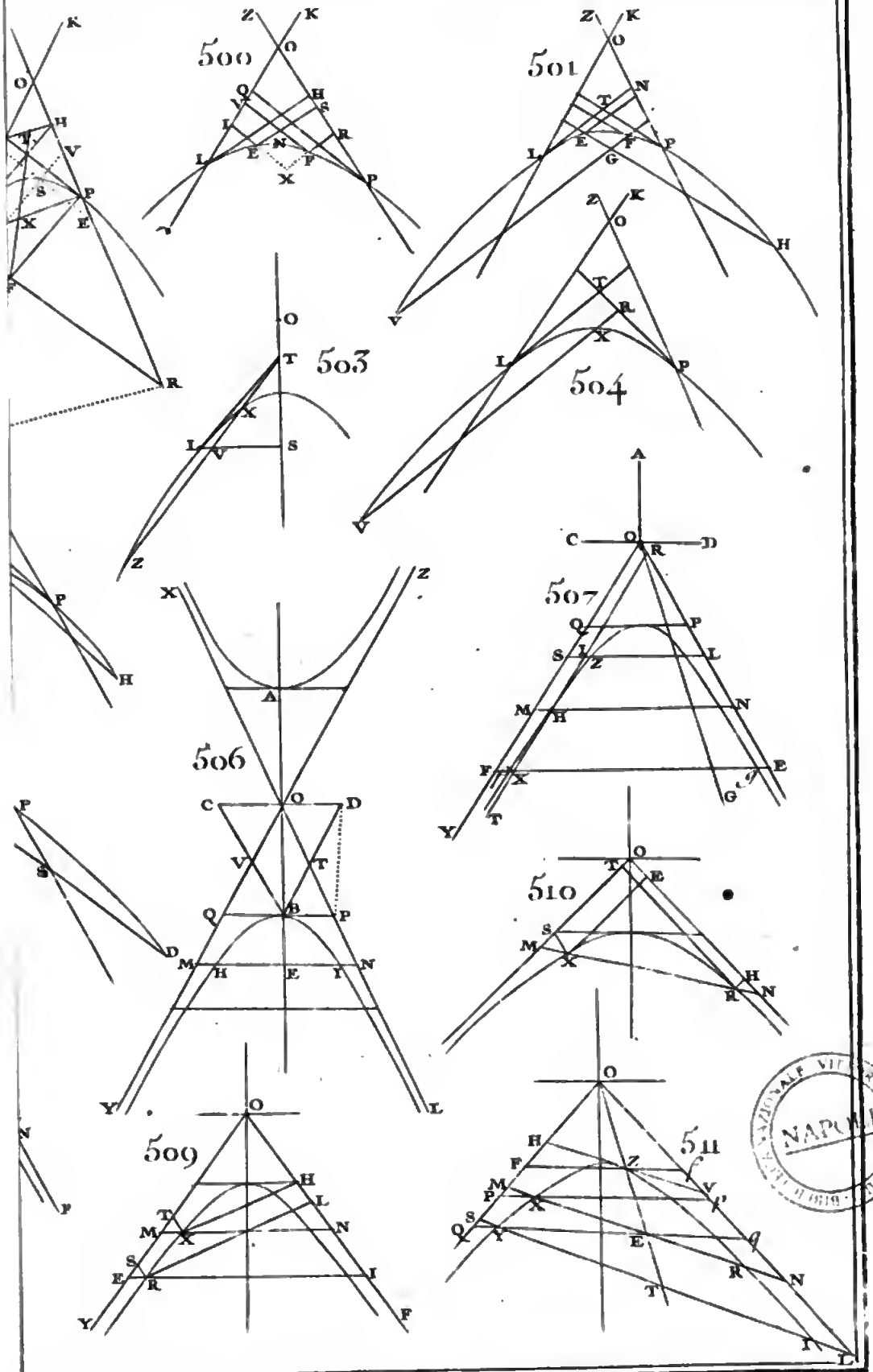
Digitized by Google



NAPOLI

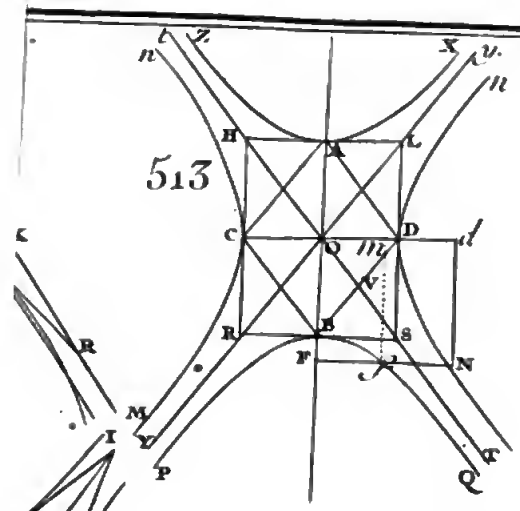

487
488
489
490
492
493
494
496
497
498
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
V
X
Y
Z

NAPOLI

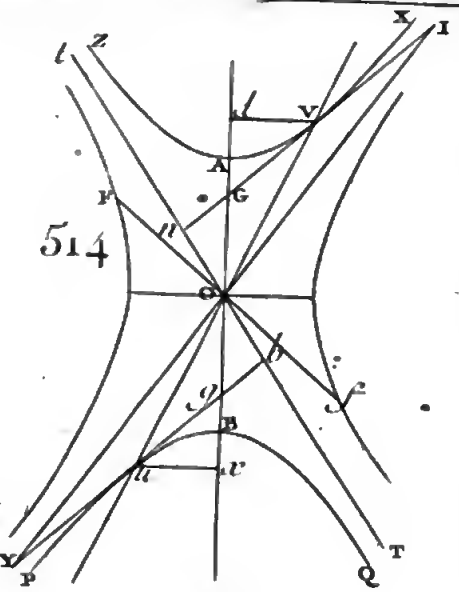


NAPOLI

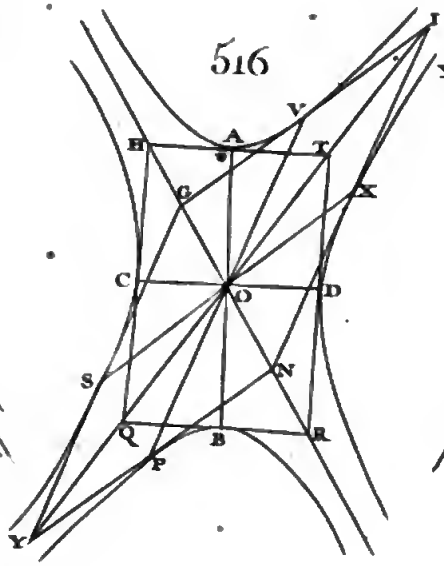
513



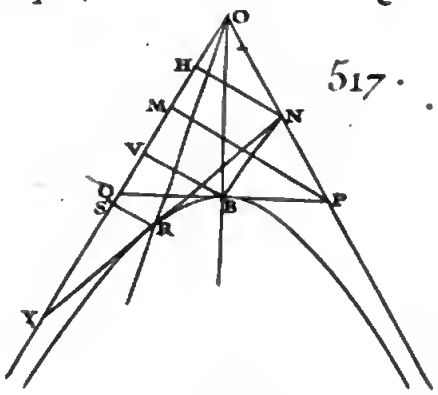
514



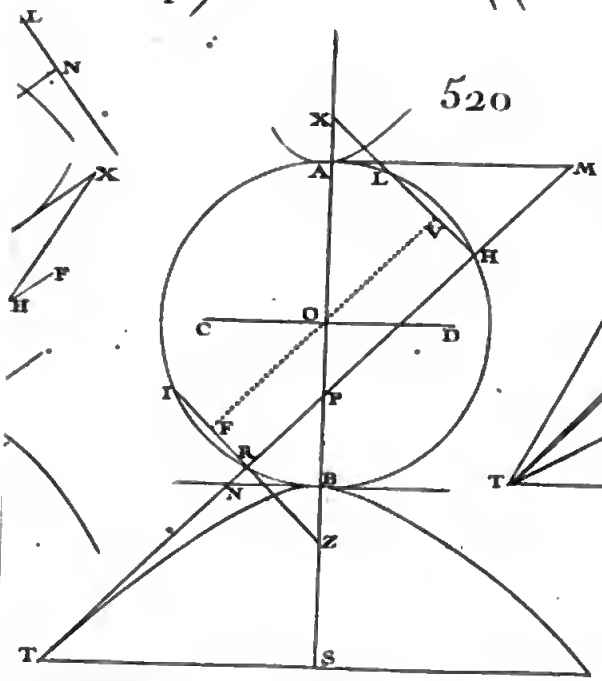
516



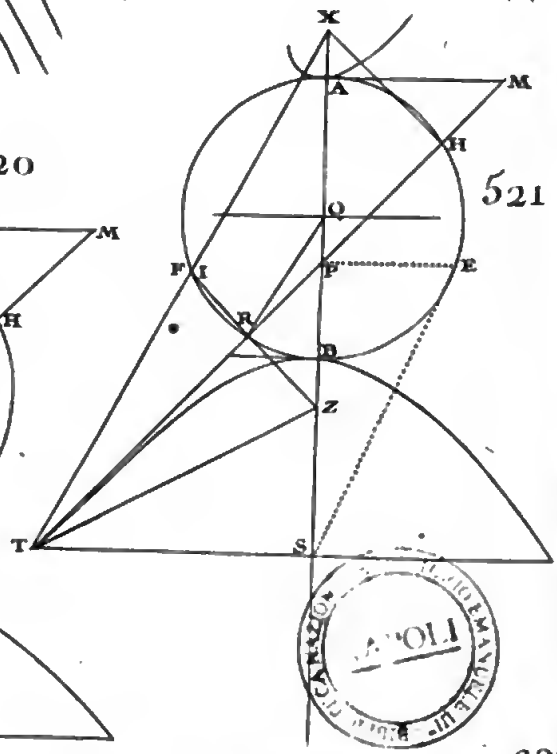
517



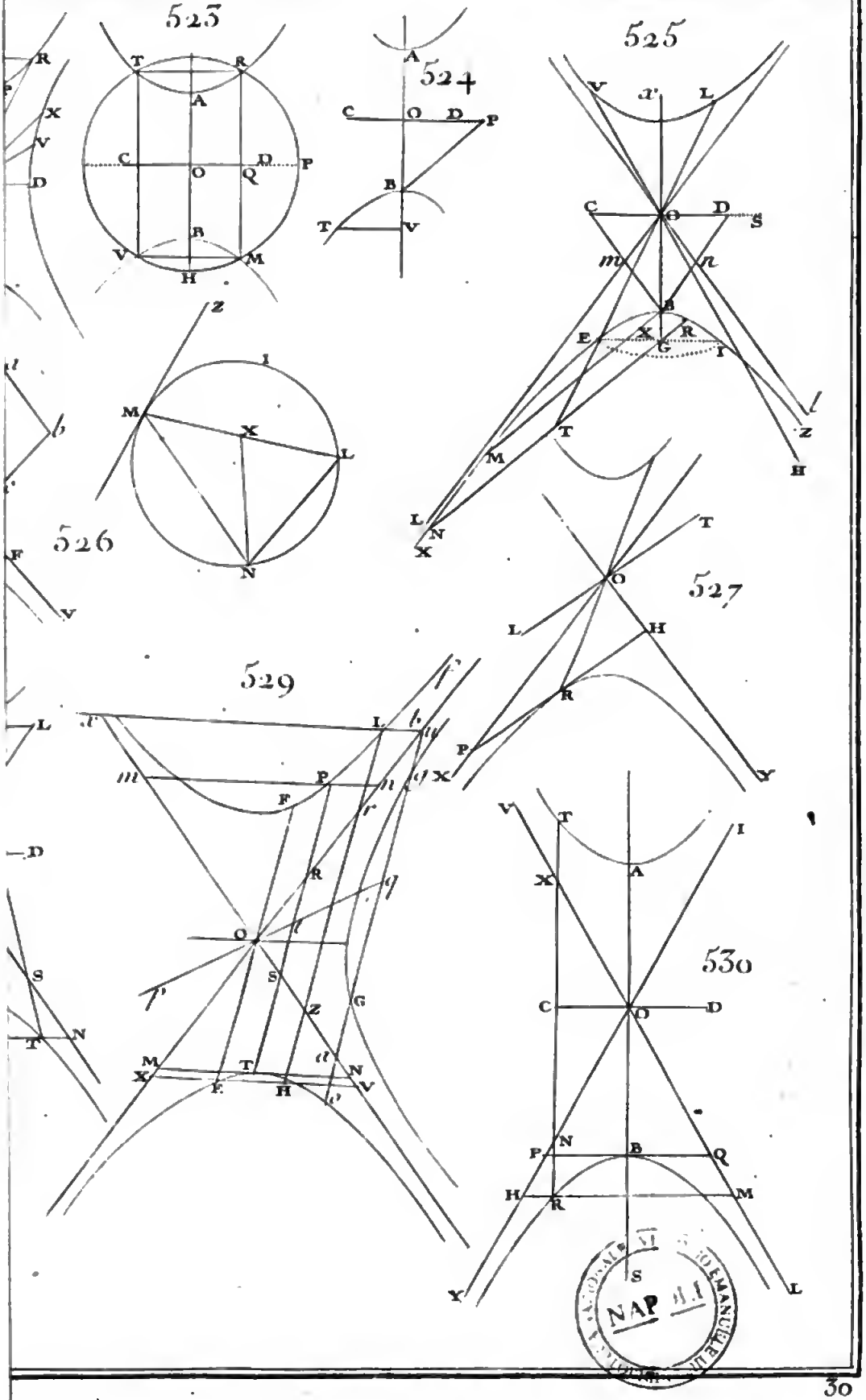
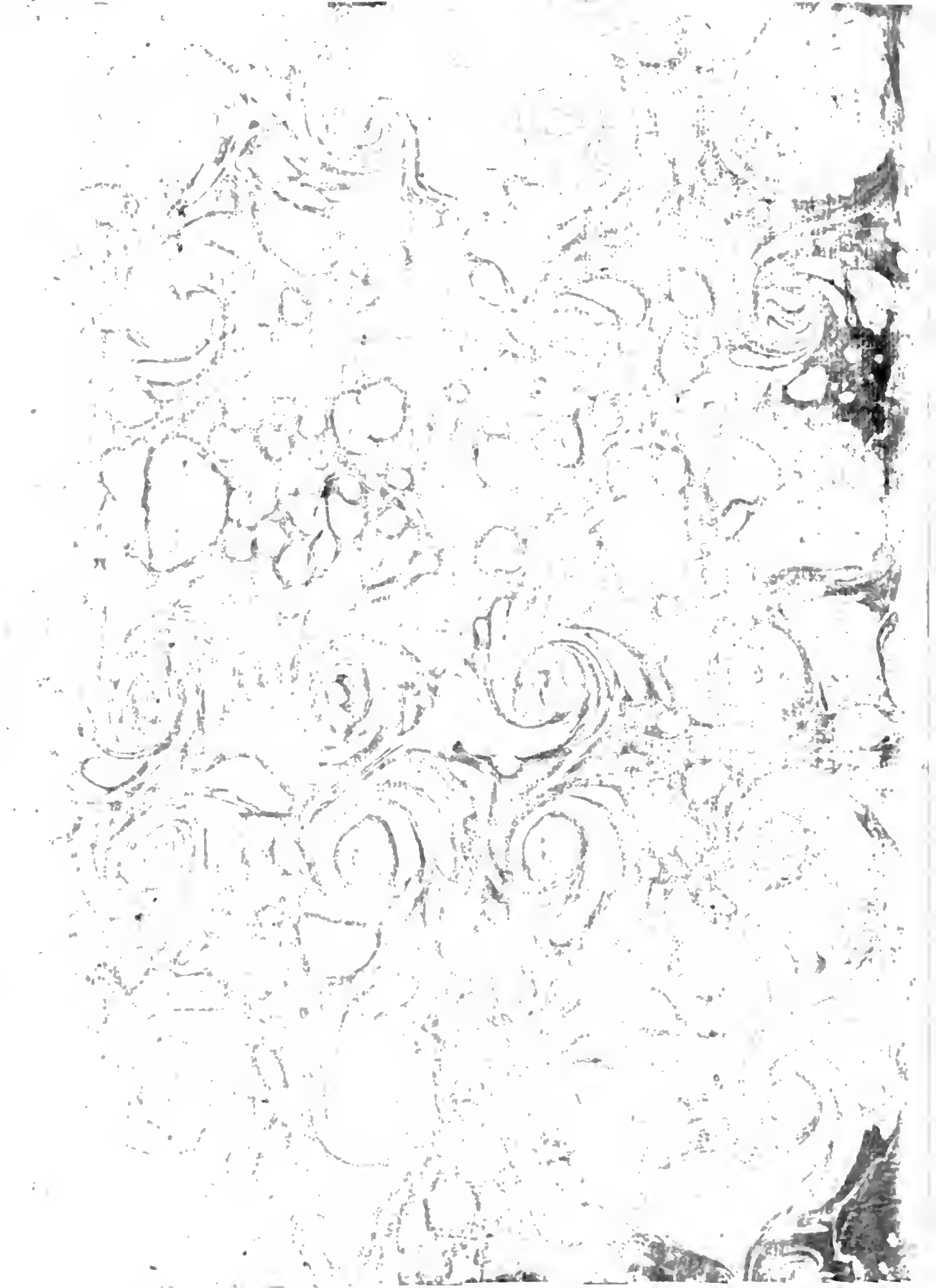
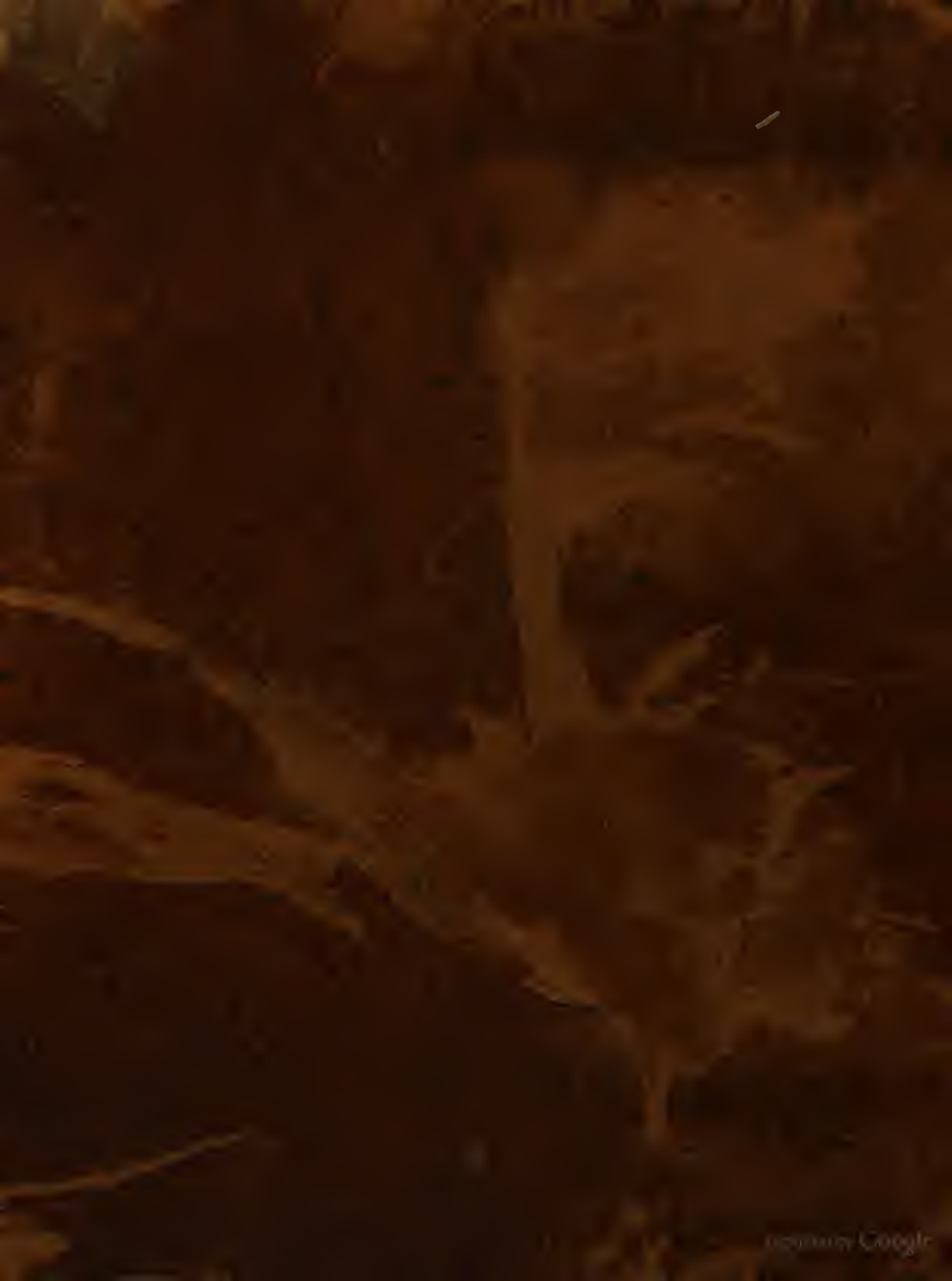
520



521



APOLL


523
524
525
526
527
529
530
T
R
A
C
O
D
P
Q
B
V
M
H
X
L
N
S
I
Z
x
m
n
E
G
F
T
Y